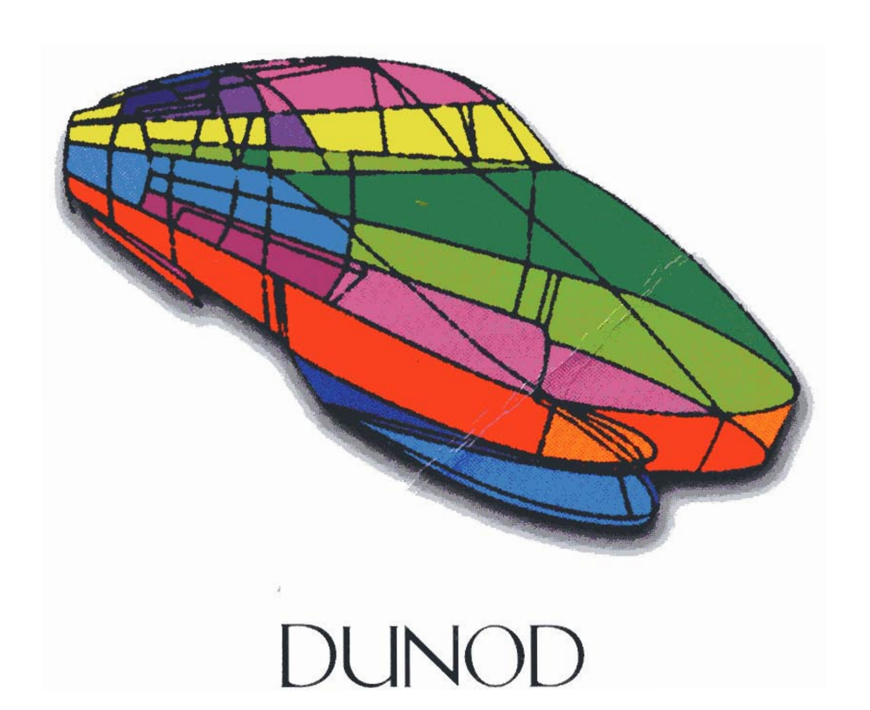
P. Agati - N. Mattera

DEUG TI • IUT • STS

Mécanique appliquée

Résistance des matériaux
Mécanique des fluides
Thermodynamique



DUNOD

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Mécanique

Mécanique du solide, P. Agati, Y. Brémont et G. Delville.
Liaisons et mécanismes, P. Agati et M. Rosseto.

Technologie

Construction mécanique. Transmission de puissance. 1. Principes, F. Esnault.
Construction mécanique. Transmission de puissance. 2. Applications mécaniques, F. Esnault.
Construction mécanique. 3. Transmission de puissance par liens flexibles, F. Esnault.

Électronique

Théorie du signal et composants, F. Manneville et J. Esquieu.
Systèmes bouclés linéaires de communication et de filtrage, F. Manneville et J. Esquieu

Informatique

Transmissions et réseaux, S. Lohier et D. Présent.

ISBN 2 10 003217 8

Avant-Propos

A la suite du cours de *Mécanique du solide* de P. Agati, Y. Brémont et G. Delville, il était normal de réunir dans un même ouvrage l'ensemble de la *Mécanique appliquée*, nécessaire aussi bien aux étudiants de BTS que ceux d'IUT.

• *La première partie* de ce livre concerne la *Résistance des Matériaux*. Les connaissances acquises en terminale y sont approfondies et complétées, notamment par des notions d'élasticité plane. Le chapitre 10 concerne la mise en œuvre de logiciels de Résistance des Matériaux et leur utilisation à travers trois exemples simples.

• *La deuxième partie* concerne la mécanique des fluides et la thermodynamique appliquées. Les automatismes hydrauliques ou pneumatiques sont suffisamment utilisés industriellement pour qu'un technicien, quelle que soit sa spécialité en ait quelques notions. Nous avons cherché à éviter les développements mathématiques trop abondants et pas toujours correctement maîtrisés à ce niveau. Nous avons par contre insisté très largement sur les applications industrielles : Dimensionnement et commande des vérins ; fonctionnement des compresseurs, etc.

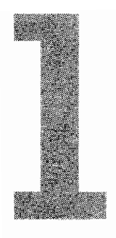
• De nombreux exercices, tous avec réponse permettront aux étudiants de tester l'avancement de leurs connaissances.

• Nous serons très honorés de recevoir les critiques et les suggestions, aussi bien de nos collègues que des étudiants qui auront utilisé cet ouvrage.

Sommaire

1re partie

MODÉLISATION
RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX
NOTIONS D'ÉLASTICITÉ



modélisation des liaisons et des actions mécaniques de liaison

Une liaison mécanique entre deux pièces (ou deux groupes de pièces) est un ensemble de dispositions constructives permettant à ces deux pièces d'avoir l'une par rapport à l'autre, certaines libertés de mouvement et de permettre la transmission de certains efforts.
Nous savons que pour réaliser une liaison, au sens cinématique, il est en général nécessaire d'associer un certain nombre de liaisons mécaniques élémentaires. Nous savons également, nous l'avons vu en technologie, que pour réaliser une liaison, plusieurs solutions, c'est-à-dire plusieurs systèmes de liaisons mécaniques élémentaires sont possibles.

1. ÉTUDE ET MODÉLISATION DES CONTACTS

1.1. REMARQUE PRÉLIMINAIRE

La poutre dont on étudie la résistance ou la déformation est en contact avec le milieu extérieur. Ce contact peut se réaliser de différentes façons ; exemple : soudure, roulement à billes, emmanchement forcé, clavetage etc... Il convient d'analyser correctement chaque contact en vue d'en donner un modèle qui, tout en étant simple, ne s'éloigne pas trop de la réalité.
Notons qu'en résistance des matériaux, le calcul des contraintes et des déformations n'a de sens que si on place la coupure fictive assez loin des forces concentrées.
Notons également qu'en résistance des matériaux, le principe de calcul des déformations exclut la possibilité de modéliser une action mécanique répartie par les éléments de réduction d'un torseur.
Suivant le but poursuivi, il est donc évident que la modélisation des actions mécaniques de liaison prendra une forme différente et il faudra faire preuve de discernement avant d'entreprendre ce travail.

1.2. DIFFÉRENTS TYPES DE CONTACT

Dans ce paragraphe, les deux solides en contact sont supposés indéformables.
La géométrie des contacts ne peut se décrire facilement qu'en utilisant un **repère local associé au contact.**
Pour chaque cas particulier, ce repère $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sera défini très clairement. Notons que $\mathcal{R}$ n'est lié à aucun des deux solides en présence. Le choix de $\mathcal{R}$ va dépendre des caractéristiques géométriques du contact :

— L'origine A de $\mathcal{R}$ est le *centre géométrique* du contact. Quand les deux surfaces de contact ont un centre de symétrie, ce point sera le centre A du repère local associé.

— La base locale associée est en général construite à partir d'un vecteur unitaire $\vec{x}$ qui constitue le vecteur caractéristique du contact de la liaison. $\vec{x}$ sera toujours porté par la normale au plan tangent commun ou par l'axe de symétrie de la liaison.

— Notons que la base $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sera toujours orthonormée directe.

— Si une seconde direction privilégiée existe, normale à $\vec{x}$, elle sera repérée par $\vec{y}$.

1.2.1. Contact ponctuel

Deux solides **1** et **2** sont en contact au point A s'ils sont indéformables et si en A, et quel que soit le plan de coupe passant par A, ils ont un rayon de courbure différent.
Soit $P(A, \vec{y}, \vec{z})$ le plan tangent commun en A et $(A, \vec{x})$ la normale en A à ce plan P *(fig. 1.1)*.

Notons qu'au contact en A, l'effort de contact de **1** sur **2** noté $\vec{A}(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$ s'exerce nécessairement au seul point A. Un tel contact est une vision purement théorique puisque cet effort provoquerait une *pression de contact* théoriquement infinie et donc un écrasement local autour du point A, qui doit nécessairement conduire à considérer **une surface de contact** finie, même si celle-ci est très petite.

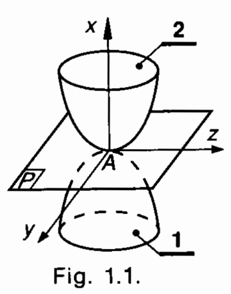


Fig. 1.1.

1.2.2. Contact linéique

On se limitera à deux types de *ligne de contact*
— contact linéique rectiligne *(fig. 1.2)*
— contact linéique circulaire *(fig. 1.3)*.

Contact linéique rectiligne

(δ) est la génératrice de contact
A est le milieu de la ligne de contact.
$(A, \vec{x})$ est la normale au plan tangent commun.
$(A, \vec{y})$ est l'axe porté par la génératrice (δ).

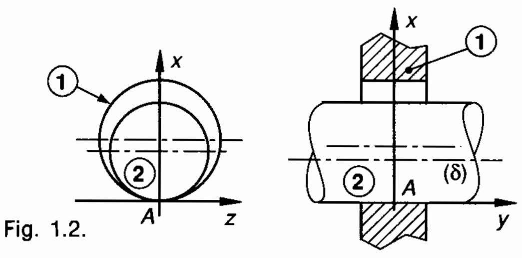


Fig. 1.2.

Contact linéique circulaire

On se limitera géométriquement au cas du contact d'une bille sphérique de centre O dans une gorge cylindrique droite de même rayon.
L'arc de cercle de contact appartient au plan normal en O à l'axe de la gorge.
A est confondu avec le centre O de la bille.
$(A, \vec{x})$ est porté par l'axe de la gorge cylindrique.

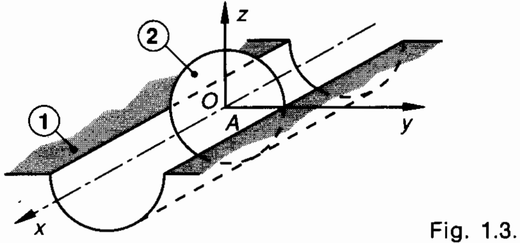


Fig. 1.3.

L'arc de cercle de contact appartient au plan $(A, \vec{y}, \vec{z})$.

Notons que l'effort de contact de 1 → 2 est dans les deux cas réparti sur la « ligne de contact ». La modélisation ne peut se faire que si l'on connaît la densité linéique de force et la façon dont elle est répartie.
Comme dans le cas du contact ponctuel, un contact linéique est une vision purement théorique puisqu'il engendrerait un écrasement local autour de la ligne de contact.

1.2.3. Contact surfacique

Si nous supposons qu'autour du point A, il existe pour les solides **1** et **2** deux surfaces S_1 et S_2 qui ont la même forme géométrique et qui coïncident parfaitement, alors on peut dire que le contact **1-2** est surfacique *(fig. 1.4)*.
Pratiquement, ces surfaces de contact ont une forme qui peut être générée par des outils :

— surfaces planes ;
— surfaces cylindriques ou coniques de révolution ;
— surfaces sphériques ;
— surfaces hélicoïdales (filets).

La définition du repère associé à ces contacts obéit à la règle énoncée au paragraphe 1.2.
L'effort de contact de **1 → 2** est réparti sur la surface de contact (S) *(fig. 1.4)*.

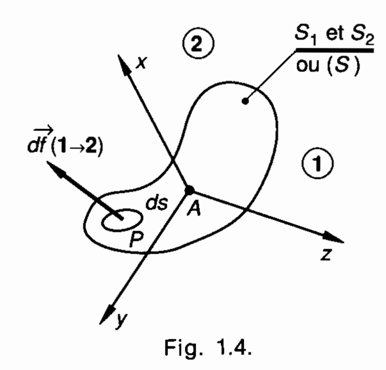


Fig. 1.4.

Au point $P \in S$, notons $\vec{df}(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$ l'effort élémentaire de contact qui s'exerce sur la surface élémentaire ds qui entoure P :

$$\vec{\delta}(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) = \frac{\vec{df}(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})}{ds}$$

est la densité surfacique de force au point P lorsque $ds \rightarrow 0$.
S'il est possible de connaître dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes de $\vec{\delta}(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$ en tout point $P \in S$, alors la modélisation de l'action mécanique de contact est possible. Notons qu'en général, un cas de contact surfacique ne peut se modéliser que si $\|\vec{\delta}(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| = \text{Cte}$ ou répartie linéairement et si la surface de contact (S) présente des axes ou des plans de symétrie.

2. MODÉLISATION ET PARAMÉTRAGE DES LIAISONS PARFAITES

2.1. DÉFINITION D'UNE LIAISON PARFAITE

Une liaison parfaite est une liaison telle que :
— les possibilités de mouvement relatif sont obtenues à partir de surfaces de contact, géométriquement parfaites, qui ont entre elles un jeu de fonctionnement supposé nul,
— le contact de ces surfaces est supposé sans adhérence.
Une liaison parfaite est donc une liaison théorique, tant du point de vue géométrique que du point de vue de la nature physique du contact.

2.2. NOTION DE DEGRÉS DE LIBERTÉ

Considérons deux pièces **1** et **2** liées, sans que soit précisée la nature de cette liaison. Soit $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère local associé à cette liaison (voir paragraphe 1.2).
Nous pouvons dans $\mathcal{R}$ définir les possibilités de mouvement relatif de **1/2** (ou de **2/1**) de la façon suivante *(fig. 1.5)*.

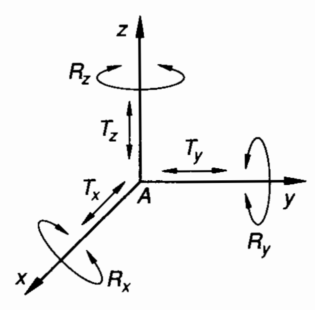


Fig. 1.5.

• T_x définit une liberté de mouvement de translation d'axe $(A, \vec{x})$ de **1/2** et réciproquement de **2/1**.

• R_x définit une liberté de mouvement de rotation d'axe $(A, \vec{x})$ de **1/2** et réciproquement de **2/1**.

• De la même façon on définit : T_y, T_z, R_y, R_z.

Définition

Le nombre de degrés de liberté d'une liaison est le nombre des mouvements relatifs indépendants que la liaison autorise entre les deux pièces considérées.

Ce nombre est au plus égal à six.

Nota : Quant le nombre de degrés de liberté est égal à zéro, les deux pièces sont en liaison complète ; on dit : *liaison d'encastrement*.
Quand le nombre de degrés de liberté est égal à six, les deux pièces n'ont aucune liaison ; on dit : *liaison libre* (ce cas ne sera pas étudié).

2.3. PARAMÉTRAGE DES LIAISONS

Si l'on veut analyser plus finement les mouvements, ou les possibilités de mouvement, de l'une des pièces constituant la liaison par rapport à l'autre, il faut pouvoir repérer la position de cette pièce par rapport au repère local associé $\mathcal{R}$.
Si **1** est la pièce dont on se préoccupe, on associe à **1** un repère $\mathcal{R}_1(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et l'on définit la position relative de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$.
$\mathcal{R}_1$ est défini par son origine B et par sa base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. Dans le cas général, on montre que la position relative de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$ dépend de six paramètres qui sont
— les trois coordonnées dans $\mathcal{R}$ de l'origine B,
— les trois angles appelés « angles d'Euler » qui permettent d'orienter la base de $\mathcal{R}_1$ par rapport à la base de $\mathcal{R}$.

Les liaisons que nous allons étudier sont des liaisons dites simples, pour lesquelles beaucoup de ces paramètres de configuration sont nuls. Nous traiterons donc ce problème uniquement sur les cas particuliers.

3. ÉTUDE DES LIAISONS PARFAITES

Il y a 11 liaisons usuelles entre solides (cette liste n'est évidemment pas limitative). La définition de celles-ci a fait l'objet de normes : NF E04-015 et ISO 3952.
Pour chaque modèle de liaison qui est une référence théorique, nous donnerons :
— la définition ;
— la forme des surfaces de liaison ;
— le paramétrage ;
— la schématisation ;
— le torseur d'action mécanique de liaison ;
— les cas particuliers de symétrie.

3.1. LIAISON ENCASTREMENT

Définition

Considérons un repère $\mathcal{R}$ associé à la liaison des solides 1 et 2. On appelle liaison encastrement 1-2 toute liaison dont les degrés de liberté dans $\mathcal{R}$ sont nuls.

Forme des surfaces de liaison

Les surfaces de liaison sont quelconques.

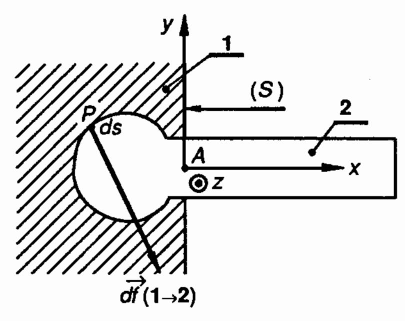


Fig. 1.6.

Paramétrage

Le repère local associé $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ n'a pas de position particulière, toutefois, quand il y a (et c'est le cas le plus souvent) une section plane de liaison (*S*), on choisit *A* au centre de cette surface et $(A, \vec{x})$ perpendiculaire à (*S*).

Schématisation normalisée

- Plane *(fig. 1.7 a)*.
- Perspective *(fig. 1.7 b)*.

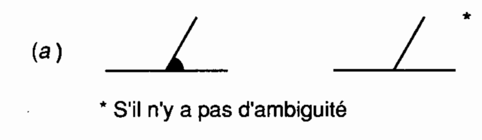


Fig. 1.7.

Torseur d'action mécanique de liaison

L'ensemble des $\overrightarrow{df}(1 \to 2)$, voir figure 1.6, est quelconque. Les densités surfaciques

$$\vec{\delta}(1 \to 2) = \frac{\overrightarrow{df}(1 \to 2)}{ds}$$

ne sont, en général, pas connues. On peut exprimer en *A* les éléments de réduction du torseur d'action mécanique de liaison :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \end{Bmatrix}.$$

Dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on peut écrire :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(1 \to 2) & L(1 \to 2) \\ Y(1 \to 2) & M(1 \to 2) \\ Z(1 \to 2) & N(1 \to 2) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

Le torseur d'action mécanique de liaison en *A* comporte donc six inconnues algébriques dans $\mathcal{R}$. Notons que la connaissance de ces six inconnues ne nous renseigne en rien sur la répartition de la densité surfacique $\vec{\delta}(1 \to 2)$.
La forme particulière de ce torseur est conservée en tout point de l'espace.

Cas particulier

Si le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$, par exemple, est plan de symétrie aussi bien pour les surfaces de liaison que pour le système des forces extérieures appliquées à 2, alors les $\overrightarrow{df}(1 \to 2)$ sont réparties symétriquement par rapport à ce plan et :

$\vec{A}(1 \to 2)$ est parallèle à ce plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$

$\vec{M}_A(1 \to 2)$ est porté par $(A, \vec{z})$.

Alors, dans le repère local $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on obtient pour les composantes du torseur d'action mécanique de liaison :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(1 \to 2) & 0 \\ Y(1 \to 2) & 0 \\ 0 & N(1 \to 2) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

La forme particulière de ce torseur n'est conservée que pour tout point $\in (A, \vec{x}, \vec{y})$.

3.2. LIAISON PIVOT

Définition

Considérons un repère $\mathcal{R}$ associé à la liaison des solides 1 et 2. On appelle liaison pivot 1-2 toute liaison dont le degré de liberté dans $\mathcal{R}$ est : R_x *(fig. 1.8).*

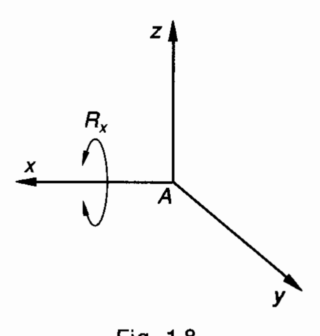


Fig. 1.8.

Exemple de surfaces de liaison directe

Soient deux surfaces de révolution, non cylindriques en contact. Le repère local $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ associé à

cette liaison **1-2** est tel que $(A, \vec{x})$ soit confondu avec l'axe de révolution de ces surfaces *(fig. 1.9)*.

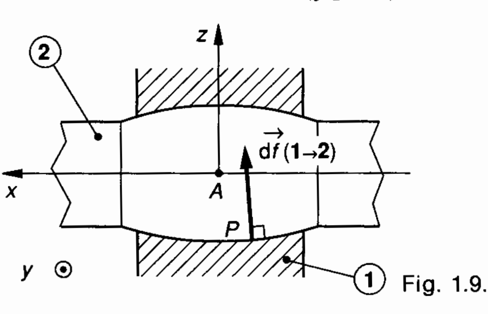


Fig. 1.9.

Paramétrage

Supposons que $\mathcal{R}$ soit lié à **1** ; définissons $\mathcal{R}_2$ lié à **2** tel que son origine soit confondue avec A et que $\vec{x}_2 = \vec{x}$ *(fig. 1.10)*. L'angle orienté $\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_2)$ permet de définir la position de $\mathcal{R}_2/\mathcal{R}$ et donc de 2/1.

Fig. 1.10.

Schématisation normalisée

- Plane *(fig. 1.11 a)*.
- Perspective *(fig. 1.11 b)*.

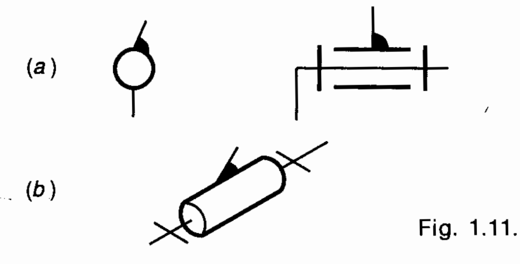


Fig. 1.11.

Torseur d'action mécanique de liaison

Les $\overrightarrow{df}(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$ sont sécantes avec l'axe $(A, \vec{x})$ où $/\!/$ à $\vec{x}$, voir *figure 1.9 ;* leur moment par rapport à $(A, \vec{x})$ est donc nul. Par conséquent, la résultante $\vec{A}(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$ est quelconque et le moment résultant en A, $\vec{M}_A(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$ est perpendiculaire à $\vec{x}$

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \end{Bmatrix} \text{avec } \vec{M}_A(\mathbf{1} \to \mathbf{2}) \perp \vec{x}.$$

Dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on peut écrire :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(1 \to 2) & 0 \\ Y(1 \to 2) & M(1 \to 2) \\ Z(1 \to 2) & N(1 \to 2) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

Le torseur d'action mécanique de liaison en A comporte donc 5 inconnues algébriques dans $\mathcal{R}$.
La forme particulière de ce torseur est conservée en tout point de $(A, \vec{x})$.

Cas particulier

Si le plan $(A, \vec{y}, \vec{z})$, voir *figure 1.9,* est plan de symétrie aussi bien pour les surfaces de liaison que pour le système des forces extérieures appliquées à 2, alors les $\overrightarrow{df}(1 \to 2)$ sont réparties symétriquement par rapport à ce plan et :

$$\vec{A}(\mathbf{1} \to \mathbf{2}) \perp \vec{x}$$
$$\vec{M}_A(\mathbf{1} \to \mathbf{2}) = \vec{0}$$

Alors, dans le repère local $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on obtient pour les composantes du torseur d'action mécanique de liaison :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y(1 \to 2) & 0 \\ Z(1 \to 2) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

La forme particulière de ce torseur n'est conservée qu'au point A.

3.3. LIAISON GLISSIÈRE

Définition

Considérons un repère $\mathcal{R}$ associé à la liaison des solides 1 et 2. On appelle liaison glissère 1-2 toute liaison dont le degré de liberté dans $\mathcal{R}$ est : T_x *(fig. 1.12)*.

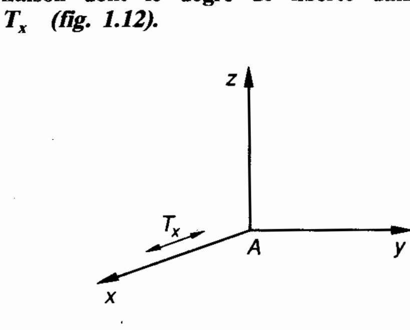


Fig. 1.12.

Exemple de surfaces de liaison directe

Soient deux surfaces cylindriques, non de révolution, en contact. (Surfaces engendrées par une droite

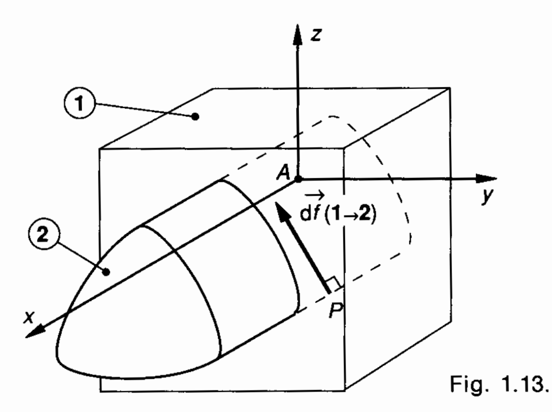


Fig. 1.13.

génératrice qui s'appuie sur une courbe quelconque *(fig. 1.13)*.
L'axe $(A, \vec{x})$ de $\mathcal{R}$ est parallèle aux génératrices.

Paramétrage

Le repère local associé $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est tel que $(A, \vec{x})$ soit parallèle à une génératrice de la surface cylindrique. Supposons que $\mathcal{R}$ soit lié à **1**, définissons $\mathcal{R}_2$ d'origine B lié à 2 tel que $B \in (A, \vec{x})$ et que $\vec{x}_2 = \vec{x}$, $\vec{y}_2 = \vec{y}$ et $\vec{z}_2 = \vec{z}$ *(fig. 1.12)*. L'abscisse x_B de l'origine B de $\mathcal{R}_2$ permet de définir la position de $\mathcal{R}_2/\mathcal{R}$ et donc de 2/1.

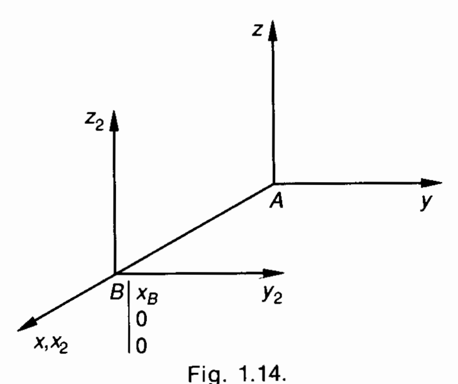


Fig. 1.14.

Schématisation normalisée

- Plane *(fig. 1.15 a)*.
- Perspective *(fig. 1.15 b)*.

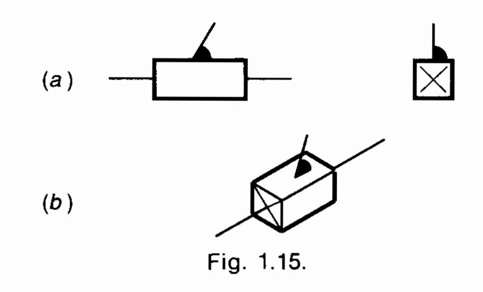


Fig. 1.15.

Torseur d'action mécanique de liaison

En tout point P de la surface de contact, voir figure 1.13, les $\vec{df}(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$ sont perpendiculaires à la génératrice. Par conséquent, la résultante $\vec{A}(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$ est perpendiculaire $\vec{x}$ et le moment résultant en A : $\vec{M}_A(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$ est quelconque.

$$\{\mathcal{T}(\mathbf{1} \to \mathbf{2})\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \end{Bmatrix} \text{avec } \vec{A}(1 \to 2) \perp \vec{x}.$$

Dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on peut écrire :

$$\{\mathcal{T}(\mathbf{1} \to \mathbf{2})\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & L(1 \to 2) \\ Y(1 \to 2) & M(1 \to 2) \\ Z(1 \to 2) & N(1 \to 2) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

Le torseur d'action mécanique de liaison en A comporte donc cinq inconnues algébriques dans $\mathcal{R}$.
La forme particulière de ce torseur est conservée pour tout point de l'espace.

Cas particulier

Si le plan $(A, \vec{x}, \vec{z})$, voir *figure 1.13*, est plan de symétrie aussi bien pour les surfaces de liaison que pour le système des forces extérieures appliquées à 2, alors les $\vec{df}(1 \to 2)$, qui sont déjà perpendiculaires à $\vec{x}$, sont réparties symétriquement par rapport à ce plan et :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{A}(1 \to 2) \text{ est parallèle à } (A, \vec{z}) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \text{ est porté par } (A, \vec{y}) \end{array} \right.$$

Dans le repère local $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on obtient pour les composantes du torseur d'action mécanique de liaison :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M(1 \to 2) \\ Z(1 \to 2) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

La forme particulière de ce torseur n'est conservée que pour tout point du plan $(A, \vec{x}, \vec{z})$.

3.4. LIAISON HÉLICOÏDALE

Définition

Considérons un repère $\mathcal{R}$ associé à la liaison des solides 1 et 2. On appelle liaison hélicoïdale 1-2 toute liaison dont les degrés de liberté dans $\mathcal{R}$ sont T_x et R_x tels que $T_x = kR_x$ *(fig. 1.16)*.

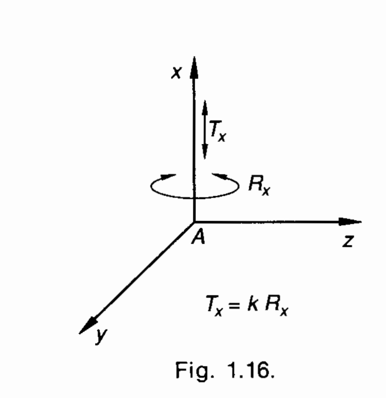
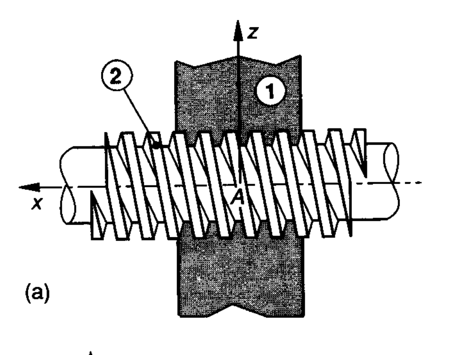


Fig. 1.16.

Exemple de surfaces de liaison directe

Soient deux surfaces hélicoïdales en contact. Le repère $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ associé à cette liaison est tel que $(A, \vec{x})$ soit porté par l'axe des hélicoïdes conjugués.



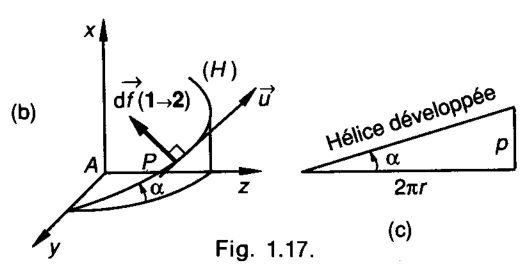


Fig. 1.17.

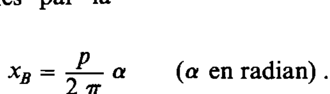
Paramétrage

Supposons que $\mathfrak{R}$ soit lié à **1** ; définissons $\mathfrak{R}_2$ lié à **2** tel que son origine B soit portée par $(A, \vec{x})$ et que $\vec{x}_2 = \vec{x}$.
Soit α l'angle orienté :

$$\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_2)$$

(fig. 1.18).
L'abscisse x_B de l'origine B et l'angle orienté α suffisent pour définir la position de $\mathfrak{R}_2/\mathfrak{R}$ et donc de 2/1. x_B et α sont liés par la relation :

Fig. 1.18.



$$x_B = \frac{p}{2\pi}\alpha \qquad (\alpha \text{ en radian}).$$

Schématisation normalisée

- Plane *(fig. 1.19 a)*.
- Perspective *(fig. 1.19 b)*.

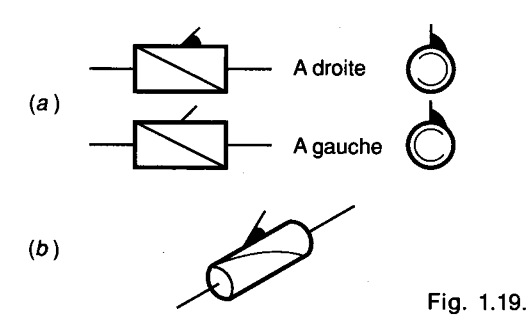


Fig. 1.19.

Torseur d'action mécanique de liaison

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tangent en P à l'hélice (H) **(voir** *fig. 1.17 et 1.18*). L'action élémentaire de contact en P : $\overrightarrow{df}(1 \to 2)$ est perpendiculaire à $\vec{u}$:

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \end{Bmatrix}.$$

Dans $\mathfrak{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on peut écrire :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(1 \to 2) & L(1 \to 2) \\ Y(1 \to 2) & M(1 \to 2) \\ Z(1 \to 2) & N(1 \to 2) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

avec $X(1 \to 2) = k \, . \, L(1 \to 2)$. Compte tenu de la relation entre $X(1 \to 2)$ et $L(1 \to 2)$, ce torseur de liaison en A comporte cinq inconnues algébriques indépendantes dans $\mathfrak{R}$.
La forme particulière de ce torseur est conservée en tout point de $(A, \vec{x})$.

3.5. LIAISON PIVOT GLISSANT

Définition

Considérons un repère $\mathfrak{R}$ associé à la liaison des solides 1 et 2. On appelle liaison pivot glissant 1-2 toute liaison dont les degrés de liberté dans $\mathfrak{R}$ sont T_x et R_x ***(fig. 1.20).***

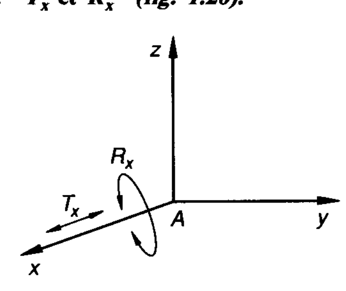


Fig. 1.20.

Exemple de surfaces de liaison directe

Soient deux surfaces cylindriques de révolution en contact. Le repère local $\mathfrak{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ associé à cette liaison 1-2 est tel que :
L'axe $(A, \vec{x})$ est porté par l'axe de ces surfaces *(fig. 1.21)*.

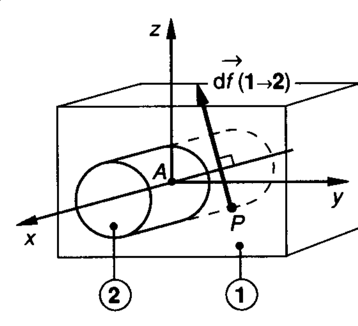


Fig. 1.21.

Paramétrage

Supposons que $\mathcal{R}$ soit lié à **1** ; définissons $\mathcal{R}_2$ lié à **2** tel que son origine $B \in (A, \vec{x})$ et que $\vec{x}_2 = \vec{x}$ *(fig. 1.22)*.
Soit α l'angle orienté : $\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_2)$.
L'abscisse x_B de l'origine B de $\mathcal{R}_2$ et l'angle α permettent de définir la position de $\mathcal{R}_2/\mathcal{R}$ et donc de 2/1.

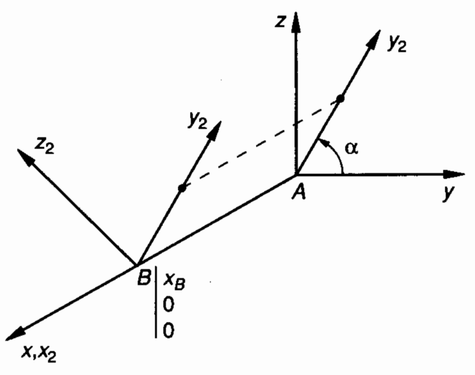


Fig. 1.22.

Schématisation normalisée

- Plane *(fig. 1.23 a)*.
- Perspective *(fig. 1.23 b)*.

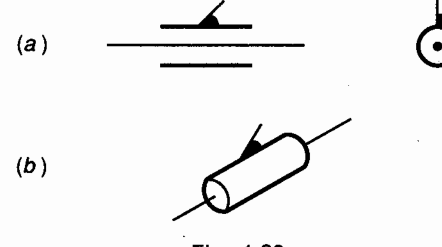


Fig. 1.23.

Torseur d'action mécanique de liaison

En tout point P de la surface de contact (voir *fig. 1.21*) le support de $\overrightarrow{df}(1 \to 2)$ coupe perpendiculairement l'axe $(A, \vec{x})$. Par conséquent, la résultante $\vec{A}(1 \to 2)$ est perpendiculaire à $\vec{x}$ et le moment résultant en A : $\vec{M}_A(1 \to 2)$ a une composante nulle suivant $\vec{x}$.

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \end{Bmatrix}$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} \vec{A}(1 \to 2) \perp \vec{x} \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \perp \vec{x}\,. \end{array} \right.$$

Dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on peut écrire :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y(1 \to 2) & M(1 \to 2) \\ Z(1 \to 2) & N(1 \to 2) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

Le torseur d'action mécanique de liaison en A comporte donc 4 inconnues algébriques dans $\mathcal{R}$.
La forme particulière de ce torseur est conservée pour tout point de $(A, \vec{x})$.

Cas particulier

Si le plan $(A, \vec{y}, \vec{z})$ (voir *fig. 1.21*) est plan de symétrie aussi bien pour les surfaces de liaison que pour le système des forces extérieures appliquées à **2**, alors $\vec{A}(1 \to 2)$ est parallèle à ce plan et $\vec{M}_A(1 \to 2)$ est nul.

$$\left| \begin{array}{l} \vec{A}(1 \to 2) \perp \vec{x} \\ \vec{M}_A(1 \to 2) = \vec{0}\,. \end{array} \right.$$

Dans le repère local $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on obtient pour les composantes du torseur d'action mécanique de liaison :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y(1 \to 2) & 0 \\ Z(1 \to 2) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

La forme particulière de ce torseur n'est conservée qu'au point A.

3.6. LIAISON SPHÉRIQUE A DOIGT

Définition

Considérons un repère $\mathcal{R}$ associé à la liaison des solides 1 et 2. On appelle liaison sphérique à doigt 1-2 toute liaison dont les degrés de liberté dans $\mathcal{R}$ sont : R_x et R_y *(fig. 1.24)*.

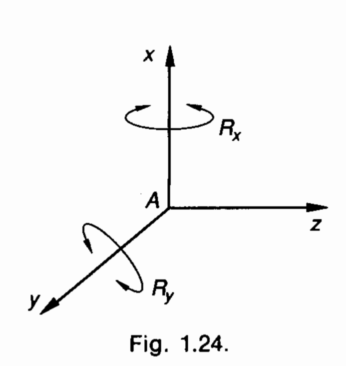


Fig. 1.24.

Exemple de surfaces de liaison

Soient deux surfaces sphériques de même centre O et de même rayon. Complétons la sphère pleine **1** par un ergot cylindrique radial et la sphère creuse **2** par une rainure complémentaire dont le plan moyen contient le centre O *(fig. 1.25)*.

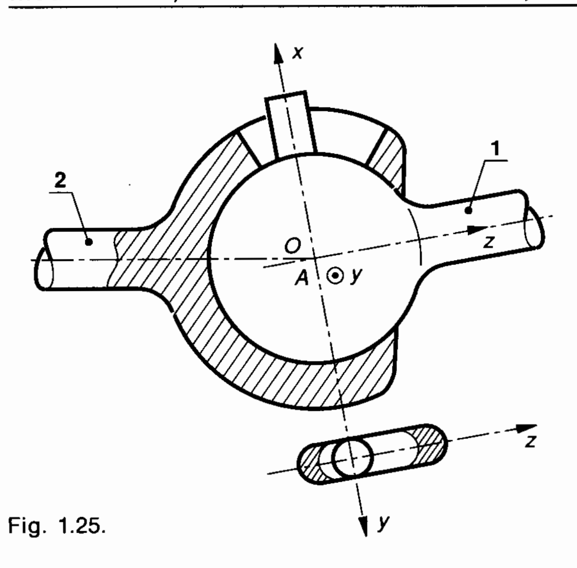


Fig. 1.25.

Paramétrage

Soit $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère local associé à la liaison 1-2.
Soit $\mathcal{R}_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère lié à **1**.
Soit $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère lié à **2**.
Les origines A de ces trois repères sont confondues avec les centres O des surfaces sphériques de liaison.
Posons $\vec{x}_1 = \vec{x}$ et $\vec{y}_2 = \vec{y}$ *(fig. 1.26)*.
Les deux angles orientés $\alpha_1 = (\vec{y}, \vec{y}_1)$ et $\alpha_2 = (\vec{z}, \vec{z}_2)$ permettent de définir les positions relatives de la façon suivante :

$\alpha_1 = (\vec{y}, \vec{y}_1)$ et $\vec{x}_1 = \vec{x}$ donne la position de $\mathcal{R}_1/\mathcal{R}$.
$\alpha_2 = (\vec{z}, \vec{z}_2)$ et $\vec{y}_2 = \vec{y}$ donne la position de $\mathcal{R}_2/\mathcal{R}$.
Donc α_1, α_2 avec $\vec{x}_1 = \vec{x}$ et $\vec{y}_2 = y$ permettent de définir la position de $\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1$ et donc de 2/1.

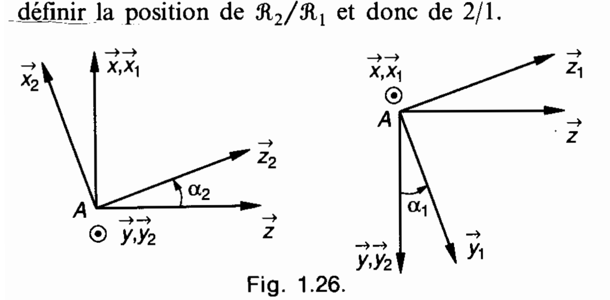


Fig. 1.26.

Schématisation normalisée

Plane et perspective *(fig. 1.27)*

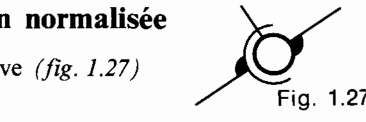


Fig. 1.27.

Torseur d'action mécanique de liaison

Soit $\mathcal{T}(1 \to 2)$ le torseur associé à la liaison sphérique à doigt 1-2. Exprimons ses éléments de réduction en A, centre de la liaison :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \end{Bmatrix}.$$

Compte tenu des degrés de liberté en rotation R_x et R_y, le moment résultant en A : $\vec{M}_A(1 \to 2)$ est porté par $(A, \vec{z})$. Dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on peut écrire :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(1 \to 2) & 0 \\ Y(1 \to 2) & 0 \\ Z(1 \to 2) & N(1 \to 2) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

Le torseur d'action mécanique de liaison en A comporte donc 4 inconnues algébriques dans $\mathcal{R}$.
La forme particulière de ce torseur n'est conservée qu'au point A.

3.7. LIAISON APPUI PLAN

Définition

Considérons un repère $\mathcal{R}$ associé à la liaison des solides 1 et 2. On appelle liaison appui plan 1-2 toute liaison dont les degrés de liberté dans $\mathcal{R}$ sont : R_x, T_y et T_z *(fig. 1.28)*.

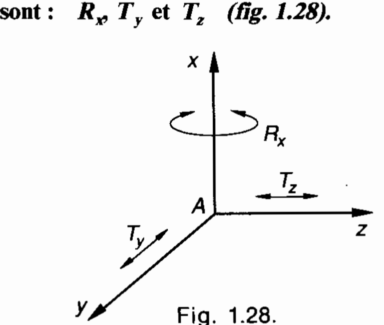


Fig. 1.28.

Exemple de surfaces de liaison directe

Soient deux surfaces planes en contact. Le repère local $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ associé à cette liaison 1-2 est tel que $(A, \vec{x})$ soit perpendiculaire au plan de contact (π) *(fig. 1.29)*.

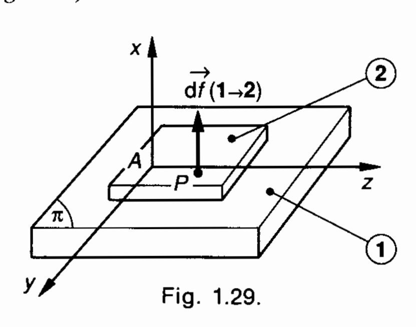


Fig. 1.29.

Paramétrage

Supposons que $\mathcal{R}$ soit lié à **1** ; définissons $\mathcal{R}_2$ lié à 2 tel que son origine $B \in (A, \vec{y}, \vec{z})$ et que $\vec{x}_2 = \vec{x}$ *(fig. 1.30)*.
Les coordonnées y_B et z_B de l'origine B dans $\mathcal{R}$ ainsi que l'angle orienté $\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_2)$ permettent de définir la position de $\mathcal{R}_2/\mathcal{R}$ et donc de 2/1.

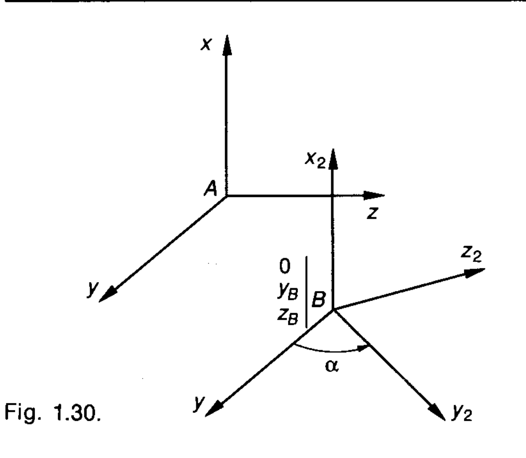


Fig. 1.30.

Schématisation normalisée

- Plane *(fig. 1.31 a)*.
- Perspective *(fig. 1.31 b)*.

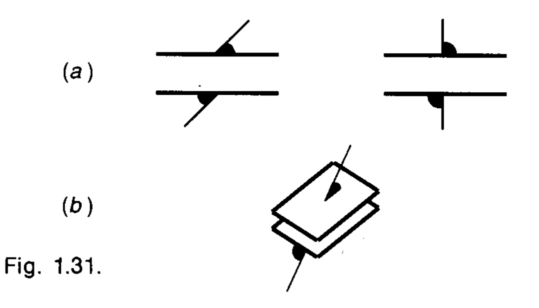


Fig. 1.31.

Torseur d'action mécanique de liaison

En tout point P de la surface plane de liaison (voir *fig. 1.29*), $\vec{df}(1 \to 2)$ est parallèle à $(A, \vec{x})$. Par conséquent, la résultante $\vec{A}(1 \to 2)$ est parallèle à $(A, \vec{x})$ et le moment résultant en A : $\vec{M}_A(1 \to 2)$ est perpendiculaire à $(A, \vec{x})$.

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \end{Bmatrix}$$

avec $\left| \begin{array}{l} \vec{A}(1 \to 2) /\!/ \vec{x} \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \perp (A, \vec{x}) \end{array} \right.$

Dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on peut écrire :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(1 \to 2) & 0 \\ 0 & M(1 \to 2) \\ 0 & N(1 \to 2) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

Le torseur d'action mécanique de liaison en A comporte donc 3 inconnues algébriques dans $\mathcal{R}$.
La forme particulière de ce torseur est conservée pour tout point de l'espace.

Cas particulier

Si le plan $(A, \vec{x}, \vec{z})$ est plan de symétrie, aussi bien pour les surfaces de liaison que pour le système des forces extérieures appliquées à **2** (voir *fig. 1.29*), alors les $\vec{df}(1 \to 2)$ sont réparties symétriquement par rapport à ce plan et le moment résultant en A : $\vec{M}_A(1 \to 2)$ est porté par $(A, \vec{y})$ et :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{A}(1 \to 2) /\!/ \vec{x} \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \text{ porté par } (A, \vec{y}). \end{array} \right.$$

Dans le repère local $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on obtient pour les composantes du torseur d'action mécanique de liaison :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(1 \to 2) & 0 \\ 0 & M(1 \to 2) \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

Il existe un point J particulier du plan (π) pour lequel $\vec{M}_J(1 \to 2) = \vec{0}$.
La forme particulière de ce torseur est conservée pour tout point de $(\vec{A}, \vec{x}, \vec{z})$.

3.8. LIAISON SPHÉRIQUE (OU ROTULE)

Définition

Considérons un repère associé à la liaison des solides 1 et 2. On appelle liaison sphérique 1-2 toute liaison dont les degrés de liberté dans $\mathcal{R}$ sont : *R_x, R_y et R_z* *(fig. 1.32).*

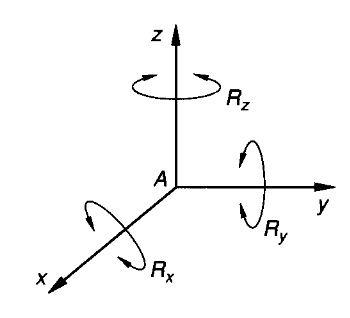


Fig. 1.32.

Exemple de surfaces de liaison directe

Soient deux surfaces sphériques de même centre O et de même rayon. L'origine A du repère local $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ associé à la liaison est confondue avec le centre O de la sphère de contact *(fig. 1.33)*.

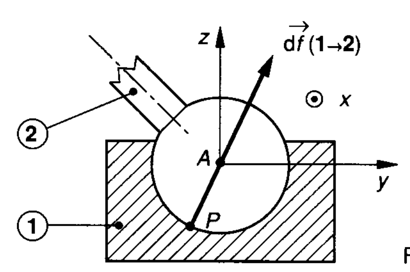


Fig. 1.33.

Paramétrage

Le paramétrage de cette liaison fait intervenir les trois paramètres indépendants, ψ, θ, φ qui sont les angles d'Euler. Nous n'aurons pas à les utiliser dans le cadre de cet ouvrage.

Schématisation normalisée

Plane et perspective *(fig. 1.34)*.

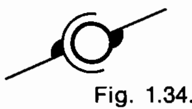


Fig. 1.34.

Torseur d'action mécanique de liaison

En tout point P de la surface sphérique de liaison, (voir *fig. 1.33*), $\overrightarrow{df}(1 \rightarrow 2)$ passe par A. Par conséquent la résultante $\vec{A}(1 \rightarrow 2)$ est quelconque et le moment résultant en A : $\vec{M}_A(1 \rightarrow 2)$ est nul.

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) \end{Bmatrix}$$

avec $\vec{M}_A(1 \rightarrow 2) = \vec{0}$.

Dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on peut écrire :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(1 \rightarrow 2) & 0 \\ Y(1 \rightarrow 2) & 0 \\ Z(1 \rightarrow 2) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

Le torseur d'action mécanique de liaison en A comporte donc 3 inconnues algébriques dans $\mathcal{R}$.
La forme particulière de ce torseur n'est conservée qu'au point A.

Cas particulier

Si le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est plan de symétrie, aussi bien pour les surfaces de liaison que pour le système des forces extérieures appliquées à **2**, alors les $\overrightarrow{df}(1 \rightarrow 2)$ sont réparties symétriquement par rapport à ce plan et la résultante $\vec{A}(1 \rightarrow 2)$ est parallèle à $(A, \vec{x}, \vec{y})$.

$$\vec{A}(1 \rightarrow 2) \perp \vec{z}.$$

Dans le repère local $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on obtient pour les composantes du torseur d'action mécanique de liaison :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(1 \rightarrow 2) & 0 \\ Y(1 \rightarrow 2) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

3.9. LIAISON LINÉIQUE RECTILIGNE

Définition

Considérons un repère associé à la liaison des solides 1 et 2. On appelle liaison linéique rectiligne 1-2 toute liaison dont les degrés de liberté dans $\mathcal{R}$ sont R_x, R_y, T_y et T_z *(fig. 1.35)*.

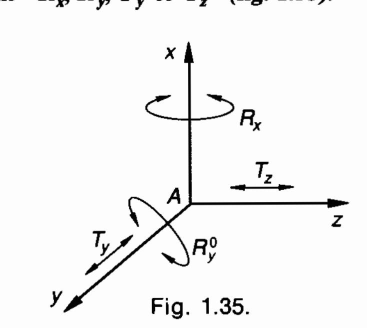


Fig. 1.35.

Exemple de surfaces de liaison directe

Soient deux surfaces en contact suivant une droite (Δ) qui reste située dans un plan tangent commun (π). Par exemple : contact théorique entre une surface cylindrique et une surface plane *(fig. 1.36)*.
L'origine A du repère $\mathcal{R}$ est au milieu du segment de contact appartenant à (Δ).

$(A, \vec{x})$ est perpendiculaire à (π).
$(A, \vec{y})$ est porté par (Δ).

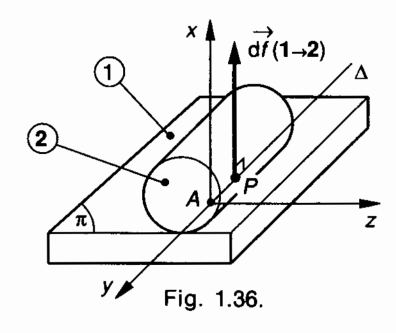


Fig. 1.36.

Paramétrage

Supposons que $\mathcal{R}$ soit lié à 1 ; définissons $\mathcal{R}_2$ lié à **2** tel que son origine $B \in (A, \vec{y}, \vec{z})$. Une rotation d'angle orienté $\alpha_1 = (\vec{y}, \vec{y}_2)$ autour de $(B, \vec{x})$ permet de définir $(B, \vec{y}_2) \in (\pi)$. Une rotation d'angle orienté $\alpha_2 = (\vec{z}, \vec{z}_2)$ autour de $(B, \vec{y})$ permet de définir $\vec{z}_2$ *(fig. 1.37)*.

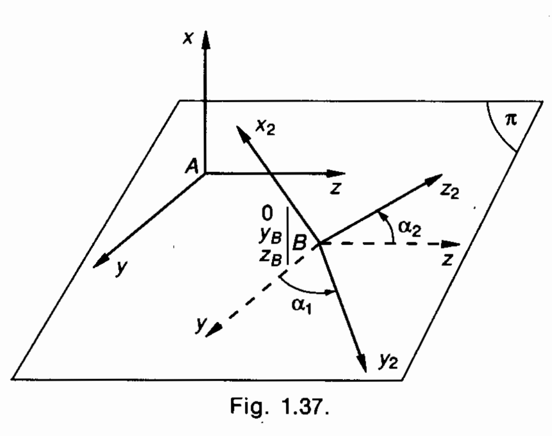


Fig. 1.37.

Les coordonnées y_B, z_B de l'origine B dans $\mathcal{R}$ ainsi que les deux angles orientés α_1 et α_2 permettent de définir la position de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}$ et donc de 2/1. Notons que la position de la génératrice de contact est donnée par $(B, \vec{y}_2)$.

Schématisation normalisée

- Plane *(fig. 1.38 a)*.
- Perspective *(fig. 1.38 b)*.

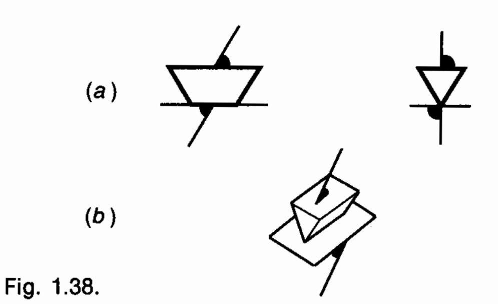


Fig. 1.38.

Torseur d'action mécanique de liaison

En tout point P du segment de contact porté par (Δ), (voir *fig. 1.36*), $\vec{df}(1 \to 2)$ est située dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ et est parallèle à $(A, \vec{x})$. Par conséquent, la résultante $\vec{A}(1 \to 2)$ est parallèle à $(A, \vec{x})$ et le moment résultant en A : $\vec{M}_A(1 \to 2)$ est porté par $(A, \vec{z})$.

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \end{Bmatrix}$$

avec $\left| \begin{array}{l} \vec{A}(1 \to 2) /\!/ \vec{x} \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \text{ porté par } (A, \vec{z}) . \end{array} \right.$

Dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on peut écrire :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(1 \to 2) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N(1 \to 2) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

Le torseur d'action mécanique de liaison en A comporte donc 2 inconnues algébriques dans $\mathcal{R}$.
La forme particulière de ce torseur est conservée pour tout point de $(A, \vec{x}, \vec{y})$.

Cas particulier

Si le plan $(A, \vec{x}, \vec{z})$ est plan de symétrie, aussi bien pour les surfaces de liaison que pour le système des forces extérieures appliquées à **2** (voir *fig. 1.36*), alors $\vec{M}_A(1 \to 2)$ est nul et :

$\left| \begin{array}{l} \vec{A}(1 \to 2) /\!/ \vec{x} \\ \vec{M}_A(1 \to 2) = \vec{0} . \end{array} \right.$

Dans le repère local $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on obtient pour les composantes du torseur d'action mécanique de liaison :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(1 \to 2) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

La forme particulière de ce torseur n'est conservée que pour tout point de $(A, \vec{x})$.

3.10. LIAISON LINÉIQUE CIRCULAIRE (OU LINÉAIRE ANNULAIRE)

Définition

Considérons un repère associé à la liaison des solides 1 et 2. On appelle liaison linéïque circulaire 1-2 toute liaison dont les degrés de liberté dans $\mathcal{R}$ sont : T_x, R_x, R_y et R_z *(fig. 1.39)*.

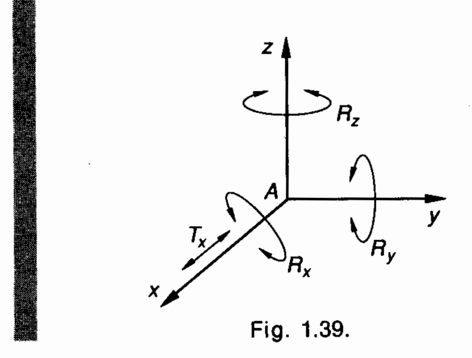


Fig. 1.39.

Exemple de surfaces de liaison directe

Soient deux surfaces en contact suivant un arc de cercle. Par exemple, une surface cylindrique de révolution et une sphère de même rayon dont le centre décrit l'axe du cylindre *(fig. 1.40)*.
L'origine A du repère $\mathcal{R}$ est le centre de la sphère et $(A, \vec{x})$ est porté par l'axe du cylindre.

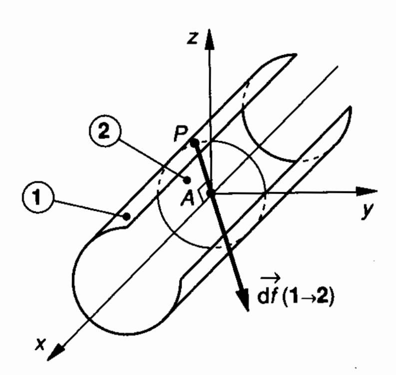
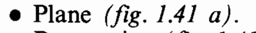


Fig. 1.40.

Paramétrage

Supposons que $\mathcal{R}$ soit lié à **1**, définissons $\mathcal{R}_2$ lié à **2**. L'origine B de $\mathcal{R}_2$ appartient à $(A, \vec{x})$ donc l'abscisse x_B de B dans $\mathcal{R}$ est un paramètre. Les trois autres paramètres qui définissent l'orientation de $\mathcal{R}_2/\mathcal{R}$ sont les trois angles d'Euler ψ, θ, φ. Nous n'aurons pas à les utiliser.

Schématisation normalisée



- Plane *(fig. 1.41 a)*.
- Perspective *(fig. 1.41 b)*.

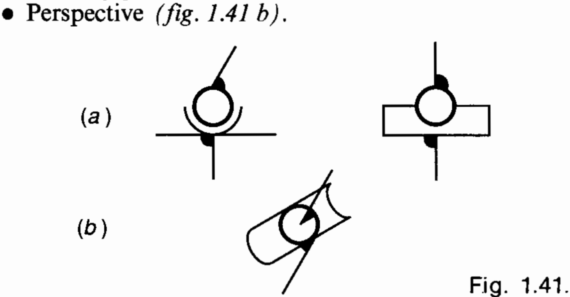


Fig. 1.41.

Torseur d'action mécanique de liaison

En tout point P de l'arc de cercle de contact, (voir *fig. 1.40*), $d\vec{f}(1 \to 2)$ passe par le centre A et est perpendiculaire à $(A, \vec{x})$. Par conséquent la résultante $\vec{A}(1 \to 2)$ est perpendiculaire à $(A, \vec{x})$ et le moment résultant en A : $\vec{M}_A(1 \to 2)$ est nul.

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \end{Bmatrix}$$

avec $\left| \begin{array}{l} \vec{A}(1 \to 2) \perp \vec{x} \\ \vec{M}_A(1 \to 2) = \vec{0} \end{array} \right.$.

Dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on peut écrire :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y(1 \to 2) & 0 \\ Z(1 \to 2) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

Le torseur d'action mécanique de liaison en A, comporte donc 2 inconnues algébriques dans $\mathcal{R}$.
La forme particulière de ce torseur n'est conservée que pour le point A.

3.11. LIAISON PONCTUELLE

Définition

Considérons un repère associé à la liaison des solides 1 et 2. On appelle liaison ponctuelle 1-2 toute liaison dont les degrés de liberté dans $\mathcal{R}$ sont R_x, R_y, T_y, R_z et T_z *(fig. 1.42)*.

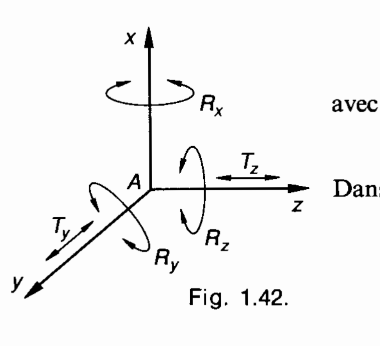


Fig. 1.42.

Exemple de surfaces de liaison directe

Soient deux surfaces qui admettent, théoriquement un seul point commun A et un plan tangent commun (π) au point de contact A. Par exemple, une bille sur un plan.
L'origine du repère associé $\mathcal{R}$ est le point de contact A et $(A, \vec{x})$ est la normale en A au plan (π) *(fig. 1.43)*.

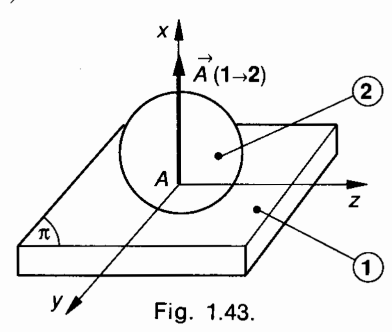


Fig. 1.43.

Paramétrage

Supposons que $\mathcal{R}$ soit lié à **1**, définissons $\mathcal{R}_2$ lié à **2**. L'origine B de $\mathcal{R}_2$ appartient au plan de contact $(A, \vec{y}, \vec{z})$. Les coordonnées y_B et z_B de B dans $\mathcal{R}$ sont des paramètres. Les trois autres paramètres qui définissent l'orientation de $\mathcal{R}_2/\mathcal{R}$ sont les trois angles d'Euler : ψ, θ, φ ; nous n'aurons pas à les utiliser.

Schématisation normalisée

- Plane *(fig. 1.44 a)*
- Perspective *(fig. 1.44 b)*

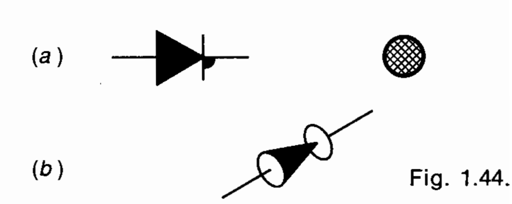


Fig. 1.44.

Torseur d'action mécanique de liaison

La force de contact de **1** sur **2** est localisée en A et, le contact se faisant sans adhérence, cette force est perpendiculaire à (π).

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \end{Bmatrix}$$

avec $\left| \begin{array}{l} \vec{A}(1 \to 2) /\!/ \vec{x} \\ \vec{M}_A(1 \to 2) = \vec{0}. \end{array} \right.$

Dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on peut écrire :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(1 \to 2) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

Le torseur d'action mécanique de liaison en A comporte donc une seule inconnue algébrique dans $\mathcal{R}$.
La forme particulière de ce torseur est conservée pour tout point de $(A, \vec{x})$.

4. MODÉLISATION DE QUELQUES LIAISONS RÉELLES

4.1. RAPPEL DES LOIS DE COULOMB SUR LE FROTTEMENT ET L'ADHÉRENCE

Considérons deux solides **1** et **2** en contact suivant une certaine surface (s), un point P de la surface de contact et $\overrightarrow{df}(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$ la force élémentaire de contact en P qu'exerce **1** sur **2**. Nous admettons l'existence en P d'un plan tangent commun (π) défini par sa normale $(P, \vec{n})$ *(fig. 1.45)*.

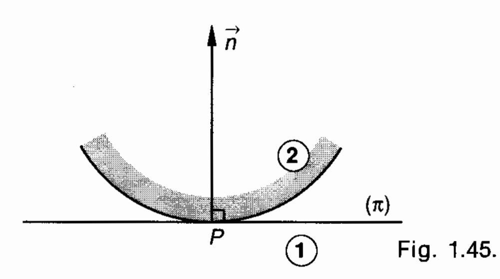


Fig. 1.45.

Définitions

— En P on dit qu'il y a adhérence s'il n'y a pas de mouvement relatif au point de contact entre 1 et 2, alors : $\vec{V}(P \in 2/1) = \vec{0}$.
— En P on dit qu'il y a frottement s'il y a mouvement relatif au point de contact entre 1 et 2, alors : $\vec{V}(P \in 2/1) \neq \vec{0}$.
— $\vec{V}(P \in 2/1)$ est appelé vecteur vitesse de glissement de 2 sur 1 au point P.

REMARQUE IMPORTANTE

$\vec{V}(P \in \mathbf{2}/\mathbf{1})$ est appelé improprement « vecteur » vitesse ; en fait il s'agit du représentant d'origine P du vecteur $\vec{V}(P \in \mathbf{2}/\mathbf{1})$ tel que $[P, \vec{V}(P \in \mathbf{2}/\mathbf{1})]$.
*Dans la suite de l'ouvrage, on se conformera à un usage très répandu et on continuera à désigner la vitesse du point P appartenant à **2** par rapport à **1** par le vecteur $\vec{V}(P \in \mathbf{2}/\mathbf{1})$.*
*L'étude que nous allons faire suppose que le support et le sens du vecteur vitesse de glissement de **2/1** en P est connu. Ce vecteur est dans le plan (π).*

4.1.1. 1er cas : $\vec{V}(P \in 2/1) \neq \vec{0}$

(fig. 1.46)

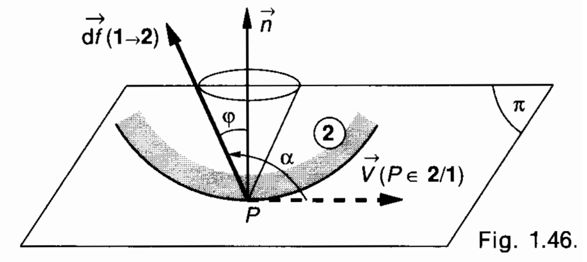


Fig. 1.46.

Il y a glissement relatif de **2** sur **1** en P.

Alors le support de la force élémentaire de contact, $[P, \overrightarrow{df}(\mathbf{1} \to \mathbf{2})]$ appartient au plan $[P, \vec{n}, \vec{V}(P \in \mathbf{2}/\mathbf{1})]$; ce support est incliné de l'angle φ par rapport à la normale $(P, \vec{n})$ au plan (π), du côté opposé à $\vec{V}(P \in \mathbf{2}/\mathbf{1})$ d'où :

$$\overrightarrow{df}(\mathbf{1} \to \mathbf{2}) \cdot \vec{V}(P \in \mathbf{2}/\mathbf{1}) < 0$$

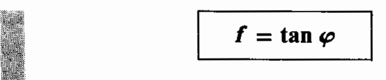
Nota : Le produit scalaire est négatif quand l'angle

$$\alpha = [\vec{V}(P \in \mathbf{2}/\mathbf{1}), \overrightarrow{df}(\mathbf{1} \to \mathbf{2})]$$

est compris entre $\pi/2$ et π. Ici : $\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi$.

L'angle φ caractérise la nature du contact en P des solides **1** et **2** ; il ne dépend que de la nature des matériaux et de l'état des deux surfaces en contact.

Définition



$$f = \tan \varphi$$

est appelé facteur de frottement.

Densités normale et tangentielle. Pression locale de contact

Effectuons la projection du vecteur densité de force $\vec{\delta}_P(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$ sur la normale $(P, \vec{n})$ au plan (π) et sur le plan (π) lui-même ; soit $(P, \vec{t})$ l'axe qui est le support de cette projection dans (π) *(fig. 1.47)*.

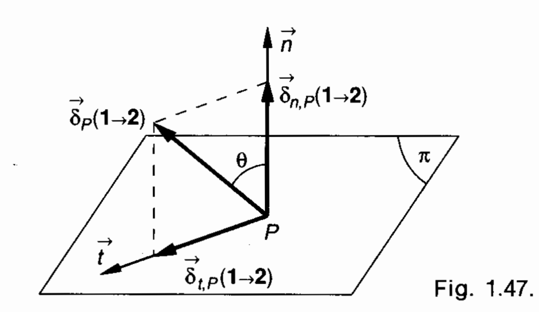


Fig. 1.47.

Définitions

$\vec{\delta}_{n,P}(1 \to 2)$ est appelée : densité normale de force en P.
$\vec{\delta}_{t,P}(1 \to 2)$ est appelée : densité tangentielle de force en P.
$\left\| \vec{\delta}_{n,P}(1 \to 2) \right\|$ est appelée : pression locale de contact en P.

Conséquence de la loi de Coulomb

Quand deux solides glissent l'un sur l'autre, le support de la force de contact $\overrightarrow{df}(1 \to 2)$ en P se trouve sur la surface d'un cône de sommet P d'axe $(P, \vec{n})$ de demi angle au sommet φ tel que $\tan \varphi = f$; ce cône est appelé **cône de frottement en P** *(fig. 1.48)*.

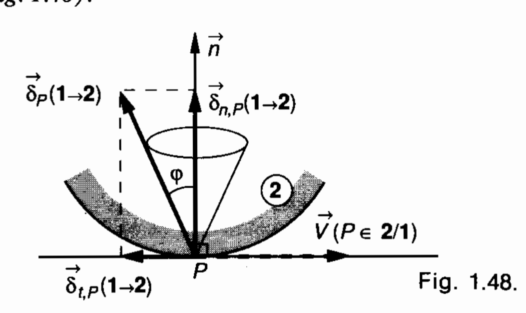


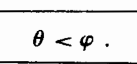
Fig. 1.48.

L'angle φ est appelé **angle de frottement.**
Notons alors que :

$$\left\| \vec{\delta}_{t,P}(1 \to 2) \right\| = f \left\| \vec{\delta}_{n,P}(1 \to 2) \right\|$$

4.1.2. 2e cas : $\vec{V}(P \in 2/1) = \vec{0}$ *(fig. 1.49)*

Il y a alors adhérence de **2** sur **1** en P.
Alors le support de la force élémentaire de contact $[P, \overrightarrow{df}(1 \to 2)]$ fait avec l'axe $(P, \vec{n})$ un angle θ inconnu mais tel que :



$$\theta < \varphi .$$

Dans ce cas, on sait seulement que le support de cette force se trouve à l'intérieur du cône de frottement.

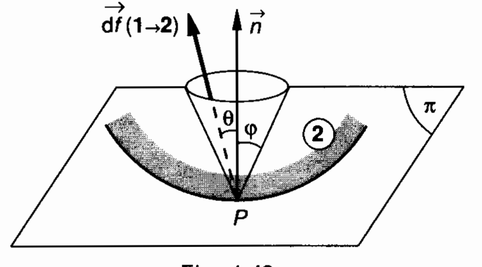


Fig. 1.49.

4.1.3. Cas particulier important

On considère habituellement le cas limite appelé « **cas de l'équilibre strict** » pour lequel il y a équilibre « limite » ou « tendance au mouvement ». Alors, $\theta = \varphi$ tel que $\tan \varphi = f$. En toute rigueur il faudra alors définir un angle φ_0 tel que $\tan \varphi_0 = f_0$; f_0 est alors appelé facteur d'adhérence. Comme $f_0 \approx f$, nous ne ferons pas cette distinction.
Il découle de notre étude que si $\vec{V}(P \in 2/1) = \vec{0}$ c'est-à-dire pour les deux cas :

— équilibre.
— équilibre strict.

$$\left\| \vec{\delta}_{t,P}(1 \to 2) \right\| \leq f \left\| \vec{\delta}_{n,P}(1 \to 2) \right\| \quad \textit{(fig. 1.50)}$$

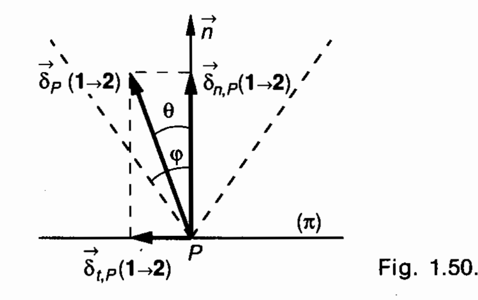


Fig. 1.50.

4.2. LIAISON APPUI PLAN RÉELLE A PLAN DE SYMÉTRIE *(fig. 1.51)*

Repère local associé

$\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que :
$(A, \vec{x}) =$ normale au plan de contact **1-2**.
$(A, \vec{x}, \vec{z}) =$ plan de symétrie de la liaison et des charges appliquées.

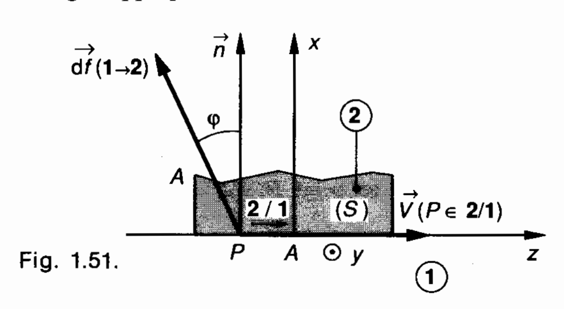


Fig. 1.51.

Hypothèses

Le facteur de frottement, $f = \tan \varphi$ est connu et on peut supposer que toutes les forces élémentaires $[P, \overrightarrow{df}(1 \to 2)]$ sont appliquées dans le plan de symétrie. Dans ce mouvement relatif de **2/1**, supposons connu le vecteur vitesse de glissement et supposons que quel que soit $P \in 2$, celui-ci puisse s'exprimer par :

$$\vec{V}(P \in 2/1) = \left\| \vec{V}(P \in 2/1) \right\| \vec{z} .$$

Force élémentaire de contact en P

Elle est inclinée par rapport à la normale $(P, \vec{n})$ de l'angle φ en sens contraire de $\vec{V}(P \in 2/1)$.

Torseur d'action de liaison

$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\}$ se définit ainsi, si (S) est la surface de liaison entre **1** et **2** :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{ll} \vec{A}(1 \to 2) & = \sum_{(S)} \vec{df}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) & = \sum_{(S)} [\overrightarrow{AP} \wedge \vec{df}(1 \to 2)] \end{array} \right\}_A .$$

La résultante $\vec{A}(1 \to 2)$ de toutes les forces élémentaires de contact $\vec{df}(1 \to 2)$ fait, elle aussi, un angle φ par rapport à la normale

$$\vec{A}(1 \to 2) = X(1 \to 2)\,\vec{x} + Z(1 \to 2)\,\vec{z}$$

avec $$\tan \varphi = \frac{|Z(1 \to 2)|}{|X(1 \to 2)|}$$

et $$\vec{V}(A \in 2/1) \cdot \vec{A}(1 \to 2) < 0 .$$

Le moment $\vec{M}_A(1 \to 2)$ est porté par l'axe $(A, \vec{y})$. On peut donc exprimer dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes des éléments de réduction en A du torseur $\{\mathcal{T}(1 \to 2)\}$ des actions de liaison :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{ll} X(1 \to 2) & 0 \\ 0 & M(1 \to 2) \\ Z(1 \to 2) & 0 \end{array} \right\}_{A\,(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

avec $\vec{V}(A \in 2/1) \cdot \vec{A}(1 \to 2) < 0$

$$\frac{Z(1 \to 2)}{X(1 \to 2)} = -f \quad \text{si } \vec{V}(A \in 2/1) \cdot \vec{z} > 0 ;$$

$$\frac{Z(1 \to 2)}{X(1 \to 2)} = f \quad \text{si } \vec{V}(A \in 2/1) \cdot \vec{z} < 0.$$

4.3. LIAISON PIVOT RÉELLE À PLAN DE SYMÉTRIE *(fig. 1.52)*

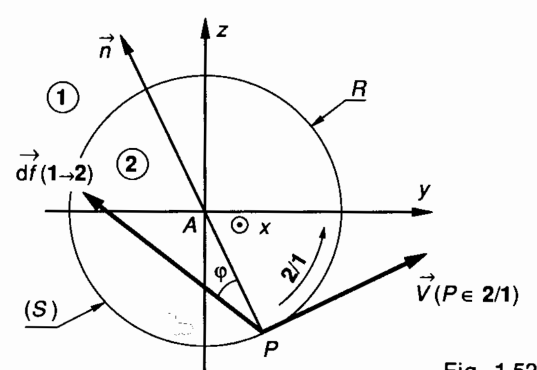


Fig. 1.52.

Repère local associé $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Tel que :

$(A, \vec{x})$ = axe de la liaison

$(A, \vec{y}, \vec{z})$ = plan de symétrie de la liaison et des charges appliquées.

Hypothèses

Le facteur de frottement $f = \tan \varphi$ est connu et on peut supposer que toutes les forces élémentaires $[P, \vec{df}(1 \to 2)]$ sont appliquées dans le plan de symétrie. Supposons connu, en un point P, de la surface de contact (S), situé dans le plan $(A, \vec{y}, \vec{z})$ le vecteur vitesse de glissement : $\vec{V}(P \in 2/1)$.

Force élémentaire de contact en P

Elle est inclinée sur la normale $(P, \vec{n})$ de l'angle φ en sens contraire de $\vec{V}(P \in 2/1)$.

Torseur d'action de liaison

$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\}$ se définit ainsi, si (S) est la surface de liaison entre **1** et **2** :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{ll} \vec{A}(1 \to 2) & = \sum_{(S)} \vec{df}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) & = \sum_{(S)} [\overrightarrow{AP} \wedge \vec{df}(1 \to 2)] \end{array} \right\}_A$$

La résultante $\vec{A}(1 \to 2)$ de toutes les forces élémentaires de contact est perpendiculaire à $(A, \vec{x})$.
Le moment $\vec{M}_A(1 \to 2)$ est porté par l'axe $(A, \vec{x})$ et son sens est opposé au sens de rotation de **2/1**. On peut donc exprimer dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes des éléments de réduction en A du torseur $\{\mathcal{T}(1 \to 2)\}$ des actions de liaisons :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & L(1 \to 2) \\ Y(1 \to 2) & 0 \\ Z(1 \to 2) & 0 \end{array} \right\}_{A\,(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

4.4. LIAISON GLISSIÈRE RÉELLE À PLAN DE SYMÉTRIE *(fig. 1.53)*

Repère local associé $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Tel que :

$(A, \vec{x})$ = axe de la liaison

$(A, \vec{x}, \vec{y})$ = plan de symétrie de la liaison et des charges appliquées.

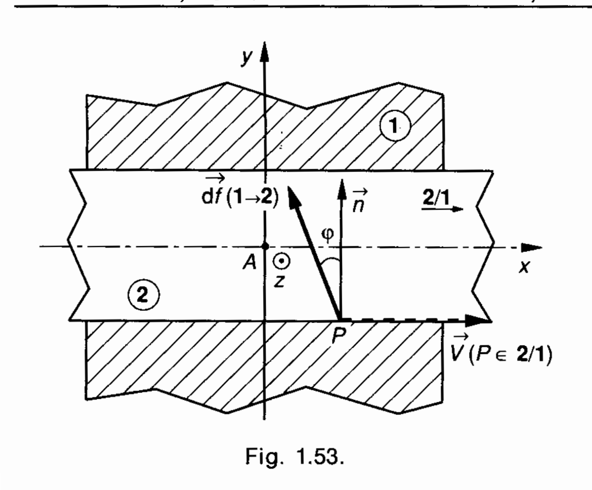


Fig. 1.53.

Hypothèses

Le facteur de frottement $f = \tan\varphi$ est connu et on peut supposer que toutes les forces élémentaires $[P, \overrightarrow{df}(1 \to 2)]$ sont appliquées dans le plan de symétrie.
Supposons connu le vecteur vitesse de glissement et supposons que quel que soit $P \in 2$, celui-ci puisse s'exprimer par :

$$\vec{V}(P \in 2/1) = \|\vec{V}(P \in 2/1)\| \cdot \vec{x}.$$

Force élémentaire de contact

En un point P de la surface de contact de **1** sur **2**, supposons connu le vecteur vitesse de glissement $\vec{V}(P \in 2/1)$. Alors, la force élémentaire $[P, \overrightarrow{df}(1 \to 2)]$ est inclinée, par rapport à la normale $(P, \vec{n})$, au contact d'un angle φ dans le sens opposé de $\vec{V}(P \in 2/1)$ *(fig. 1.53)*.

Torseur d'action de liaison

$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\}$ se définit ainsi, si (S) est la surface de liaison entre **1** et **2** :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\left\{\begin{array}{l} \vec{A}(1 \to 2) = \sum\limits_{(S)} \overrightarrow{df}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) = \sum\limits_{(S)} [\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{df}(1 \to 2)] \end{array}\right\}$$

La résultante $\vec{A}(1 \to 2)$ est perpendiculaire à $(A, \vec{z})$. Le moment $\vec{M}_A(1 \to 2)$ est porté par l'axe $(A, \vec{z})$. On peut donc exprimer dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes des éléments de réduction en A du torseur $\{\mathcal{T}(1 \to 2)\}$ des actions de liaison :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\left\{\begin{array}{ll} X(1 \to 2) & 0 \\ Y(1 \to 2) & 0 \\ 0 & N(1 \to 2) \end{array}\right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

4.5. LIAISON LINÉIQUE RECTILIGNE RÉELLE À PLAN DE SYMÉTRIE *(fig. 1.54)*

Repère local associé $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Tel que :

$(A, \vec{x})$ = normale au plan tangent commun au contact.
$(A, \vec{y})$ = porté par la droite de contact (Δ)
$(A, \vec{x}, \vec{z})$ = plan de symétrie de la liaison et des forces appliquées.

Hypothèses

Le facteur de frottement $f = \tan\varphi$ est connu. On peut supposer que toutes les forces élémentaires de contact $[P, \overrightarrow{df}(1 \to 2)]$ se ramènent dans le plan de symétrie et sont donc modélisables par une force unique $\vec{A}(1 \to 2)$ appliquée en A *(fig. 1.54)*.

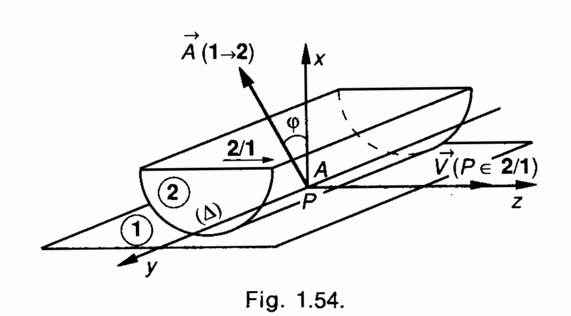


Fig. 1.54.

Dans le mouvement relatif de **2/1**, supposons connus les vecteurs vitesse de glissement des points $P \in (\Delta)$. Ceux-ci sont tels que :

$$\vec{V}(P \in 2/1) \text{ parallèle à } \vec{z}.$$

Force de contact

$\vec{A}(1 \to 2)$ est inclinée par rapport à la normale $(A, \vec{x})$ de l'angle φ en sens contraire de $\vec{V}(P \in 2/1)$. Le torseur d'action de liaison $\{\mathcal{T}(1 \to 2)\}$ se définit alors par :

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = {}_A\left\{\begin{array}{l} \vec{A}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) = \vec{0} \end{array}\right\}$$

tels que : $\left\{\begin{array}{l} \vec{V}(A \in 2/1) \cdot \vec{A}(1 \to 2) < 0 \\ |Z(1 \to 2)| = f\,|X(1 \to 2)| \end{array}\right.$.

On peut donc exprimer dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes des éléments de réduction en A du torseur $\{\mathcal{T}(1 \to 2)\}$:

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} X(1 \rightarrow 2) & 0 \\ 0 & 0 \\ Z(1 \rightarrow 2) & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

avec $\vec{V}(A \in 2/1) . \vec{A}(1 \rightarrow 2) < 0$

$$\frac{Z(1 \rightarrow 2)}{X(1 \rightarrow 2)} = -f \quad \text{si } \vec{V}(A \in 2/1) . \vec{z} > 0$$

$$\frac{Z(1 \rightarrow 2)}{X(1 \rightarrow 2)} = f \quad \text{si } \vec{V}(A \in 2/1) . \vec{z} < 0.$$

5. MODÉLISATION DE L'ACTION MÉCANIQUE DE PESANTEUR

5.1. CHAMP DE PESANTEUR

C'est l'action mécanique à distance, exercée par la Terre T sur un système matériel S. On a une perception visible de ce phénomène en abandonnant un solide à une certaine distance du sol : il *tombe*. Si l'on fractionne ce solide en un certain nombre d'éléments (ou fragments) et qu'on abandonne ceux-ci à une certaine distance du sol, on voit qu'ils *tombent* de la même manière et ceci, quelle que soit la petitesse de ces fragments.
On peut donc affirmer que l'action mécanique de pesanteur est répartie sur toutes les particules élémentaires S_i de S.

5.2. CENTRE DE GRAVITÉ D'UN SOLIDE INDÉFORMABLE *S*

Soit un solide (S) et un petit élément de (S) situé autour du point M. Notons $\vec{p}$ l'action mécanique élémentaire de pesanteur exercée par la Terre sur ce petit élément *(fig. 1.55)*.

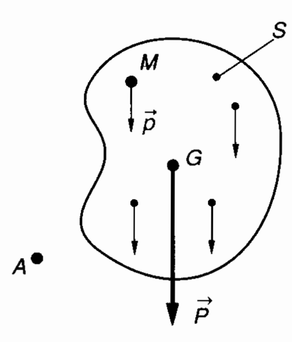


Fig. 1.55.

Supposons que (S) soit constitué de n petits éléments.
Nous noterons $\vec{P} = \sum_1^n \vec{p}$, **le poids de** (S).

Définition

On appelle centre de gravité du solide indéformable (S) le barycentre G de tous les éléments $(M, \|\vec{p}\|)$ qui constituent (S). Il se définit par conséquent par :

$$\sum_1^n (\|\vec{p}\| \, \overrightarrow{AM}) = \|\vec{P}\| \, \overrightarrow{AG} \quad (1)$$

Notons que si le point A est pris en G, la relation (1) prend la forme simplifiée (2) :

$$\sum_1^n (\|\vec{p}\| \, \overrightarrow{GM}) = \vec{0} \quad (2)$$

Sur un espace restreint, on peut admettre que l'action de la Terre, c'est-à-dire le champ de pesanteur, est uniforme ; on admettra alors que le centre de gravité et le centre de masse sont confondus. On les désignera indistinctement par G.

5.3. PROPRIÉTÉ DU CHAMP DE PESANTEUR

Considérons les éléments de réduction en un point A quelconque du torseur $\{\mathcal{T}(T \rightarrow S)\}$, associé aux actions mécaniques de la pesanteur sur le solide (S) :

$$\{\mathcal{T}(T \rightarrow S)\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}(T \rightarrow S) = \sum_1^n \vec{p} = \vec{P} \\ \vec{M}_A(T \rightarrow S) = \sum_1^n (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}) \end{Bmatrix}}.$$

Si nous avions choisi le centre de réduction du torseur $\{\mathcal{T}(T \rightarrow S)\}$ au centre de gravité G, nous aurions obtenu :

$$\{\mathcal{T}(T \rightarrow S)\} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} \vec{R}(T \rightarrow S) = \vec{P} \\ \vec{M}_G(T \rightarrow S) = \vec{0} \end{Bmatrix}}.$$

Ceci se démontre en remarquant que pour tout point M :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM} .$$

5.4. MODÉLISATION DU CHAMP DE PESANTEUR D'UNE POUTRE

5.4.1. Rappel d'hypothèses *(fig. 1.56)*

La poutre est homogène, rectiligne, horizontale et possède une section constante.

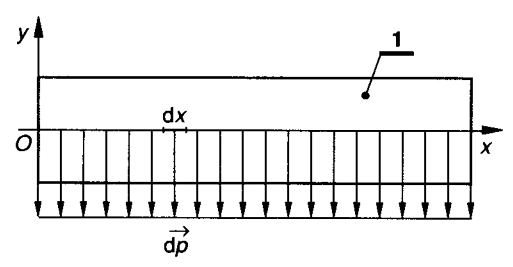


Fig. 1.56.

L'action de la pesanteur peut alors se modéliser par une charge uniformément répartie telle que, sur une longueur élémentaire dx de la ligne moyenne

$$\overrightarrow{dp} = \vec{\delta}\,(\text{pes} \rightarrow 1)\,dx$$

avec $\left\|\vec{\delta}\,(\text{pes} \rightarrow 1)\right\| = Cte.$

$\vec{\delta}\,(\text{pes} \rightarrow 1)$ est une densité linéique de force que les constructeurs de profilés indiquent dans leur catalogue sous la forme : (« **poids au mètre linéaire** »). Cette densité linéique s'exprime en newton par millimètre (par exemple) :

$$\vec{\delta}\,(\text{pes} \rightarrow 1) = -\left\|\vec{\delta}\,(\text{pes} \rightarrow 1)\right\|\,\vec{y} \qquad (fig.\ 1.56).$$

5.4.2. Modélisation

Cas particulier de la résistance des matériaux

En résistance des matériaux, la répartition des forces extérieures appliquées à la poutre conditionne les déformations locales et globales de celle-ci. On comprend bien par exemple que si une toiture supportant deux tonnes de neige de façon uniformément répartie (densité surfacique de force constante) résiste à cette charge, il est bien plus improbable qu'elle résiste de la même façon à une charge de deux tonnes localisée en son milieu !

Quand une charge répartie s'exerce sur une poutre, dont on cherche à calculer les contraintes ou les déformations, il n'est pas possible de considérer le torseur associé à cette charge et d'en prendre les éléments de réduction en un point quelconque.

Notons cependant que dans l'étude statique préliminaire au cours de laquelle la poutre est supposée indéformable, et qui conduit seulement à l'étude de l'équilibre de celle-ci, une charge répartie pourra continuer à se modéliser par un glisseur.

6. APPLICATION

BRIDE HYDRAULIQUE

La figure 1.57 représente une bride hydraulique pour montage d'usinage.

On donne la nomenclature de cet ensemble.

Fig. 1.57a.

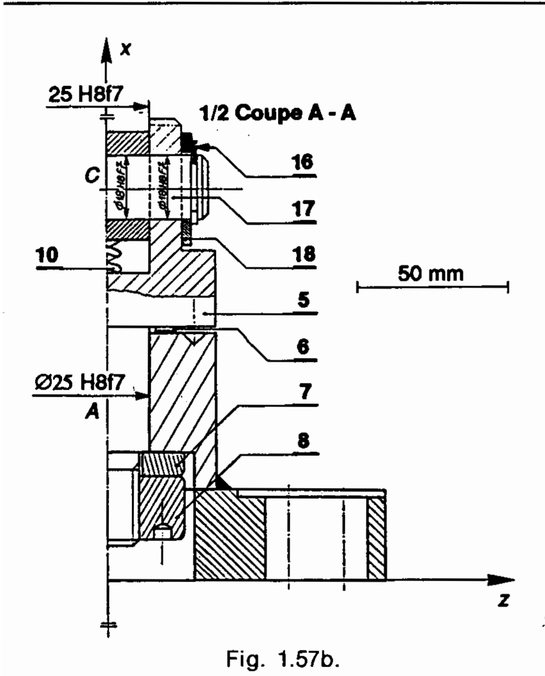


Fig. 1.57b.

Fonction principale
La bride permet d'exercer un effort de bridage sur une pièce *P* à usiner, ceci en vue de la rendre solidaire temporairement d'une table de machine-outil. L'organe moteur permettant d'assurer la force de bridage est un vérin hydraulique ; corps 1, piston 19, à rappel automatique par le ressort d'extension 20.

Fonction secondaire
Dans le but d'effectuer un changement rapide de la pièce *P* après usinage, l'espace autour de celle-ci peut être dégagé par rotation de 90 degrés de la bride 12. Le pied de positionnement 9 et les deux trous réalisés à 90 degrés dans la pièce 2 permettent d'assurer cette fonction.

But de l'étude
Analyser les différentes liaisons rencontrées dans ce mécanisme ; schématiser celui-ci et étudier quelques torseurs d'action mécanique de liaison.

Hypothèses
Certaines pièces ayant une fonction annexe ne sont pas prises en compte dans notre étude : 9, 11...

Rep	Nb	Désignation	Matière	Observations
1	1	Vérin hydraulique (corps)		Power Jacks-5000 daN
2	1	Semelle		
3	1	Rondelle plate M10U		Normalisée
4	1	Vis CHC-M10-30		Normalisée Longueur réduite à 12
5	1	Chape		
6	1	Rondelle ressort ondulée		Cribo-Ø 18
7	1	Rondelle plate		Hors norme
8	1	Ecrou spécial M18		Hors norme
9	1	Pied de positionnement		
10	1	Ressort cylindrique hélicoïdal		Vanel C-080-100-0320-A
11	1	Vis CB-M6-20		Normalisée Longueur réduite à 16
12	1	Bride		
13	1	Pion		
14	1	Vis à tête hexagonale bombée		Hors norme
15	1	Ecrou Hm-14		Normalisé
16	2	Anneau élastique 7102-18		Truarc « E »-7102-18
17	1	Axe		
18	2	Rondelle plate Z18U		Normalisée
19	1	Piston de vérin		
20	1	Ressort de traction		

On décide de regrouper en « classes d'équivalence » les pièces qui n'ont aucun mouvement relatif les unes par rapport aux autres. (Les pièces élastiques ne peuvent entrer dans une telle classification.) On rencontre ainsi :

Classe α : (1, 2, 3, 4)
Classe β : (5, 7, 8, 16, 17, 18)
Classe γ : (12, 13, 14, 15)
Classe δ : (19)
Classe P : (pièce à brider)

QUESTION 1

Identifier les liaisons suivantes et donner dans le repère défini sur la figure 1.57 les degrés de liberté qu'elles permettent :

$(\alpha - \beta)$; $(\alpha - \delta)$; $(\beta - \gamma)$; $(\gamma - \delta)$; $(\gamma - P)$.

Donner le schéma spacial du mécanisme.

RÉPONSE

Liaison $(\alpha - \beta)$: liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$; degré de liberté : R_x.
Liaison $(\alpha - \delta)$: liaison pivot glissant d'axe $(B, \vec{x})$; degrés de liberté : R_x, T_x.
Notons que si on admet, et c'est plausible, que le ressort 20 supprime la liberté en rotation alors $(\alpha - \delta)$ est une liaison glissière d'axe $(\beta, \vec{x})$.
Liaison $(\beta - \gamma)$: liaison pivot d'axe $(C, \vec{z})$; degré de liberté : R_z.
Liaison $(\gamma - \delta)$: liaison ponctuelle de normale $(D, \vec{x})$;
degrés de liberté : R_x, R_y, T_y, R_z, T_z.
Liaison $(\gamma - P)$: liaison ponctuelle de normale $(E, \vec{x})$;
degrés de liberté : R_x, R_y, T_y, R_z, T_z.
Schématisation spaciale du mécanisme *(fig. 1.58)*.

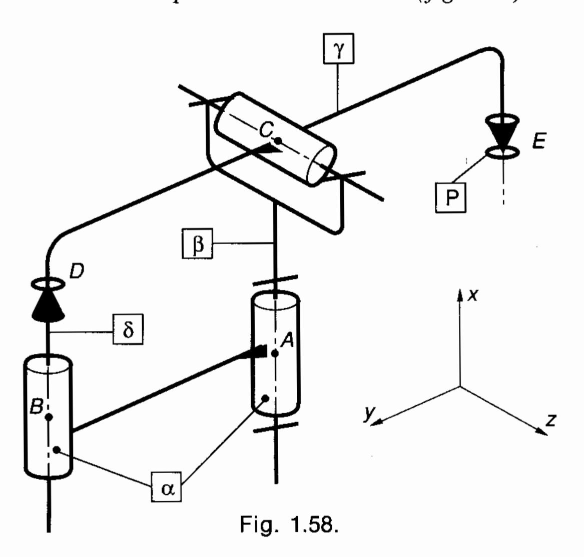


Fig. 1.58.

Hypothèse pour l'étude des liaisons
Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie, pour la géométrie des liaisons et pour les forces extérieures.

QUESTION 2

La liaison $(\alpha - \beta)$ est supposée parfaite et sans adhérence.
Ecrire en A le torseur d'action mécanique de liaison ; caractériser la résultante $\vec{A}(\alpha \to \beta)$ et le moment $\vec{M}_A(\alpha \to \beta)$.
Ecrire en A et dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes algébriques de la résultante et du moment.
Indiquer l'ensemble des points $M(x, y, z)$ pour lesquels la forme particulière du torseur $\{\mathcal{T}(\alpha \to \beta)\}$ est conservée.

RÉPONSE

$(\alpha - \beta)$ est une liaison pivot sans adhérence d'axe $(A, \vec{x})$ donc, avec notre hypothèse de symétrie :

$$\{\mathcal{T}(\alpha \to \beta)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(\alpha \to \beta) \\ \vec{M}_A(\alpha \to \beta) \end{Bmatrix}$$

tels que $\left| \begin{array}{l} \vec{A}(\alpha \to \beta) \perp \vec{z} \\ \vec{M}_A(\alpha \to \beta) \text{ porté par } (A, \vec{z}) \end{array} \right.$.

Dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{T}(\alpha \to \beta)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(\alpha \to \beta) & 0 \\ Y(\alpha \to \beta) & 0 \\ 0 & N(\alpha \to \beta) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (1)$$

Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque, effectuons la réduction du torseur $\{\mathcal{T}(\alpha \to \beta)\}$ en M :

$$\vec{M}_M(\alpha \to \beta) = \vec{M}_A(\alpha \to \beta) + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{A}(\alpha \to \beta) .$$

Soit :

$$\{\mathcal{T}(\alpha \to \beta)\} = {}_M\begin{Bmatrix} X(\alpha \to \beta) & zY(\alpha \to \beta) \\ Y(\alpha \to \beta) & -zX(\alpha \to \beta) \\ 0 & T \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

avec

$$T = N(\alpha \to \beta) - xY(\alpha \to \beta) + yX(\alpha \to \beta).$$

Pour que la forme particulière écrite en (1) soit conservée, il faut et il suffit que quels que soient $X(\alpha \to \beta)$ et $Y(\alpha \to \beta)$ on ait $z = 0$.
La forme particulière de $\{\mathcal{T}(\alpha \to \beta)\}$ est donc conservée pour tout point M appartenant au plan de symétrie $(A, \vec{x}, \vec{y})$.

QUESTION 3

La liaison $(\alpha - \delta)$ peut être considérée, nous l'avons vu à la question 1 comme une liaison glissière d'axe $(B, \vec{x})$. Supposons que cette liaison soit une liaison réelle avec frottement de facteur $f = \tan \varphi$.
Ecrire en B le torseur d'action mécanique de liaison ; caractériser la résultante $\vec{B}(\alpha \to \delta)$ et le moment $\vec{M}_B(\alpha \to \delta)$.
Ecrire en B et dans $\mathcal{R}(B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes algébriques de la résultante et du moment.
Indiquer l'ensemble des points $M(x, y, z)$ pour lesquels la forme particulière du torseur $\{\mathcal{T}(\alpha \to \delta)\}$ est conservée.

RÉPONSE

$(\alpha - \delta)$ est une liaison glissière réelle d'axe $(B, \vec{x})$.
Donc avec notre hypothèse de symétrie et en fin de serrage :

$$\{\mathcal{T}(\alpha \to \delta)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(\alpha \to \delta) \\ \vec{M}_B(\alpha \to \delta) \end{Bmatrix}$$

tels que $\left| \begin{array}{l} \vec{B}(\alpha \to \delta) \perp \vec{z} \\ \vec{M}_B(\alpha \to \delta) \text{ porté par } (B, \vec{z}) \end{array} \right.$.

Dans $\mathcal{R}(B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\{\mathcal{T}(\alpha \to \delta)\} = {}_B\begin{Bmatrix} X(\alpha \to \delta) & 0 \\ Y(\alpha \to \delta) & 0 \\ 0 & N(\alpha \to \delta) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (2)$$

Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque, effectuons la réduction du torseur $\{\mathcal{T}(\alpha \to \delta)\}$ en M.

$$\vec{M}_M(\alpha \to \delta) = \vec{M}_B(\alpha \to \delta) + \overrightarrow{MB} \wedge \vec{B}(\alpha \to \delta)$$

soit

$$\{\mathcal{T}(\alpha \to \delta)\} = {}_M\begin{Bmatrix} X(\alpha \to \delta) & zY(\alpha \to \delta) \\ Y(\alpha \to \delta) & -zX(\alpha \to \delta) \\ 0 & T \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

avec

$$T = N(\alpha \to \delta) - xY(\alpha \to \delta) + yX(\alpha \to \delta).$$

Pour que la forme particulière écrite en (2) soit conservée, il faut et il suffit que quels que soient $X(\alpha \to \delta)$ et $Y(\alpha \to \delta)$ on ait $z = 0$.

La forme particulière de $\{\mathcal{T}(\alpha \to \delta)\}$ est donc conservée pour tout point M appartenant au plan de symétrie $(A, \vec{x}, \vec{y})$.

QUESTION 4

La liaison $(\beta - \gamma)$ est supposée parfaite et sans adhérence.
Ecrire en C le torseur d'action mécanique de liaison ; caractériser la résultante $\vec{C}(\beta \to \gamma)$ et le moment $\vec{M}_C(\beta \to \gamma)$.
Ecrire en C et dans $\mathcal{R}(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes algébriques de la résultante et du moment.
Indiquer l'ensemble des points $M(x, y, z)$ pour lesquels la forme particulière du torseur $\{\mathcal{T}(\beta \to \gamma)\}$ est conservée.

RÉPONSE

$(\beta \to \gamma)$ est une liaison pivot sans adhérence d'axe $(C, \vec{z})$. Donc avec notre hypothèse de symétrie :

$$\{\mathcal{T}(\beta \to \gamma)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(\beta \to \gamma) \\ \vec{M}_C(\beta \to \gamma) \end{Bmatrix}$$

tels que $\left| \begin{array}{l} \vec{C}(\beta \to \gamma) \perp \vec{z} \\ \vec{M}_C(\beta \to \gamma) = \vec{0} \end{array} \right.$.

Dans $\mathcal{R}(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{T}(\beta \to \gamma)\} = {}_C\begin{Bmatrix} X(\beta \to \gamma) & 0 \\ Y(\beta \to \gamma) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}. \quad (3)$$

Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque ; effectuons la réduction du torseur $\{\mathcal{T}(\beta \to \gamma)\}$ en M :

$$\vec{M}_M(\beta \to \gamma) = \vec{M}_C(\beta \to \gamma) + \overrightarrow{MC} \wedge \vec{C}(\beta \to \gamma)$$

soit dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\{\mathcal{T}(\beta \to \gamma)\} = {}_M\begin{Bmatrix} X(\beta \to \gamma) & zY(\beta \to \gamma) \\ Y(\beta \to \gamma) & -zX(\beta \to \gamma) \\ 0 & -xY(\beta \to \gamma) + yX(\beta \to \gamma) \end{Bmatrix}$$

Pour que la forme particulière écrite en (3) soit conservée il faut et il suffit que quels que soient $X(\beta \to \gamma)$ et $Y(\beta \to \gamma)$ on ait : $x = 0$ et $y = 0$ et $z = 0$.
La forme particulière de $\{\mathcal{T}(\beta \to \gamma)\}$ n'est donc conservée qu'au seul point C.

QUESTION 5

La liaison $(\delta - \gamma)$ est supposée parfaite et sans adhérence.
Ecrire en D le torseur d'action mécanique de liaison ; caractériser la résultante $\vec{D}(\delta \to \gamma)$ et le moment $\vec{M}_D(\delta \to \gamma)$.

Ecrire en D et dans $\mathcal{R}(D, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes algébriques de la résultante et du moment.
Indiquer l'ensemble des points $M(x, y, z)$ pour lesquels la forme particulière du torseur $\{\mathcal{T}(\delta \to \gamma)\}$ est conservée.

RÉPONSE

$(\delta - \gamma)$ est une liaison ponctuelle sans adhérence de normale $(D, \vec{x})$. Donc avec notre hypothèse de symétrie :

$$\{\mathcal{T}(\delta \to \gamma)\} = {}_D\begin{Bmatrix} \vec{D}(\delta \to \gamma) \\ \vec{M}_D(\delta \to \gamma) \end{Bmatrix}$$

tels que $\left|\begin{array}{l} \vec{D}(\delta \to \gamma) \mathbin{/\!/} \vec{x} \\ \vec{M}_D(\delta \to \gamma) = \vec{0} \end{array}\right.$.

Dans $\mathcal{R}(D, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{T}(\delta \to \gamma)\} = {}_D\begin{Bmatrix} X(\delta \to \gamma) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}. \quad (4)$$

Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque ; effectuons la réduction du torseur $\{\mathcal{T}(\delta \to \gamma)\}$ en M :

$$\vec{M}_M(\delta \to \gamma) = \vec{M}_D(\delta \to \gamma) + \overrightarrow{MD} \wedge \vec{D}(\delta \to \gamma)$$

$$\{\mathcal{T}(\delta \to \gamma)\} = {}_M\begin{Bmatrix} X(\delta \to \gamma) & 0 \\ 0 & -zX(\delta \to \gamma) \\ 0 & yX(\delta \to \gamma) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

Pour que la forme particulière écrite en (4) soit conservée il faut et il suffit que quel que soit $X(\delta \to \gamma)$ on ait : $y = 0$ et $z = 0$.
La forme particulière de $\{\mathcal{T}(\delta \to \gamma)\}$ est donc conservée en tout point $M \in (D, \vec{x})$.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 Manchon de dilatation

Fonction
Transmettre une certaine puissance entre deux arbres en prolongement en laissant une possibilité de déplacement relatif axial pour compenser la dilatation *(fig. 1.59)*.

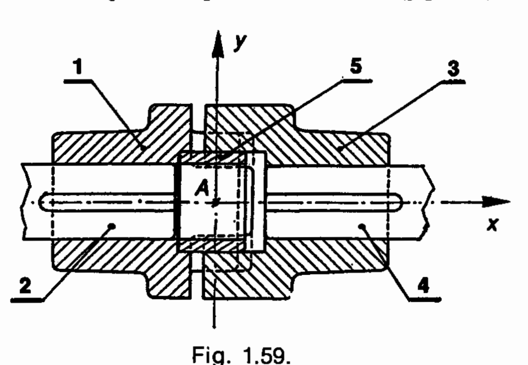


Fig. 1.59.

Réalisation
Le plateau **1** possède deux crabots et se trouve en liaison encastrement avec l'arbre **2**.
Le plateau **3** possède deux crabots et se trouve en liaison encastrement avec l'arbre **4**.

La douille **5** a pour rôle d'assurer la coaxialité des deux arbres et se trouve emmanchée à force dans un alésage du plateau **1**.

Hypothèse
Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour les formes des pièces **1**, **3** et **5**, mais pas pour les forces qui leur sont appliquées. Les liaisons étudiées sont parfaites et sans adhérence.

QUESTIONS

1° Etudier la liaison 1-3.
Analyser les degrés de liberté.
Nature de la liaison.
Expression du torseur $\{\mathcal{T}(1 \to 3)\}$ en A dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

2° Etudier la liaison mécanique élémentaire 5-3.
Analyser les degrés de liberté.
Nature de la liaison.
Expression du torseur $\{\mathcal{T}(5 \to 3)\}$ en A dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

RÉPONSES

1° (1-3) : glissière d'axe $(A, \vec{x})$

$$\{\mathcal{T}(1 \to 3)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & L(1 \to 3) \\ Y(1 \to 3) & M(1 \to 3) \\ Z(1 \to 3) & N(1 \to 3) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

2° (5-3) : Pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$

$$\{\mathcal{T}(5 \rightarrow 3)\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y(5 \rightarrow 3) & M(5 \rightarrow 3) \\ Z(5 \rightarrow 3) & N(5 \rightarrow 3) \end{Bmatrix}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

2 Porte-balais pour moteur à courant continu

La figure 1.60 représente un porte balais utilisé sur un moteur électrique à courant continu équipant certaines locomotives de la SNCF.

Les balais **2** en graphite sont maintenus au contact du collecteur **9** par un système de basculeur **4** et la pression de contact est assurée par l'intermédiaire d'un ressort **5** et d'une lame élastique **8**. Les balais **2** sont fractionnés en vue d'assurer un contact balai-collecteur satisfaisant ; ils ont une section droite rectangulaire.

Hypothèses

La liaison balais **2**-collecteur **9** est modélisée par une liaison plane réelle de normale $(A, \vec{x})$.

La liaison balais **2**-lame élastique **8** est modélisée par une liaison pivot glissant parfaite sans adhérence d'axe $(E, \vec{z})$.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour toutes les liaisons et pour toutes les forces appliquées.

QUESTIONS

1° Pour chacune des liaisons suivantes :

(1-3) ; (2-3) ; (2-9) ; (3-7) ; (3-4)

définir les degrés de liberté et la nature de la liaison.

2° Schématiser le mécanisme en utilisant la représentation plane normalisée.

3° La liaison (3-2) est réelle, avec adhérence ; définir en A et dans $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes des éléments de réduction du torseur $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\}$, dans l'hypothèse où : $\vec{V}(A \in 2/3) \cdot \vec{x} < 0$.

RÉPONSES

1° (1-3) : Liberté nulle : liaison encastrement.
(2-3) : Liberté T_x : glissière d'axe $(A, \vec{x})$.
(2-9) : Liberté R_x, T_y, T_z : plane de normale $(A, \vec{x})$.
(3-7) : Liberté R_z : Pivot d'axe $(C, \vec{z})$.
(3-4) : Liberté R_z : Pivot d'axe $(B, \vec{z})$.

3°

$$\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} X(3 \rightarrow 2) & 0 \\ Y(3 \rightarrow 2) & 0 \\ 0 & N(3 \rightarrow 2) \end{Bmatrix}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

3 Joint de cardan-glaenzer spicer

Un joint de cardan réalise une double articulation cylindrique à axes concourants et perpendiculaires *(fig. 1.61)*.

Les pièces **1** et **3** ont sensiblement la même forme : (chape).

La pièce **2** est appelée croisillon et comporte essentiellement quatre portées cylindriques à 90 degrés équipées de cages à aiguilles.

Hypothèses

Le repère $\mathcal{R}_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est lié au croisillon **2**.

La liaison **1-2** est une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_2)$.

La liaison **2-3** est une liaison pivot d'axe $(O, \vec{y}_2)$.

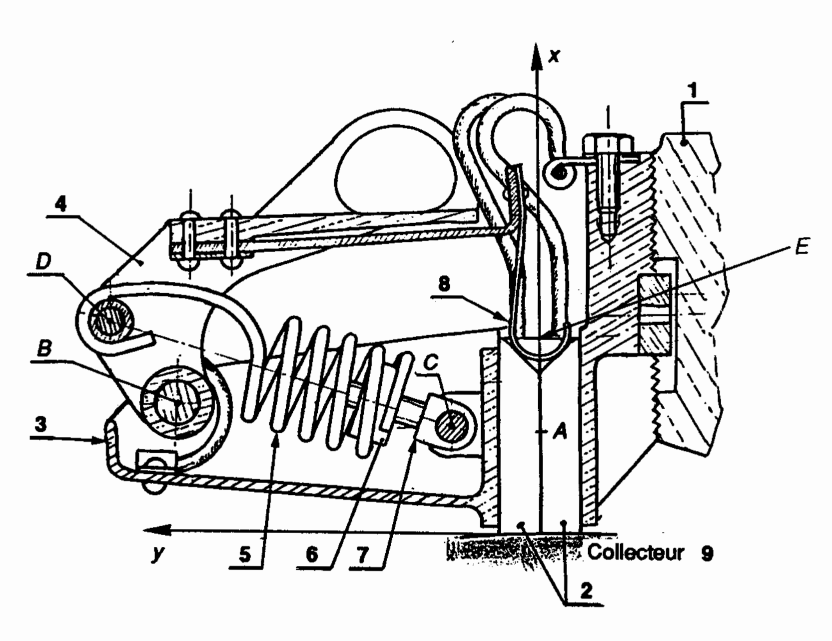


Fig. 1.60.

Fig. 1.61.

QUESTIONS

1° Etudier la liaison 1-3 et indiquer pour celle-ci :
— les degrés de liberté.
— la nature de la liaison.
2° Donner le schéma spacial normalisé de la liaison 1-3.
3° Donner le schéma spatial normalisé du mécanisme constitué par les liaisons (1-2) et (2-3).

RÉPONSE

1° R_{x_2} et R_{y_2} : Liaison sphérique à doigt.

4 Machine de Conditionnement

La *figure 1.62* représente une partie d'une machine de conditionnement de produit liquide. Cette partie concerne la chaîne cinématique dont l'effecteur est le plateau support d'outillage de remplissage et de bouchage **8**.

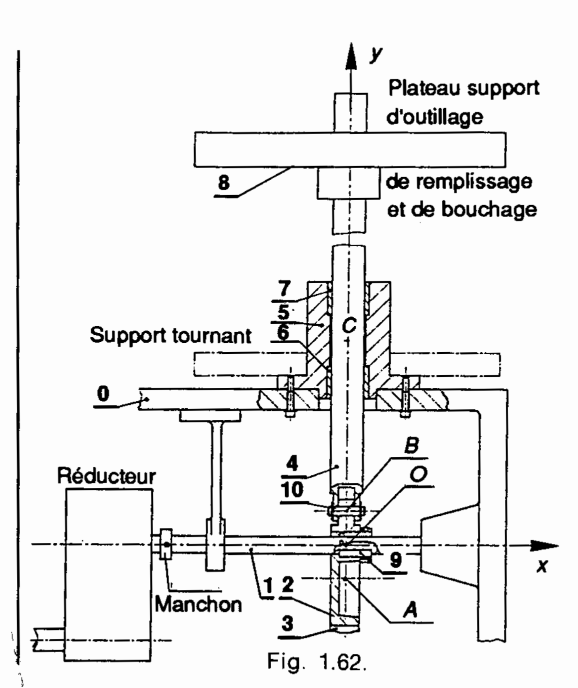


Fig. 1.62.

Cette chaîne cinématique comprend essentiellement :

— Un réducteur, entraîné par un moteur, (non représenté) qui provoque la rotation de l'arbre **1**. Cet arbre **1** est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec le bâti **0**.

— Sur l'arbre **1**, un exentrique **2** est en liaison encastrement par l'intermédiaire de la clavette **9**.
L'excentricité est $e = OA$.

— Une bielle **3** *(fig. 1.63)* est en liaison pivot d'axe $(B, \vec{x})$ avec l'arbre **4** porte-plateau et également en liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$ avec l'excentrique **2**.

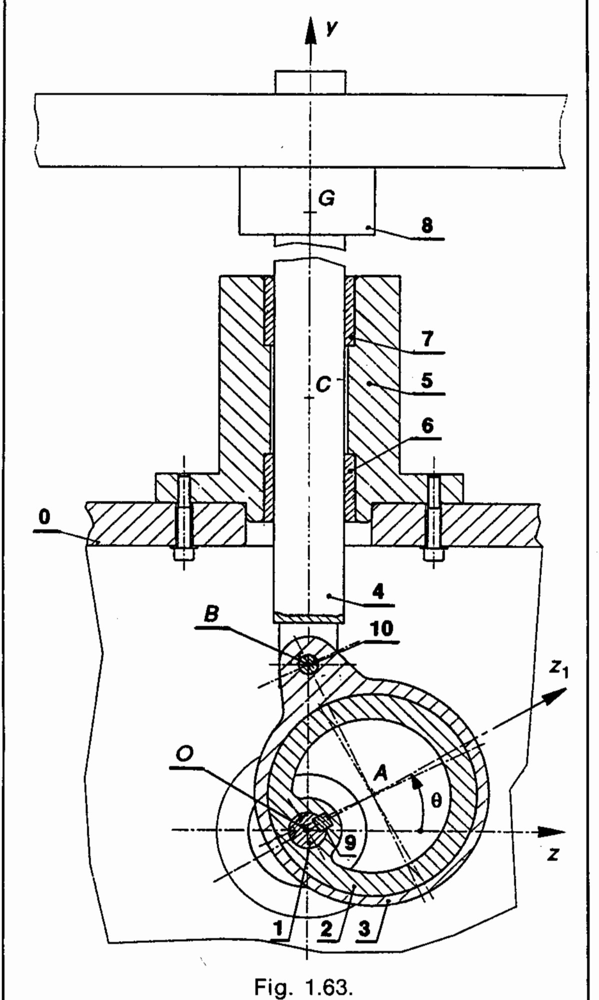


Fig. 1.63.

— L'arbre porte plateau **4** est en liaison pivot glissant d'axe $(C, \vec{y})$ avec la pièce **5** en liaison encastrement avec le bâti O.

On obtient ainsi depuis l'arbre de sortie du réducteur la transformation du mouvement circulaire uniforme de **1** en mouvement de translation rectiligne alternatif du plateau **8**.

La *figure 1.63* représente la coupe du dispositif par son plan de symétrie vertical $(O, \vec{y}, \vec{z})$.

Le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$ est également un plan de symétrie pour les forces extérieures appliquées.

Données numériques :

$$e = OA = 22 \text{ mm} ; \quad R = AB = 47{,}3 \text{ mm} .$$

Masse à soulever : flacons + **8** + **4** : $m = 4$ kg.
Le centre de gravité de cette masse est défini par $BG = 158$ mm.
On prendra $g = 10 \text{ m/s}^2$.
On donne dans la position de la *figure 1.63* : $\theta = 30°$ et $BC = 90$ mm.
Le mouvement est lent et on pourra négliger les effets de l'inertie.

QUESTIONS

1° Donner une représentation spaciale normalisée du mécanisme en indiquant clairement :

— Le repère de définition des liaisons $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

— Les pièces principales : 0, 1, 2, 3, 4.

— Les centres de liaisons : O, A, B, C.

2° On définit le paramètre $\theta = (\vec{z}, \vec{z}_1)$ et on étudie la liaison parfaite sans adhérence (2-3).
Donner dans $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes des éléments de réduction en A puis en O du torseur $\{\mathcal{T}(2 \to 3)\}$.

3° On étudie la liaison parfaite sans adhérence (3-4). Donner dans $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes des éléments de réduction en B puis en O du torseur $\{\mathcal{T}(3 \to 4)\}$.

4° On étudie la liaison parfaite sans adhérence (0-4). Donner dans $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes des éléments de réduction en C puis en B du torseur $\{\mathcal{T}(0 \to 4)\}$.

5° Dans le but de calculer, pour la position de la *figure 1.63*, c'est-à-dire pour $\theta = 30°$, le couple fourni par l'arbre moteur 1, on étudiera successivement :

— l'équilibre strict du système {flacons + 8 + 4} ;

— l'équilibre strict de 3 ;

Calculer $\overline{M}_{Ox}(2 \to 3)$, puis $\overline{M}_{Ox}(1 \to 2)$.

RÉPONSES

$$2° \quad \{\mathcal{T}(2 \to 3)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y(2 \to 3) & 0 \\ Z(2 \to 3) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\{\mathcal{T}(2 \to 3)\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & 11\,Z(2 \to 3) - 11\sqrt{3}\,Y(2 \to 3) \\ Y(2 \to 3) & 0 \\ Z(2 \to 3) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

$$3° \quad \{\mathcal{T}(3 \to 4)\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y(3 \to 4) & 0 \\ Z(3 \to 4) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\{\mathcal{T}(3 \to 4)\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & 54{,}3\,Z(3 \to 4) \\ Y(3 \to 4) & 0 \\ Z(3 \to 4) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

$$4° \quad \{\mathcal{T}(0 \to 4)\} = {}_C\begin{Bmatrix} 0 & L(0 \to 4) \\ 0 & 0 \\ Z(0 \to 4) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\{\mathcal{T}(0 \to 4)\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & L(0 \to 4) + 90\,Z(0 \to 4) \\ 0 & 0 \\ Z(0 \to 4) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

$$5° \quad \bar{M}_{Ox}(2 \to 3) = \bar{M}_{Ox}(1 \to 2) = -\,955{,}7 \text{ (N mm)} .$$

2 axes principaux d'une section

1. MOMENT STATIQUE D'UNE SURFACE PLANE PAR RAPPORT À UN AXE DE SON PLAN

1.1. DÉFINITION *(fig. 2.1)*

Le moment statique $W(O, \vec{x})$ de la surface plane (S) par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$ de son plan est défini par la relation :

$$W(O, \vec{x}) = \iint_S y \, ds \quad . \qquad (1)$$

Fig. 2.1.

Le moment statique de (S) par rapport à l'axe $(O, \vec{y})$ s'écrit alors :

$$W(O, \vec{y}) = \iint_S x \, ds \quad .$$

Unités : longueur en mètres, surface en mètres carrés, $W(O, \vec{y})$ en mètres cubes.

Nota : Le moment statique peut être positif, négatif ou nul.

1.2. PROPRIÉTÉ DU CENTRE DE SURFACE *G* DE (*S*) *(fig. 2.2)*

D'après la définition du centre de surface, on peut écrire :

$$\iint_S \overrightarrow{OM} \times ds = \overrightarrow{OG} \times S \quad .$$

En projection sur $(O, \vec{x})$ on obtient :

$$\iint_S y \, ds = y_G \, S = W(O, \vec{x}) \quad . \qquad (2)$$

En projection sur $(O, \vec{y})$ on obtient :

$$\iint_S x \, ds = x_G \, S = W(O, \vec{y}) \quad .$$

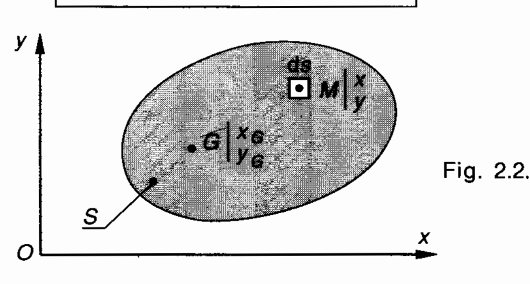


Fig. 2.2.

2. MOMENT QUADRATIQUE D'UNE SURFACE PLANE PAR RAPPORT À UN AXE DE SON PLAN

2.1. DÉFINITION *(fig. 2.3)*

Le moment quadratique $I(O, \vec{x})$ de la surface plane (S) par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$ de son plan est défini par la relation :

$$I(O, \vec{x}) = \iint_S y^2 \, ds \quad . \qquad (1)$$

Le moment quadratique de (S) par rapport à l'axe $(O, \vec{y})$ s'écrit :

$$I(O, \vec{y}) = \iint_S x^2 \, ds \quad .$$

Unités : longueur en mètres, surface en mètres carrés, $I(O, \vec{x})$ en (m^4).

Nota : Un moment quadratique est toujours positif.

2.2. PROPRIÉTÉ *(fig. 2.3)*

Le moment quadratique $I(O, \vec{x})$ de la surface (S) par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$ de son plan est égal au moment quadratique $I(G, \vec{x})$ de (S) par rapport à l'axe $(G, \vec{x})$ augmenté du produit de l'aire de la surface par le carré de la distance des axes

$$\boxed{I(O, \vec{x}) = I(G, \vec{x}) + Sd^2} \quad . \qquad (2)$$

On peut écrire de même :

$$I(O, \vec{y}) = I(G, \vec{y}) + Sd'^2 .$$

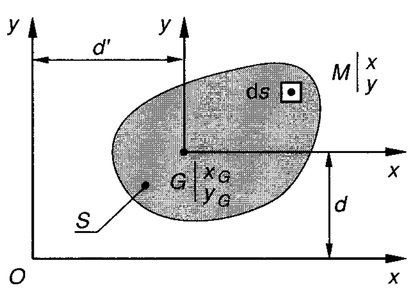


Fig. 2.3.

3. MOMENT QUADRATIQUE POLAIRE D'UNE SURFACE PLANE PAR RAPPORT À UN POINT DE SON PLAN

3.1. DÉFINITION *(fig. 2.4)*

Le moment quadratique polaire I_0 de la surface plane (S) par rapport au point O de son plan est défini par la relation :

$$\boxed{I_0 = \iint_S \rho^2 \, ds} \quad . \qquad (1)$$

Unités : longueur en (m), surface en (m^2), I_0 en (m^4).

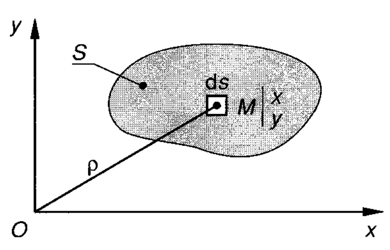


Fig. 2.4.

Nota : Un moment quadratique polaire est toujours positif.
Le moment quadratique d'une surface plane (S) par rapport à un axe $(O, \vec{z})$ perpendiculaire à son plan est égal au moment quadratique polaire de (S) par rapport au point O où l'axe coupe le plan.

3.2. PROPRIÉTÉ

Le moment quadratique polaire d'une surface plane (S) par rapport à un point de son plan est égal à la somme des moments quadratiques par rapport à deux axes rectangulaires de son plan passant par ce point

$$\boxed{I_0 = I(O, \vec{x}) + I(O, \vec{y})} \quad . \qquad (2)$$

4. MOMENTS QUADRATIQUES À CONNAÎTRE (O est en G)

	I_{GX}	I_{GY}	$I_O = I_G$
	$\dfrac{bh^3}{12}$	$\dfrac{hb^3}{12}$	$\dfrac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
	$\dfrac{a^4}{12}$	$\dfrac{a^4}{12}$	$\dfrac{a^4}{6}$
	$\dfrac{\pi d^4}{64}$	$\dfrac{\pi d^4}{64}$	$\dfrac{\pi d^4}{32}$
	$\dfrac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\dfrac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\dfrac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$

Nota : Tous les constructeurs de profilés donnent les moments quadratiques des sections de ceux-ci dans leurs catalogues. L'unité employée est généralement le cm^4.

5. MOMENT PRODUIT $I(O, \vec{x}, \vec{y})$ DE LA SURFACE PLANE (S) PAR RAPPORT AUX AXES $(O, \vec{x})$ ET $(O, \vec{y})$ DE SON PLAN

5.1. DÉFINITION *(fig. 2.3)*

Le moment produit $I(O, \vec{x}, \vec{y})$ de la surface plane (S) par rapport aux axes $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$ de son plan est défini par la relation :

$$I(O, \vec{x}, \vec{y}) = \iint_S xy\,\mathrm{d}s \qquad (1)$$

Unités : longueur en (m), surface en (m²), $I(O, \vec{x}, \vec{y})$ en (m⁴).

5.2. CAS PARTICULIER *(fig. 2.5)*

Si les axes $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$ sont orthogonaux et si l'un d'eux est axe de symétrie de (S), on obtient alors :

$$I(O, \vec{x}, \vec{y}) = 0\,.$$

Fig. 2.5.

5.3. PROPRIÉTÉ *(fig. 2.6)*

On considère la surface plane (S) et les axes $(O, \vec{x}, \vec{y})$ et $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ de son plan tels que $\vec{x}_1 = \vec{x}$ et $\vec{y}_1 = \vec{y}$.
On peut écrire que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}$

d'où : $\quad x = x_G + x_1 \quad$ et $\quad y = y_G + y_1$

$$I(O, \vec{x}, \vec{y}) = \iint_S (x_G + x_1)(y_G + y_1)\,\mathrm{d}s$$

$$I(O, \vec{x}, \vec{y}) = \iint_S x_G\,y_G\mathrm{d}s + \iint_S x_G\,y_1\,\mathrm{d}s + \iint_S x_1\,y_G\,\mathrm{d}s + \iint_S x_1\,y_1\,\mathrm{d}s$$

avec

$$\iint_S x_G\,y_G\,\mathrm{d}s = x_G\,y_G \iint \mathrm{d}s = x_G\,y_G\,S$$

$$\iint_S x_G\,y_1\,\mathrm{d}s = x_G \iint_S y_1\,\mathrm{d}s = 0 \quad \text{car } G \in (G, \vec{y}_1)$$

$$\iint_S x_1\,y_G\,\mathrm{d}s = y_G \iint_S x_1\,\mathrm{d}s = 0 \quad \text{car } G \in (G, \vec{x}_1)$$

$$\iint_S x_1\,y_1\,\mathrm{d}s = I(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$$

d'où

$$I(O, \vec{x}, \vec{y}) = I(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1) + S x_G\,y_G\,.$$

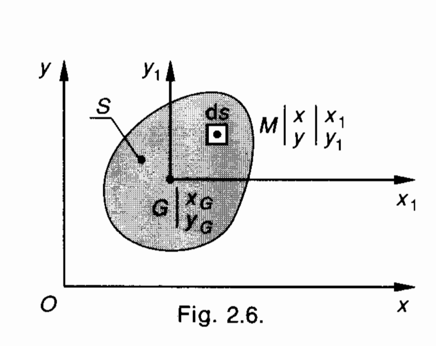


Fig. 2.6.

Le moment produit $I(O, \vec{x}, \vec{y})$ de la surface plane (S) par rapport au repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$ de son plan est égal au moment produit $I(G, \vec{x}, \vec{y})$ de la surface plane (S) par rapport au repère $(G, \vec{x}, \vec{y})$ de son plan augmenté du produit de l'aire S de la surface par les coordonnées de son centre de surface G

$$I(O, \vec{x}, \vec{y}) = I(G, \vec{x}, \vec{y}) + S x_G\,y_G\,. \qquad (2)$$

5.4. CONSÉQUENCE *(fig. 2.7)*

Si les axes $(G, \vec{x})$ et $(G, \vec{y})$ sont situés dans le plan de la surface plane (S) et sont orthogonaux et si l'un des axes est axe de symétrie de (S), le moment produit $I(O, \vec{x}, \vec{y})$ a pour valeur :

$$I(O, \vec{x}, \vec{y}) = S x_G\,y_G\,. \qquad (3)$$

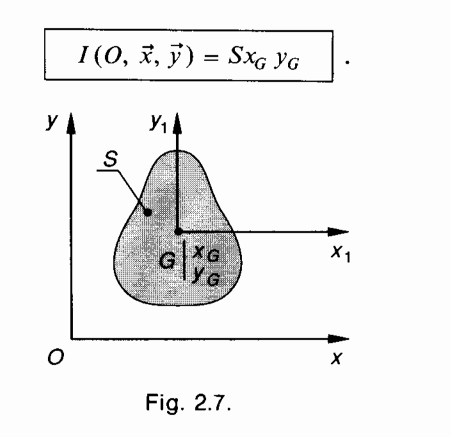


Fig. 2.7.

6. CHANGEMENT DE DIRECTION DES AXES. MOMENT QUADRATIQUE PAR RAPPORT À DES AXES CONCOURANTS

On considère une surface plane (S) et deux systèmes d'axes $(O, \vec{x}, \vec{y})$ et $(O, \vec{X}, \vec{Y})$ de son plan tels que *(fig. 2.8)* :

$$(\vec{x}, \vec{X}) = \varphi .$$

Supposons que les moments quadratiques $I(O, \vec{x})$ et $I(O, \vec{y})$ et le moment produit $I(O, \vec{x}, \vec{y})$ soient connus.
On se propose de déterminer $I(O, \vec{X})$, $I(O, \vec{Y})$ et $I(O, \vec{X}, \vec{Y})$.

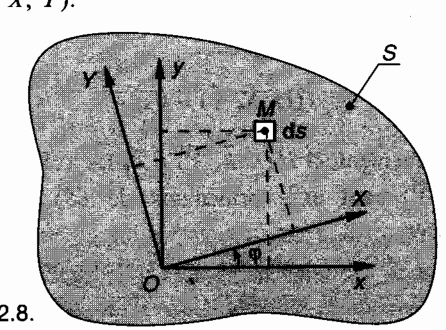


Fig. 2.8.

Par définition on peut écrire que :

$$I(O, \vec{X}) = \iint_S Y^2 \, ds \, ; \quad I(O, \vec{Y}) = \iint_S X^2 \, ds \, ;$$

$$I(O, \vec{X}, \vec{Y}) = \iint_S XY \, ds .$$

Ecrivons les relations de changement de base

$$\vec{x} = \cos \varphi \vec{X} - \sin \varphi \vec{Y} \quad \text{et} \quad \vec{y} = \sin \varphi \vec{X} + \cos \varphi \vec{Y}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} = X\vec{X} + Y\vec{Y}$$

$$\overrightarrow{OM} = x(\cos \varphi \vec{X} - \sin \varphi \vec{Y}) + y(\sin \varphi \vec{X} + \cos \varphi \vec{Y}) = X\vec{X} + Y\vec{Y}$$

d'où

$$X = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad \text{et} \quad Y = y \cos \varphi - x \sin \varphi .$$

Le moment quadratique $I(O, \vec{X})$ s'écrit :

$$I(O, \vec{X}) = \iint_S (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2 \, ds$$

$$I(O, \vec{X}) = \iint_S y^2 \cos^2 \varphi \, ds + \iint_S x^2 \sin^2 \varphi \, ds - \iint_S 2\, xy \sin \varphi \cos \varphi \, ds$$

$$\boxed{I(O, \vec{X}) = I(O, \vec{x}) \cos^2 \varphi + I(O, \vec{y}) \sin^2 \varphi - I(O, \vec{x}, \vec{y}) \sin 2\varphi} \quad . \; (1)$$

En fonction de l'angle 2φ on obtient :

$$\boxed{I(O, \vec{X}) = \frac{I(O, \vec{x}) + I(O, \vec{y})}{2} + \frac{I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})}{2} \cos 2\varphi - I(O, \vec{x}, \vec{y}) \sin 2\varphi} \quad . \; (2)$$

Le moment quadratique $I(O, \vec{Y})$ s'écrit

$$I(O, \vec{Y}) = \iint_S (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 \, ds$$

$$I(O, \vec{Y}) = \iint_S x^2 \cos^2 \varphi \, ds + \iint_S y^2 \sin^2 \varphi \, ds + \iint_S 2\, xy \sin \varphi \cos \varphi \, ds$$

$$\boxed{I(O, \vec{Y}) = I(O, \vec{y}) \cos^2 \varphi + I(O, \vec{x}) \sin^2 \varphi + I(O, \vec{x}, \vec{y}) \sin 2\varphi} \quad . \; (3)$$

En fonction de l'angle 2φ on obtient :

$$\boxed{I(O, \vec{Y}) = \frac{I(O, \vec{x}) + I(O, \vec{y})}{2} - \frac{I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})}{2} \cos 2\varphi + I(O, \vec{x}, \vec{y}) \sin 2\varphi} \quad . \; (4)$$

Le moment produit $I(O, \vec{X}, \vec{Y})$ s'écrit

$$I(O, \vec{X}, \vec{Y}) = \iint_S (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \times (y \cos \varphi - x \sin \varphi) \, ds$$

$$I(O, \vec{X}, \vec{Y}) = \iint_S xy \cos^2 \varphi \, ds - \iint_S xy \sin^2 \varphi \, ds + \iint_S y^2 \sin \varphi \cos \varphi \, ds - \iint_S x^2 \sin \varphi \cos \varphi \, ds .$$

En fonction de l'angle 2φ on obtient :

$$\boxed{I(O, \vec{X}, \vec{Y}) = \frac{I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})}{2} \sin 2\varphi + I(O, \vec{x}, \vec{y}) \cos 2\varphi .} \quad . \; (5)$$

Regroupons les résultats précédents sous la forme la plus utilisée :

$$I(O, \vec{X}) = \frac{I(O, \vec{x}) + I(O, \vec{y})}{2} + \frac{I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})}{2} \cos 2\varphi - I(O, \vec{x}, \vec{y}) \sin 2\varphi \quad (2)$$

$$I(O, \vec{Y}) = \frac{I(O, \vec{x}) + I(O, \vec{y})}{2} - \frac{I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})}{2} \cos 2\varphi + I(O, \vec{x}, \vec{y}) \sin 2\varphi \quad (4)$$

$$I(O, \vec{X}, \vec{Y}) = \frac{I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})}{2} \sin 2\varphi + I(O, \vec{x}, \vec{y}) \cos 2\varphi \quad (5)$$

7. AXES PRINCIPAUX. AXES CENTRAUX

Soient $(O, \vec{x}, \vec{y})$ et $(O, \vec{X}, \vec{Y})$ deux systèmes d'axes concourants situés dans le plan de la surface plane (S) et tels que $(\vec{x}, \vec{X}) = \varphi$ *(fig. 2.19)*.
Nous avons vu (relations (2) et (4) *paragraphe 6*) que $I(O, \vec{X})$ et $I(O, \vec{Y})$ varient en fonction de l'angle φ.
Les valeurs extrêmes I_{max} et I_{min} sont obtenues pour :

$$\frac{\partial I(O, \vec{X})}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial I(O, \vec{Y})}{\partial \varphi} = 0 .$$

A partir de la relation (2) *paragraphe 6* on obtient :

$$\frac{\partial I(O, \vec{X})}{\partial \varphi} = - [I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})] \sin 2\varphi - 2 I(O, \vec{x}, \vec{y}) \cos 2\varphi = 0$$

d'où :

$$\tan 2\varphi = \frac{-2 I(O, \vec{x}, \vec{y})}{I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})} . \quad (1)$$

La relation (1) définit deux valeurs de φ : φ_1 et $\varphi_1 + \frac{\pi}{2}$.

A partir de la relation $\frac{\partial I(O, \vec{Y})}{\partial \varphi} = 0$ on obtient la même relation (1).
Il existe donc deux axes rectangulaires $(O, \vec{X})$ et $(O, \vec{Y})$ passant par O pour lesquels le moment quadratique de (S) est maximal pour l'un et minimal pour l'autre.

7.1. DÉFINITIONS

Les deux axes rectangulaires passant par *O* et situés dans le plan de la surface plane (*S*) pour lesquels le moment quadratique de (*S*) est maximal pour l'un et minimal pour l'autre sont appelés axes principaux en *O* de la surface (*S*).
Les axes principaux au centre de surface *G* de (*S*) sont appelés axes centraux.

7.2. PROPRIÉTÉ

Si $(O, \vec{X})$ et $(O, \vec{Y})$ sont les axes principaux en O de la surface plane (S), la relation (1) du *paragraphe 7* est vérifiée ; dans ce cas la relation de définition du moment produit $I(O, \vec{X}, \vec{Y})$ (relation (5) du *paragraphe 6*) permet d'écrire que :

$$I(O, \vec{X}, \vec{Y}) = 0 .$$

Réciproquement, si $I(O, \vec{X}, \vec{Y}) = 0$, les axes $(O, \vec{X})$ et $(O, \vec{Y})$ sont axes principaux de (S), d'où le théorème :

Les axes rectangulaires $(O, \vec{X})$ et $(O, \vec{Y})$ situés dans le plan de la surface plane (*S*) sont les axes principaux en *O* si et seulement si le moment produit $I(O, \vec{X}, \vec{Y})$ est nul

$$I(O, \vec{X}, \vec{Y}) = 0 \Leftrightarrow (O, \vec{X}) \text{ et } (O, \vec{Y})$$

sont les axes principaux en *O*.

8. CALCUL DES MOMENTS QUADRATIQUES MAXIMAL ET MINIMAL

Dans le repère $(O, \vec{X}, \vec{Y})$, en remplaçant dans la relation (2) *paragraphe 6*, $I(O, \vec{x}, \vec{y})$ par sa valeur définie par la relation (1) *paragraphe 7* on obtient :

$$I(O, \vec{X}) = \frac{I(O, \vec{x}) + I(O, \vec{y})}{2} + \frac{I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})}{2} \left[\cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} \right]$$

soit

$$I(O, \vec{X}) = \frac{I(O, \vec{x}) + I(O, \vec{y})}{2} + \frac{I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})}{2 \cos 2\varphi}$$

Exprimons $\cos 2\varphi$ en fonction de $I(O, \vec{x})$, $I(O, \vec{y})$ et $I(O, \vec{x}, \vec{y})$:
La relation (1) *paragraphe* 7 s'écrit

$$\tan^2 2\varphi = \frac{4\,I(O, \vec{x}, \vec{y})^2}{[I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})]^2}.$$

On peut écrire que

$$\cos^2 2\varphi = \frac{1}{1 + \tan^2 2\varphi} = \frac{1}{1 + \dfrac{4\,I(O, \vec{x}, \vec{y})^2}{[I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})]^2}}$$

$$\cos^2 2\varphi = \frac{[I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})]^2}{[I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})]^2 + 4\,I(O, \vec{x}, \vec{y})^2}$$

d'où

$$\cos 2\varphi = \frac{\pm\,[I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})]}{\sqrt{[I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})]^2 + 4\,I(O, \vec{x}, \vec{y})^2}}$$

En portant chacune des deux valeurs possibles de $\cos 2\varphi$ dans l'expression de $I(O, \vec{X})$ déterminée ci-dessus on obtient les formules encadrées ci-dessous.

Nota : On retrouve les mêmes valeurs à partir de $I(O, \vec{Y})$.

$$I_{max} = \frac{I(O, \vec{x}) + I(O, \vec{y})}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{[I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})]^2 + 4\,I(O, \vec{x}, \vec{y})^2}$$
$$I_{min} = \frac{I(O, \vec{x}) + I(O, \vec{y})}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{[I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})]^2 + 4\,I(O, \vec{x}, \vec{y})^2}. \qquad (1)$$

9. DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES MOMENTS QUADRATIQUES. CERCLE DE MÖHR

1er cas

On connaît $I(O, \vec{x})$, $I(O, \vec{y})$ et $I(O, \vec{x}, \vec{y})$ d'une section (S) par rapport aux axes rectangulaires $(O, \vec{x}, \vec{y})$ et on recherche les directions principales $(O, \vec{X})$ et $(O, \vec{Y})$ ainsi que I_{max} et I_{min} correspondants.

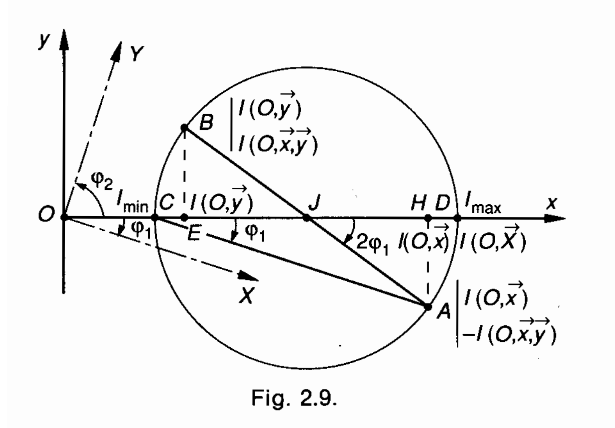


Fig. 2.9.

Dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$ portons en abscisse les moments quadratiques et en ordonnées les moments produits changés de signe *(fig. 2.9)*.

Sur l'axe $(O, \vec{x})$ construisons :

$$\overline{OH} = I(O, \vec{x})$$
$$\overline{OE} = I(O, \vec{y})$$
$$\overline{OJ} = \frac{I(O, \vec{x}) + I(O, \vec{y})}{2}$$

(J est le milieu de HE).
On obtient alors :

$$\overline{JH} = \frac{I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})}{2}.$$

Parallèlement à $(O, \vec{y})$ construisons le point A tel que :

$$\overline{HA} = -\,I(O, \vec{x}, \vec{y}).$$

Nous remarquons alors que *(fig. 2.9)* :

$$\tan(\vec{JH}, \vec{JA}) = \frac{\overline{HA}}{\overline{JH}} = \frac{-2\,I(O, \vec{x}, \vec{y})}{I(O, \vec{x}) - I(O, \vec{y})}.$$

D'après la relation (1) *paragraphe* 7 on en déduit que :

$$\boxed{(\vec{JH}, \vec{JA}) = 2\varphi_1} \quad \text{avec} \quad (\vec{Ox}, \vec{OX}) = \varphi_1.$$

Construisons le cercle de centre J et de rayon $R = JA$.
Ce cercle est appelé **cercle de Möhr.**
Soient C et D les intersections du cercle de Möhr avec l'axe $(O, \vec{x})$ tels que $\overline{OD} > \overline{OC}$.

On remarque alors que :

$$R = \sqrt{JH^2 + HA^2} = \frac{1}{2}\sqrt{[I(O,\vec{x}) - I(O,\vec{y})]^2 + 4\,I(O,\vec{x},\vec{y})^2}$$

$$\overline{OD} = \overline{OJ} + R = \frac{I(O,\vec{x}) + I(O,\vec{y})}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{[I(O,\vec{x}) - I(O,\vec{y})]^2 + 4\,I(O,\vec{x},\vec{y})^2}$$

$$\overline{OC} = \overline{OJ} - R = \frac{I(O,\vec{x}) + I(O,\vec{y})}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{[I(O,\vec{x}) - I(O,\vec{y})]^2 + 4\,I(O,\vec{x},\vec{y})^2}\,.$$

D'après les relations (1) *paragraphe 8*, on en déduit que :

$$I_{max} = \overline{OD} \quad \text{et} \quad I_{min} = \overline{OC}\,.$$

Sur le cercle de Möhr l'angle $2\,\varphi_1$ est défini par :

$$(\vec{JH}, \vec{JA}) = 2\,\varphi_1 \qquad \textit{avec} \quad (O\vec{x}, O\vec{X}) = \varphi_1\,,$$

d'où les directions principales :

$$(O\vec{x}, O\vec{X}) = \varphi_1 \quad \text{et} \quad (O\vec{x}, O\vec{Y}) = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\,.$$

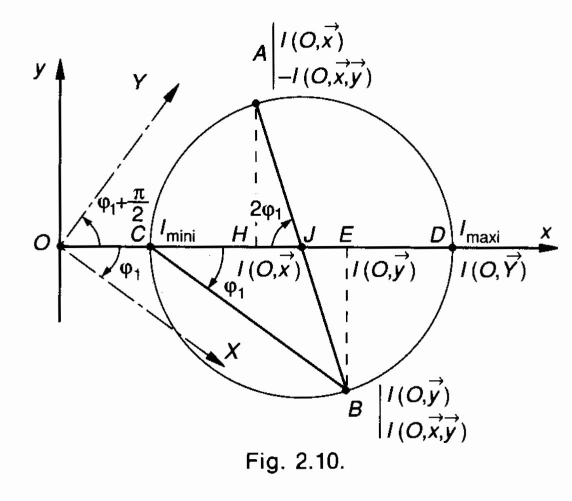


Fig. 2.10.

L'angle φ_1 est orienté : Le sens positif sur le cercle de Möhr est défini par $(O\vec{x}, O\vec{y}) = +\frac{\pi}{2}$.

La figure 2.10 représente le cas où $I(O,\vec{y}) > I(O,\vec{x})$. Sur cette figure on note :

$$(\vec{JH}, \vec{JA}) = (\vec{JE}, \vec{JB}) = 2\,\varphi_1\,.$$

2e cas

Dans une section (S) on connaît les directions principales $(O, \vec{X}, \vec{Y})$ ainsi que $I(O,\vec{X}) = I_{max}$ et $I(O,\vec{Y}) = I_{min}$ et on recherche pour les axes $(O,\vec{x},\vec{y})$ définis par

$$(\vec{X}, \vec{x}) = \varphi$$

les valeurs de $I(O,\vec{x})$, $I(O,\vec{y})$ et $I(O,\vec{x},\vec{y})$.

Nota : Ce deuxième cas se rencontre lorsque l'un des axes $(O,\vec{X})$ ou $(O,\vec{Y})$ est axe de symétrie de la section.

Les relations (2), (4) et (5) du *paragraphe 6* permettent d'exprimer $I(O,\vec{x})$, $I(O,\vec{y})$ et $I(O,\vec{x},\vec{y})$ à condition de :

— permuter la désignation des axes : $\vec{x} \leftrightarrow \vec{X}$ et $\vec{y} \leftrightarrow \vec{Y}$;
— d'écrire que $(\vec{X}, \vec{x}) = \varphi$;
— d'écrire que $I(O, \vec{X}, \vec{Y}) = 0$.

On obtient :

$$I(O,\vec{x}) = \frac{I(O,\vec{X}) + I(O,\vec{Y})}{2} + \frac{I(O,\vec{X}) - I(O,\vec{Y})}{2}\cos 2\,\varphi \qquad (1)$$

$$I(O,\vec{y}) = \frac{I(O,\vec{X}) + I(O,\vec{Y})}{2} - \frac{I(O,\vec{X}) - I(O,\vec{Y})}{2}\cos 2\,\varphi \qquad (2)$$

$$I(O,\vec{x},\vec{y}) = \frac{I(O,\vec{X}) - I(O,\vec{Y})}{2}\sin 2\,\varphi\,. \qquad (3)$$

Sur l'axe $(O, \vec{X})$ construisons *(fig. 2.11)*

$$\overline{OD} = I(O, \vec{X}) = I_{max}$$

$$\overline{OC} = I(O, \vec{Y}) = I_{min}$$

$$\overline{OJ} = \frac{I(O, \vec{X}) + I(O, \vec{Y})}{2}$$

(J est le milieu de CD).

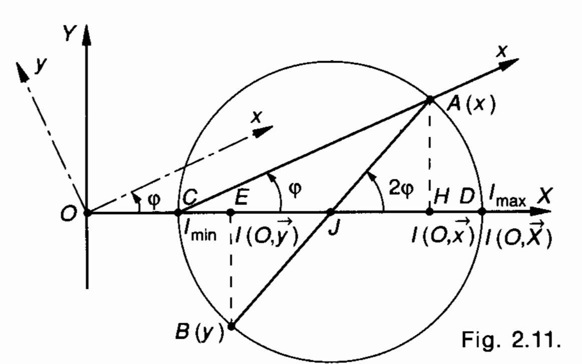


Fig. 2.11.

Construisons le cercle de centre J et de rayon

$$R = JD = \frac{I(O, \vec{X}) - I(O, \vec{Y})}{2}.$$

Ce cercle est le cercle de Möhr.

Construisons le point $A(x)$ sur le cercle de Möhr tel que :

$$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) = \varphi .$$

Soit H la projection orthogonale de A sur $(O, \vec{X})$.
Soit E le symétrique de H par rapport à J.
Sur la *figure 2.11* on remarque que :

$$\overline{JH} = R \cos 2\varphi = \frac{I(O, \vec{X}) - I(O, \vec{Y})}{2} \cos 2\varphi$$

$$\overline{OH} = \overline{OJ} + \overline{JH} = \frac{I(O, \vec{X}) + I(O, \vec{Y})}{2} + \frac{I(O, \vec{X}) - I(O, \vec{Y})}{2} \cos 2\varphi$$

$$\overline{OE} = \overline{OJ} + \overline{JE} = \frac{I(O, \vec{X}) + I(O, \vec{Y})}{2} - \frac{I(O, \vec{X}) - I(O, \vec{Y})}{2} \cos 2\varphi$$

$$\overline{HA} = R \sin 2\varphi = \frac{I(O, \vec{X}) - I(O, \vec{Y})}{2} \sin 2\varphi .$$

D'après les relations (1), (2) et (3) *paragraphe 9* on en déduit que :

$$\begin{cases} I(O, \vec{x}) = \overline{OH}, \\ I(O, \vec{y}) = \overline{OE}, \\ I(O, \vec{x}, \vec{y}) = \overline{HA}. \end{cases}$$

10. APPLICATION

La figure 2.12 représente la section d'une cornière. On se propose de déterminer la position des axes principaux et la valeur des moments quadratiques maximal et minimal relatifs à cette section.

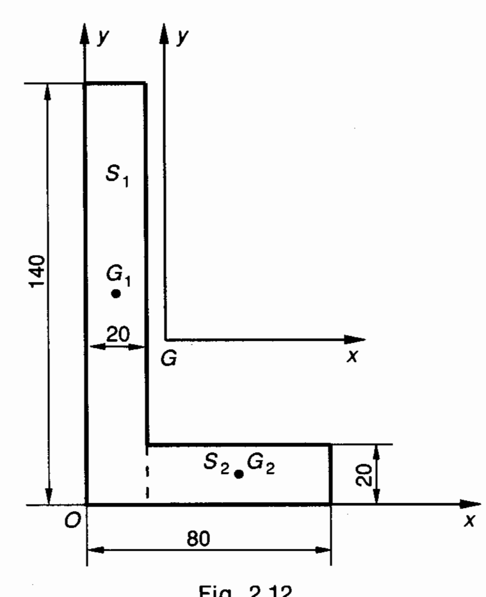


Fig. 2.12.

QUESTION 1

Déterminer le centre de surface G de la section S.

RÉPONSE

On peut décomposer la section S en deux surfaces S_1 et S_2 :

$$S_1 = 140 \times 20 = 2\,800 \text{ mm}^2$$

$$S_2 = 60 \times 20 = 1\,200 \text{ mm}^2$$

$$S = S_1 + S_2 = 4\,000 \text{ mm}^2 .$$

Les coordonnées de G_1 et G_2 dans $(O, \vec{x}, \vec{y})$ sont :

$$G_1 \left| \begin{matrix} 10 \\ 70 \end{matrix} \right. \qquad G_2 \left| \begin{matrix} 50 \\ 10 \end{matrix} \right. .$$

Le centre de surface G de S est défini par la relation :

$$\overrightarrow{OG}\, S = \Sigma_{(s)}\, \overrightarrow{OG}_i\, S_i .$$

En projection sur x on obtient :

$$x_G = \frac{x_{G_1} S_1 + x_{G_2} S_2}{S} = \frac{10 \times 2\,800 + 50 \times 1\,200}{4\,000}$$

$$\mathbf{x_G = 22\ mm}.$$

En projection sur y on obtient :

$$y_G = \frac{y_{G_1} S_1 + y_{G_2} S_2}{S} = \frac{70 \times 2\,800 + 10 \times 1\,200}{4\,000}$$

$$\mathbf{y_G = 52\ mm}.$$

QUESTION 2

Pour la section (*S*) déterminer les moments quadratiques $I(G, \vec{x})$ et $I(G, \vec{y})$ et le moment produit $I(G, \vec{x}, \vec{y})$.

RÉPONSE

On désigne par $I_1(G, \vec{x})$ et $I_2(G, \vec{x})$ les moments quadratiques de S_1 et S_2 par rapport à l'axe $(G, \vec{x})$. On peut écrire que :

$$I(G, \vec{x}) = I_1(G, \vec{x}) + I_2(G, \vec{x}).$$

La relation (2) *paragraphe 2* permet d'écrire :

$$I_1(G, \vec{x}) = I_1(G_1, \vec{x}) + S_1\, d_1^2$$
$$I_1(G, \vec{x}) = \frac{20 \times 140^3}{12} + 2\,800 \times (70 - 52)^2$$
$$I_1(G, \vec{x}) = 5\,480\,533{,}3\ \text{mm}^4$$
$$I_2(G, \vec{x}) = \frac{60 \times 20^3}{12} + 1\,200 \times (52 - 10)^2$$
$$I_2(G, \vec{x}) = 2\,156\,800\ \text{mm}^4$$

d'où :

$$I(G, \vec{x}) = 5\,480\,533{,}3 + 2\,156\,800$$
$$\mathbf{I(G, \vec{x}) = 7\,637\,333{,}3\ mm^4}.$$

De la même façon on définit

$$I(G, \vec{y}) = I_1(G, \vec{y}) + I_2(G, \vec{y}).$$

La relation (2) *paragraphe 2* permet d'écrire :

$$I_1(G, \vec{y}) = I_1(G_1, \vec{y}) + S_1\, d_1^2$$
$$I_1(G, \vec{y}) = \frac{140 \times 20^3}{12} + 2\,800 \times (22 - 10)^2$$
$$I_1(G, \vec{y}) = 496\,533{,}3\ \text{mm}^4$$
$$I_2(G, \vec{y}) = \frac{20 \times 60^3}{12} + 1\,200 \times (50 - 22)^2$$
$$I_2(G, \vec{y}) = 1\,300\,800\ \text{mm}^4$$

d'où :

$$I(G, \vec{y}) = 4\,965\,333{,}3 + 1\,300\,800$$
$$\mathbf{I(G, \vec{y}) = 1\,797\,333{,}3\ mm^4}.$$

On désigne par $I_1(G, \vec{x}, \vec{y})$ et $I_2(G, \vec{x}, \vec{y})$ les moments produits de S_1 et S_2 par rapport aux axes $(G, \vec{x}, \vec{y})$. On peut écrire que :

$$I(G, \vec{x}, \vec{y}) = I_1(G, \vec{x}, \vec{y}) + I_2(G, \vec{x}, \vec{y}).$$

La relation (2) *paragraphe 5* permet d'écrire :

$$I_1(G, \vec{x}, \vec{y}) = I_1(G_1, \vec{x}, \vec{y}) + S_1\, x_{G_1}\, y_{G_1}$$
$$I_1(G, \vec{x}, \vec{y}) = 0 + 2\,800(10 - 22)(70 - 52)$$
$$I_1(G, \vec{x}, \vec{y}) = -\,604\,800\ \text{mm}^4$$
$$I_2(G, \vec{x}, \vec{y}) = I_2(G_2, \vec{x}, \vec{y}) + S_2\, x_{G_2}\, y_{G_2}$$
$$I_2(G, \vec{x}, \vec{y}) = 0 + 1\,200(50 - 22)(10 - 52)$$
$$I_2(G, \vec{x}, \vec{y}) = -\,1\,411\,200\ \text{mm}^4$$

d'où :

$$I(G, \vec{x}, \vec{y}) = -\,604\,800 - 1\,411\,200$$
$$\mathbf{I(G, \vec{x}, \vec{y}) = -\,2\,016\,000\ mm^4}.$$

QUESTION 3

Déterminer par la méthode algébrique la position des axes principaux au centre de surface *G* de la section (*S*) et la valeur des moments quadratiques maximal et minimal correspondants.

RÉPONSE

Les directions principales au centre de surface G de la section (S) sont définies à partir de la relation (1) *paragraphe 7*, d'où :

$$\tan 2\varphi = \frac{-\,2\, I(G, \vec{x}, \vec{y})}{I(G, \vec{x}) - I(G, \vec{y})}$$
$$\tan 2\varphi = \frac{-\,2(-\,2\,016\,000)}{7\,637\,333{,}3 - 1\,797\,333{,}3} = 0{,}6904\,,$$

d'où :

$$\boldsymbol{\varphi_1 = (\vec{x}, \vec{X}) = 17{,}31°\ \text{ et }\ \varphi_2 = (\vec{x}, \vec{Y}) = 107{,}31°}$$

Les moments quadratiques maximal et minimal au centre de surface G de la section (S) sont définis par les relations (1) *paragraphe 8*, d'où :

$$I_{max} = \frac{I(G, \vec{x}) + I(G, \vec{y})}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{[I(G, \vec{x}) - I(G, \vec{y})]^2 + 4\, I(G, \vec{x}, \vec{y})^2}\,.$$

On obtient : $\mathbf{I_{max} = 8\,265\,664{,}7\ mm^4}$

$$I_{min} = \frac{I(G, \vec{x}) + I(G, \vec{y})}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{[I(G, \vec{x}) - I(G, \vec{y})]^2 + 4\, I(G, \vec{x}, \vec{y})^2}\,.$$

On obtient : $\mathbf{I_{min} = 1\,169\,001{,}9\ mm^4}$.

QUESTION 4

Déterminer par la méthode graphique de Möhr la position des axes principaux au centre de surface *G* de la section (*S*) et la valeur des moments quadratiques maximal et minimal correspondants.

RÉPONSE

Dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y})$ et en fonction de l'échelle choisie sur l'axe $(G, \vec{x})$ on porte *(fig. 2.13)* :

$$\overline{GH} = I(G, \vec{x}) = 7\,637\,333\ \text{mm}^4$$
$$\overline{GE} = I(G, \vec{y}) = 1\,797\,333\ \text{mm}^4\,.$$

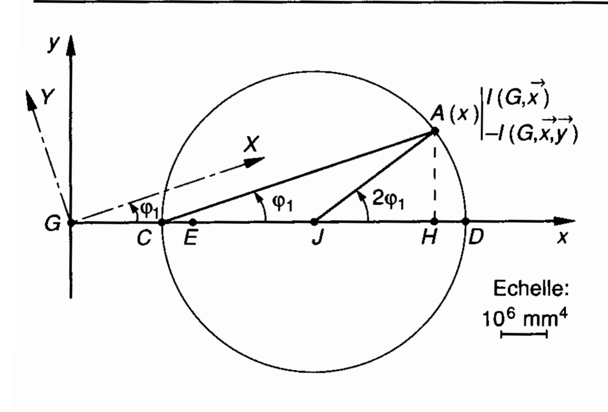


Fig. 2.13.

On note J le milieu de EH.
Parallèlement à $(G, \vec{y})$ on porte :

$$\overline{HA} = -I(G, \vec{x}, \vec{y}) = 2\,016\,000 \text{ mm}^4 .$$

On trace le cercle de Möhr de centre J et de rayon JA. Ce cercle coupe l'axe $(G, \vec{x})$ en C et D.
On trace CA et on mesure :

$$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) = \varphi_1 \approx 17{,}5° .$$

On construit $(G, \vec{X})$ parallèle à CA puis $(G, \vec{Y})$ tel que $(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{\pi}{2}$.
Sur l'axe $(G, \vec{x})$ on mesure :

$$\overline{GD} = I_{max} \approx 8{,}28.10^6 \text{ mm}^4$$
$$\overline{GC} = I_{min} \approx 1{,}18.10^6 \text{ mm}^4 .$$

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 La *figure 2.14* représente la modélisation de la section d'une cornière 60 × 60 × 6 NF A45-009.

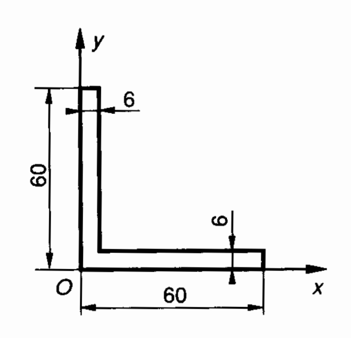


Fig. 2.14.

QUESTIONS

1° Déterminer les coordonnées, dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$, du centre de surface G de la section.

2° Déterminer les moments quadratiques $I(G, \vec{x})$, $I(G, \vec{y})$ et le moment produit $I(G, \vec{x}, \vec{y})$.

3° Déterminer par la méthode algébrique la position des axes principaux au centre de surface G de la section et la valeur des moments quadratiques maximal et minimal correspondants.

4° Déterminer par la méthode graphique de Möhr la position des axes principaux au centre de surface G de la section et la valeur des moments quadratiques maximal et minimal correspondants.

RÉPONSES

1° $x_G = 17{,}21$ mm ; $y_G = 17{,}21$ mm.

2° $I(G, \vec{x}) = 233\,285{,}68 \text{ mm}^4$;
$I(G, \vec{y}) = 233\,285{,}68 \text{ mm}^4$;
$I(G, \vec{x}, \vec{y}) = -138\,126{,}32 \text{ mm}^4$.

3° $\varphi_1 = (\vec{x}, \vec{X}) = 45°$; $\varphi_2 = (\vec{x}, \vec{Y}) = 135°$.

$I_{max} = I(G, \vec{X}) = 371\,412 \text{ mm}^4$;
$I_{min} = I(G, \vec{Y}) = 95\,159{,}36 \text{ mm}^4$.

2 La *figure 2.15* représente la modélisation de la section d'une cornière 90 × 70 × 8 NF A45-009.

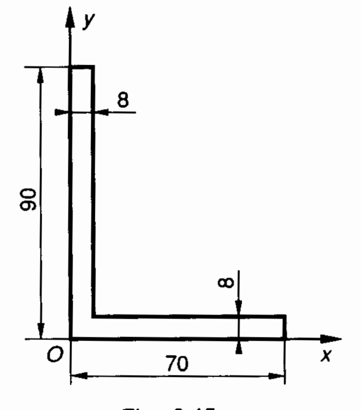


Fig. 2.15.

QUESTIONS

1° Déterminer les coordonnées, dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$, du centre de surface G de la section.

2° Déterminer les moments quadratiques $I(G, \vec{x})$, $I(G, \vec{y})$ et le moment produit $I(G, \vec{x}, \vec{y})$.

3° Déterminer par la méthode algébrique la position des axes principaux au centre de surface *G* de la section et la valeur des moments quadratiques maximal et minimal correspondants.

4° Déterminer par la méthode graphique de Möhr la position des axes principaux au centre de surface *G* de la section et la valeur des moments quadratiques maximal et minimal correspondants.

RÉPONSES

1° $x_G = 18{,}276$ mm ; $y_G = 28{,}276$ mm.

2° $I(G, \vec{x}) = 982\,328{,}49$ mm^4 ;
$I(G, \vec{y}) = 522\,488{,}49$ mm^4 ;
$I(G, \vec{x}, \vec{y}) = -421\,436{,}84$ mm^4.

3° $(\vec{x}, \vec{X}) = \varphi_1 = 30{,}69°$; $(x, \vec{Y}) = \varphi_2 = 120{,}69°$;

$I(G, \vec{X}) = I_{max} = 1\,232\,483{,}7$ mm^4 ;
$I(G, \vec{Y}) = I_{min} = 272\,333{,}27$ mm^4.

3 La *figure 2.16* représente un profilé d'aluminium de section droite (*S*).. *O* est le centre de symétrie de (*S*). Les cotes sont exprimées en millimètre.

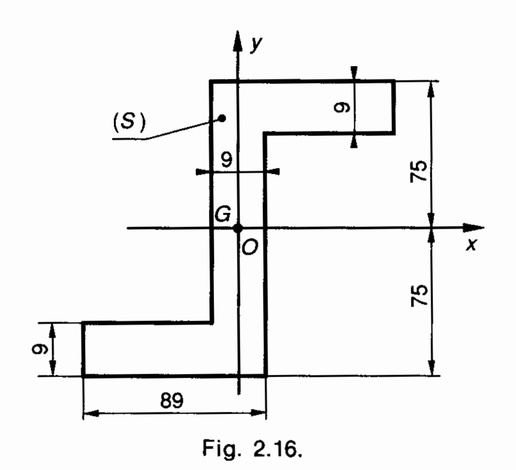


Fig. 2.16.

QUESTIONS

**1° Déterminer les moments quadratiques $I(O, \vec{x})$ et $I(O, \vec{y})$ et le moment produit $I(O, \vec{x}, \vec{y})$ de la section droite (*S*).
Déterminer la position du centre de surface *G* de (*S*).**

2° Déterminer par la méthode algébrique la position des axes principaux au centre de surface *G* de la section droite (*S*) et la valeur des moments quadratiques maximal et minimal correspondants.

3° Déterminer par la méthode graphique de Möhr la position des axes principaux au centre de surface *G* de la section droite (*S*) et la valeur des moments quadratiques maximal et minimal correspondants.

RÉPONSES

1° $I(O, \vec{x}) = 9\,698\,130$ mm^4 ;

$I(O, \vec{y}) = 3\,628\,672{,}5$ mm^4 ;

$I(O, \vec{x}, \vec{y}) = 4\,517\,640$ mm^4.

Le centre de surface *G* est situé au centre de symétrie *O* de (*S*).

2° $(\overrightarrow{Gx}, \overrightarrow{GX}) = -28{,}06$ degrés ;
$(\overrightarrow{Gx}, \overrightarrow{GY}) = 61{,}94$ degrés.

$I(G, \vec{X}) = I_{max} = 12\,105\,703$ mm^4 ;
$I(G, \vec{Y}) = I_{min} = 1\,221\,099{,}5$ mm^4.

4 La *figure 2.17* représente la section droite (*S*) d'un profilé.

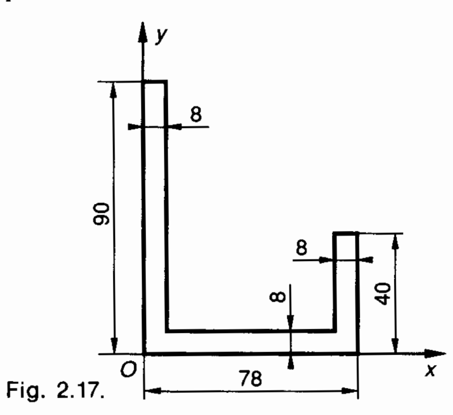


Fig. 2.17.

QUESTIONS

1° Déterminer dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$ les coordonnées du centre de surface *G* de la section (*S*).

2° Déterminer les moments quadratiques $I(G, \vec{x})$, $I(G, \vec{y})$ et le moment produit $I(G, \vec{x}, \vec{y})$.

3° Déterminer par la méthode algébrique la position des axes principaux au centre de surface *G* de (*S*) et la valeur des moments quadratiques maximal et minimal correspondants.

4° Déterminer par la méthode graphique de Möhr la position des axes principaux au centre de surface *G* de (*S*) et la valeur des moments quadratiques maximal et minimal correspondants.

RÉPONSES

1° $x_G = 29{,}885$ mm ; $y_G = 26{,}552$ mm.

2° $I(G, \vec{x}) = 1\,042\,347{,}8$ mm^4 ;
$I(G, \vec{y}) = 1\,310\,827{,}8$ mm^4 ;
$I(G, \vec{x}, \vec{y}) = -538\,270{,}83$ mm^4.

3° $(\vec{x}, \vec{X}) = \varphi_1 = -38°$; $(x, \vec{Y}) = \varphi_2 = 52°$.

$I(G, \vec{X}) = I_{min} = 621\,830{,}32$ mm^4 ;
$I(G, \vec{Y}) = I_{max} = 1\,731\,345{,}3$ mm^4.



notion de contrainte loi de Hooke

Un système matériel est une quantité de matière, homogène ou non, dont la masse reste constante pendant son étude ; il peut donc, de façon conventionnelle, être constitué par une portion de solide.
Dans un solide, il est nécessaire d'admettre l'existence d'un système de forces internes de cohésion ; actions intermoléculaires, qui permettent entre autres à celui-ci de conserver sa forme propre.
En résistance des matériaux, nous serons amenés très souvent à effectuer une coupure fictive d'un solide donné (E) par un plan (P) *(fig. 3.2)*. Ce plan divise le solide en deux parties et on peut par exemple considérer comme système matériel la partie (E_1) de (E).

1. ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION DES EFFORTS DE COHÉSION DANS UNE SECTION DROITE

1.1. DÉFINITIONS. REPÉRAGE DE LA COUPURE

Considérons une poutre (E) et rappelons les principales définitions qui concernent celle-ci.

On appelle *poutre (fig. 3.1)* un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane appelée *ligne moyenne.*

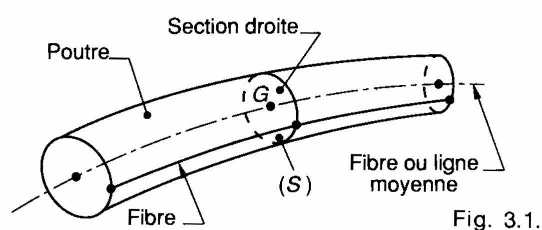


Fig. 3.1.

— La ligne moyenne est droite ou son rayon de courbure est grand par rapport aux dimensions de la section.
— La section droite (S) de centre de surface G est constante ou varie progressivement.
— La poutre a une grande longueur par rapport aux dimensions transversales.
— La poutre possède un plan de symétrie.
— Les points disposés de façon identique sur les sections droites jouissent de certaines propriétés communes ; on dit qu'ils appartiennent à des fibres.
— La ligne moyenne ou fibre moyenne possède des propriétés particulières.

Supposons provisoirement que la poutre (E) ait une ligne moyenne droite *(fig. 3.2)*.

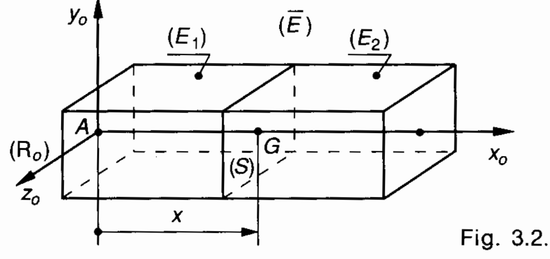


Fig. 3.2.

Soit $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à la poutre. Ce repère est choisi tel que $(A, \vec{x}_0)$ soit porté par la ligne moyenne. Ce repère $(\mathcal{R}_0)$ appelé **repère de position** est utilisé :

— pour l'étude de l'équilibre de (E) et la détermination des actions mécaniques extérieures qu'elle supporte ;
— pour repérer la section droite (S) de (E) dans laquelle nous analyserons les contraintes. Dans $(\mathcal{R}_0)$:

$$\overrightarrow{AG} = x \cdot \vec{x}_0 .$$

Notons également que : (E) désigne la poutre, $(\bar{E})$ désigne le **milieu extérieur à la poutre,** c'est-à-dire essentiellement les pièces mécaniques de liaison, de celle-ci avec le reste du mécanisme.

La coupure fictive par le plan (P) qui définit la section (S) de centre de surface G, partage la poutre (E) en deux tronçons (E_1) et (E_2). On convient de déplacer le plan de coupure (P) d'une extrémité à l'autre de la poutre et toujours dans le même sens. Il en résulte que le volume d'un des tronçons augmente et que celui de l'autre diminue.
On appellera (E_1) le tronçon dont le volume croît.

1.2. ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE DE LA POUTRE (*E*)

(E) est soumise en général à :
— des actions à distance ; ex. : son poids ;
— des actions de contact ; ex. : actions mécaniques des liaisons avec le milieu extérieur.

L'ensemble des actions mécaniques de $(\bar{E})$ sur (E), qu'il s'agisse de forces concentrées ou réparties, ponctuelles, linéïques ou surfaciques sera désigné par :
Torseur des forces extérieures de $(\bar{E})$ sur (E) et noté :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E)\}.$$

— L'équilibre de (E) se traduira donc par :

$$\boxed{\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E)\} = \{\vec{0}\}}. \qquad (1)$$

En tout point, et en particulier en A, origine de $(\mathcal{R}_0)$, la relation (1) entraîne que :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{R}(\bar{E} \to E) = \vec{0} \\ \vec{M}_A(\bar{E} \to E) = \vec{0} \end{cases}} \qquad (2)$$

où : $\vec{R}(\bar{E} \to E)$ désigne la résultante des actions mécaniques extérieures de $(\bar{E}) \to (E)$ et $\vec{M}_A(\bar{E} \to E)$ désigne le moment résultant en A des actions mécaniques extérieures de $(\bar{E}) \to (E)$.

1.3. ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE DU TRONÇON (E_1) *(fig. 3.3)*

Le tronçon (E_1) de la poutre (E) est soumis à un système de forces extérieures qui comprend :
— les actions mécaniques du milieu extérieur $(\bar{E})$ sur (E_1), par exemple : pesanteur, actions de liaison, etc. Notons $\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E_1)\}$ le torseur associé à ces actions ;
— les actions mécaniques que (E_2) exerce sur (E_1) à travers la section (S). Ces actions mécaniques, inconnues *a priori,* sont des forces, extérieures pour (E_1), mais **intérieures pour la poutre (E).** La connaissance de ces forces de cohésion et leur répartition à travers (S) constituent l'un des buts poursuivis en résistance des matériaux. Notons $\{\mathcal{T}_{coh}\}$ le torseur associé à ces actions.

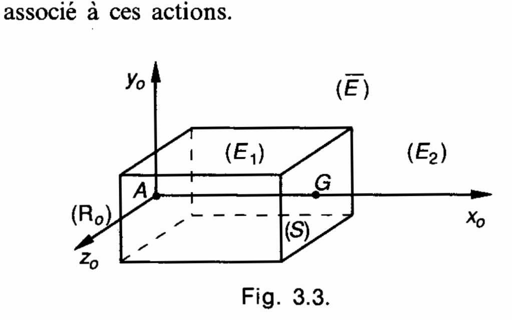


Fig. 3.3.

— L'équilibre de (E_1) se traduit par :

$$\boxed{\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}_{coh}\} = \{\vec{0}\}}. \qquad (3)$$

Considérons les éléments de réduction en G de ces deux torseurs :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E_1)\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R}(\bar{E} \to E_1) \\ \vec{M}_G(\bar{E} \to E_1) \end{Bmatrix};$$

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}.$$

Dans le but de simplifier l'écriture des équations que nous rencontrerons ultérieurement, nous conviendrons de désigner seulement par $\vec{R}$ et $\vec{M}_G$ les éléments de réduction du torseur des forces de cohésion dans la poutre, que le tronçon (E_2) exerce sur (E_1) à travers la section droite (S). $\vec{R}$ et $\vec{M}_G$ sont des fonctions de l'abscisse x du centre de surface G de (S).

La relation (3) entraîne alors que :

$$\begin{cases} \vec{R}(\bar{E} \to E_1) + \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_G(\bar{E} \to E_1) + \vec{M}_G = \vec{0}. \end{cases}$$

Par conséquent, exprimons les éléments de réduction en G du torseur des forces de cohésion.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{R} &= -\vec{R}(\bar{E} \to E_1) \\ \vec{M}_G &= -\vec{M}_G(\bar{E} \to E_1) \end{aligned}}. \qquad (4)$$

REMARQUE

La poutre (E) étant considérée comme l'ensemble des deux tronçons (E_1) et (E_2), la relation (1) ci-dessus entraîne que :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(\bar{E} \to E_2)\} = \{\vec{0}\}.$$

Soit en G :

$$\begin{cases} \vec{R}(\bar{E} \to E_1) + \vec{R}(\bar{E} \to E_2) = \vec{0} \\ \vec{M}_G(\bar{E} \to E_1) + \vec{M}_G(\bar{E} \to E_2) = \vec{0}. \end{cases}$$

Par conséquent, les éléments de réduction en G du torseur des forces de cohésion pourront également s'exprimer par :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}(\bar{E} \to E_2) \\ \vec{M}_G = \vec{M}_G(\bar{E} \to E_2) \end{cases}}. \quad (5)$$

Pour effectuer les calculs pratiques de $\vec{R}$ et de $\vec{M}_G$ on pourra donc utiliser, soit les relations (4), soit les relations (5). Le choix dépendra uniquement de l'expression plus ou moins compliquée des éléments de réduction en G de $\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E_1)\}$ ou de $\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E_2)\}$.

2. COMPOSANTES DES ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION EN *G* DES EFFORTS DE COHÉSION

2.1. DÉFINITION DU REPÈRE LOCAL LIÉ À LA SECTION DROITE (*S*)

Considérons le tronçon (E_1) de la poutre (E) et soit $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié à celle-ci *(fig. 3.4)*.

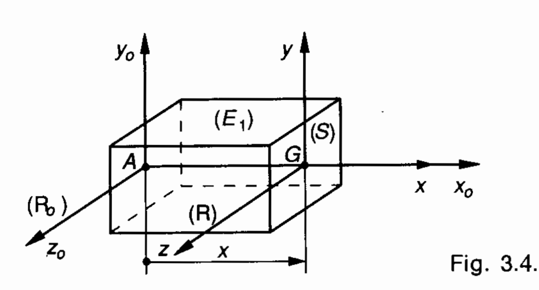


Fig. 3.4.

Nous avons vu que G, centre de surface de la section droite (S) était repéré par son abscisse x dans $(\mathcal{R}_0)$: $\overrightarrow{AG} = x \cdot \vec{x}_0$.

Considérons le repère $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à (S) tel que $(G, \vec{x})$ soit confondu avec la normale extérieure en G à (S).

Normale extérieure signifie, perpendiculaire en G à (S) orientée vers l'extérieur de la matière de (E_1). $(G, \vec{y}, \vec{z})$ définit par conséquent le plan (P) de la section droite (S).

Chaque fois que cela sera possible, et dans le but d'éviter des changements de base, nous choisirons $(\mathcal{R}_0)$ parallèle à $(\mathcal{R})$ et ces deux repères seront toujours directs. Ce repère $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à la section droite (S) sera appelé : repère de définition des sollicitations.

2.2. ÉTUDE DES COMPOSANTES ALGÉBRIQUES DANS ($\mathcal{R}$) DES ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION DE $\{\mathcal{T}_{coh}\}$.

Supposons connus, d'après les relations (4) ou (5) du *paragraphe 1.3*, les éléments de réduction en G du torseur des forces de cohésion de (E_2) sur (E_1) à travers la section droite (S) *(fig. 3.5)*.

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}.$$

Nota : $\vec{R}$ et $\vec{M}_G$ sont des fonctions de l'abscisse x de G.

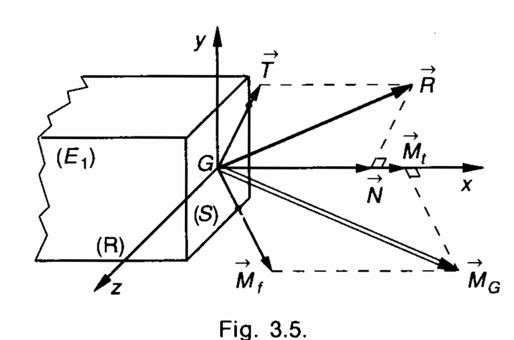


Fig. 3.5.

Définitions

• Effort normal $\vec{N}$: c'est la projection de $\vec{R}$ sur la normale extérieure $(G, \vec{x})$.

• Effort tranchant $\vec{T}$: c'est la projection de $\vec{R}$ sur le plan de la section droite $(G, \vec{y}, \vec{z})$.

• Moment de torsion $\vec{M}_t$: c'est la projection de $\vec{M}_G$ sur la normale extérieure $(G, \vec{x})$.

• Moment de flexion $\vec{M}_f$: c'est la projection de $\vec{M}_G$ sur le plan de la section droite $(G, \vec{y}, \vec{z})$.

Par conséquent : $\left| \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{M}_G = \vec{M}_t + \vec{M}_f. \end{array} \right.$

Notons que $\vec{T} = T_y \cdot \vec{y} + T_z \cdot \vec{z}$;

$$\vec{M}_f = M_{f_y} \cdot \vec{y} + M_{f_z} \cdot \vec{z}.$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \vec{R} = N \cdot \vec{x} + T_y \cdot \vec{y} + T_z \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_G = M_t \cdot \vec{x} + M_{f_y} \cdot \vec{y} + M_{f_z} \cdot \vec{z} \end{cases} \quad (1)$$

N, T_y, T_z, M_t, M_{f_y} et M_{f_z} sont les composantes algébriques de $\vec{R}$ et $\vec{M}_G$ dans $(\mathcal{R})$. Ce sont des fonctions de l'abscisse x du centre de surface G de (S).

2.3. APPLICATION

Une unité d'usinage est équipée d'une tête multibroche. La *figure 3.6* représente à échelle réduite une de ces broches et plus particulièrement la commande et le guidage de l'arbre porte-mandrin 1. Unités utilisées : longueurs en mètres, forces en newtons.

Cet arbre reçoit la puissance par un engrenage **2-3** à denture droite. Les actions de liaison de $(3 \to 2)$ sont modélisables en D par le torseur $\{\mathcal{T}(3 \to 2)\}$:

$$\{\mathcal{T}(3 \to 2)\} = {}_D\begin{Bmatrix} \vec{D}(3 \to 2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans le repère $\mathcal{R}_0$:

$$\{\mathcal{T}(3 \to 2)\} = {}_D\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 65 & 0 \\ -200 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

unités : newtons et mètres.

• Les actions mécaniques de la liaison $4 \to 1$ sont modélisables en A par le torseur $\{\mathcal{T}(4 \to 1)\}$:

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(4 \to 1) \\ \vec{M}_A(4 \to 1) \end{Bmatrix}$$

tel que dans le repère $\mathcal{R}_0$:

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} -625 & -2{,}4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

(ces efforts sont les efforts réciproques des efforts de coupe).

• L'arbre **1** est guidé en rotation dans le carter **0** par l'intermédiaire de deux roulements à billes :

5 en C :12BC02
6 en B :15BE32 .

Le choix de ces roulements et le type de montage utilisé ont permis de modéliser les actions de liaison par les torseurs : $\{\mathcal{T}(5 \to 1)\}$ et $\{\mathcal{T}(6 \to 1)\}$.

$$\{\mathcal{T}(5 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(5 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}_0$:

$$\{\mathcal{T}(5 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -85 & 0 \\ 240 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

et

$$\{\mathcal{T}(6 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(6 \to 1) \\ \vec{M}_B(6 \to 1) \end{Bmatrix}$$

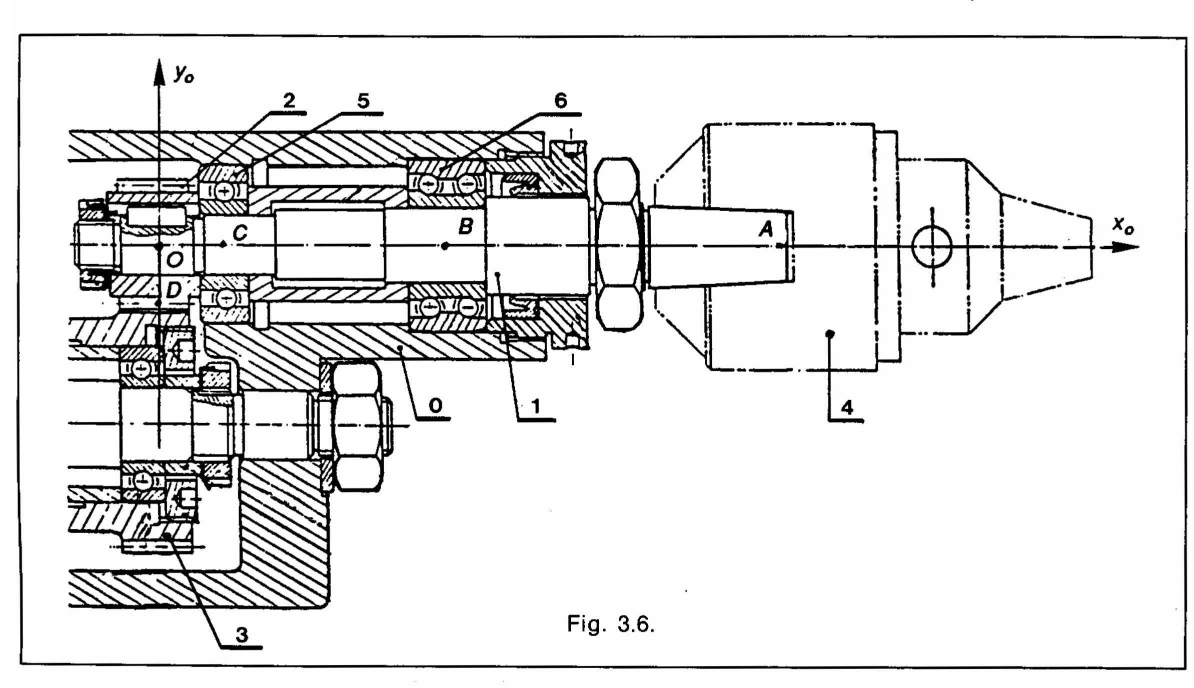


Fig. 3.6.

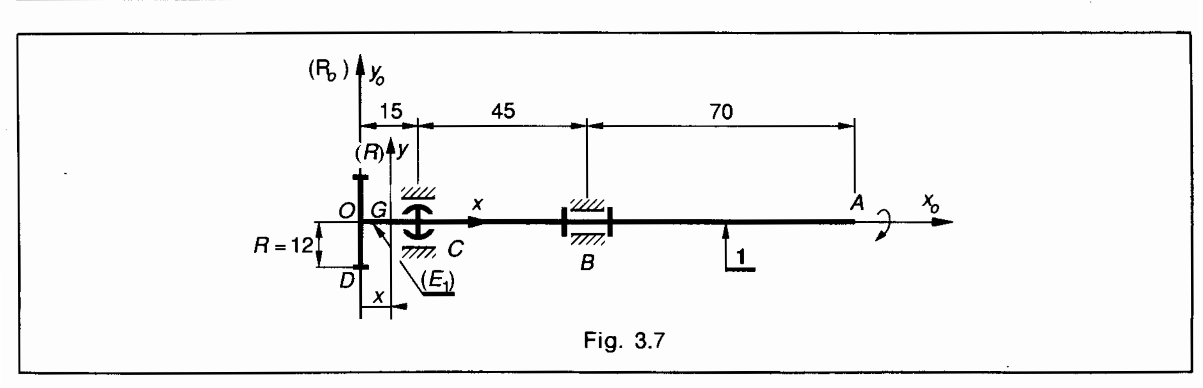


Fig. 3.7

tel que dans $\mathcal{R}_0$:

$$\{\mathcal{T}(6 \to 1)\} = {}_B\left\{\begin{matrix} 625 & 0 \\ 20 & 1,2 \\ -40 & 0,075 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

unités : newtons et mètres.
On donne à la *figure 3.7* le schéma de **1**, la modélisation de son guidage et les cotes.

QUESTION

Définir le torseur des forces de cohésion dans les sections droites de 1 entre *O* et *A* et construire les diagrammes des composantes algébriques des éléments de réduction en *G* des efforts de cohésion dans 1.

RÉPONSE

Considérons une section droite (S) de **1** et soit G d'abscisse x dans $(\mathcal{R}_0)$ le centre de surface de (S). Considérons le repère $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de définition des sollicitations et soit (E_1) le tronçon de **1** compris entre O et G.

Etude de la zone OC : $0 \leq x < 0{,}015$.
Unités : newtons et mètres.

L'équilibre de (E_1) entraîne qu'en G :

$$\begin{cases} \vec{R} = -\vec{D}(3 \to 2) \\ \vec{M}_G = -\overrightarrow{GD} \wedge \vec{D}(3 \to 2) \end{cases}$$

(Notons que $\vec{M}_D(3 \to 2) = \vec{0}$).
Avec dans $(\mathcal{R}) = (\mathcal{R}_0)$:

$$\vec{D}(3 \to 2)\begin{vmatrix} 0 \\ 65 \\ -200 \end{vmatrix} ; \quad \overrightarrow{GD}\begin{vmatrix} -x \\ -0{,}012 \\ 0 \end{vmatrix} .$$

Donc, dans $(\mathcal{R})$:

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \, . \, \vec{x} - 65 \, . \, \vec{y} + 200 \, . \, \vec{z} \\ \vec{M}_G = -2{,}4 \, . \, \vec{x} + 200\, x \, . \, \vec{y} + 65\, x \, . \, \vec{z} \, . \end{cases}$$

On en déduit les composantes algébriques des éléments de réduction en G des efforts de cohésion.

$$\begin{vmatrix} N = 0 \\ T_y = -65 \\ T_z = 200 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} M_t = -2{,}4 \\ M_{f_y} = 200\, x \\ M_{f_z} = 65\, x \end{vmatrix}$$

Etude de la zone CB : $0{,}015 \leq x < 0{,}06$.
Unités : newtons et mètres.

L'équilibre de (E_1) entraîne qu'en G :

$$\begin{cases} \vec{R} = -[\vec{D}(3 \to 2) + \vec{C}(6 \to 1)] \\ \vec{M}_G = -[\overrightarrow{GD} \wedge \vec{D}(3 \to 2) + \overrightarrow{GC} \wedge \vec{C}(6 \to 1)] \end{cases}$$

(Notons que $\vec{M}_C(6 \to 1) = \vec{0}$).
Avec dans $(\mathcal{R}) = (\mathcal{R}_0)$:

$$\vec{C}(6 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ -85 \\ 240 \end{vmatrix} ; \quad \overrightarrow{GC}\begin{vmatrix} 0{,}015 - x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} .$$

Donc dans $(\mathcal{R})$:

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \, . \, \vec{x} + 20 \, . \, \vec{y} - 40 \, . \, \vec{z} \\ \vec{M}_G = -2{,}4 \, . \, \vec{x} + (-40\, x + 3{,}6)\, \vec{y} + (-20\, x + 1{,}275)\, \vec{z} \, . \end{cases}$$

On en déduit les composantes algébriques des éléments de réduction en G des efforts de cohésion :

$$\begin{vmatrix} N = 0 \\ T_y = 20 \\ T_z = -40 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} M_t = -2{,}4 \\ M_{f_y} = -40\, x + 3{,}6 \\ M_{f_z} = -20\, x + 1{,}275 \end{vmatrix}$$

Etude de la zone BA : $0{,}06 \leq x < 0{,}13$.
Unités : newtons et mètres.
L'équilibre de (E_1) entraîne qu'en G :

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{A}(4 \to 1) \\ \vec{M}_G = \vec{M}_A(4 \to 1) + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{A}(4 \to 1) \end{cases}$$

avec dans $(\mathcal{R}) = (\mathcal{R}_0)$.

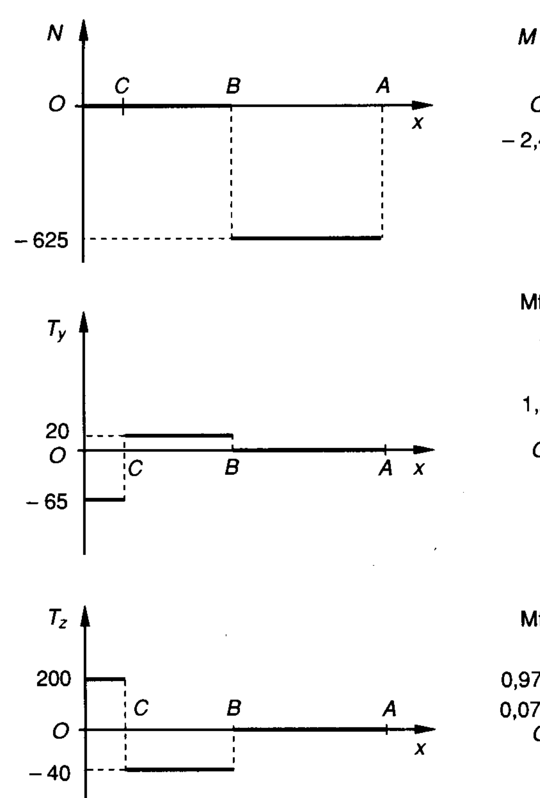
$$\vec{A}(4 \to 1)\begin{vmatrix} -625 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} , \quad \vec{M}_A(4 \to 1)\begin{vmatrix} -2{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} , \quad \overrightarrow{GA}\begin{vmatrix} 0{,}13 - x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} .$$

Donc dans $(\mathcal{R})$:

$$\begin{cases} \vec{R} = -625 \, . \, \vec{x} + 0 \, . \, \vec{y} + 0 \, . \, \vec{z} \\ \vec{M}_G = -2{,}4\, \vec{x} + 0 \, . \, \vec{y} + 0 \, . \, \vec{z} \, . \end{cases}$$

On en déduit les composantes algébriques des éléments de réduction en G des efforts de cohésion :

$$\begin{vmatrix} N = -625 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} M_t = -2{,}4 \\ M_{f_y} = 0 \\ M_{f_z} = 0 \end{vmatrix}$$



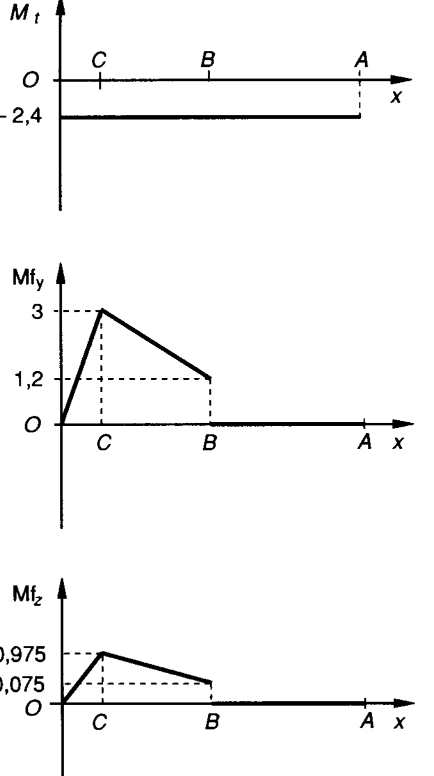


Fig. 3.8.

La *figure 3.8* donne les diagrammes des composantes algébriques N, T_y, T_z, M_t, M_{f_y} et M_{f_z} fonctions de l'abscisse x de G.

2.4. RELATIONS ENTRE EFFORT TRANCHANT ET MOMENT DE FLEXION

Soit une poutre rectiligne supportant des charges concentrées quelconques ainsi qu'une charge uniformément répartie définie par son coefficient de charge p *(fig. 3.9)*. Nous choisissons p = Cte pour la simplicité des calculs, ce qui ne change rien au résultat.

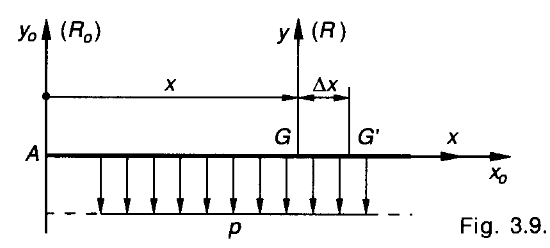


Fig. 3.9.

Exprimons en G, centre de surface d'une section droite, les éléments de réduction du torseur des forces de cohésion.

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}.$$

Considérons une seconde section droite de centre de surface G' distant de Δx de G et donnons les nouveaux éléments de réduction en G' du torseur des forces de cohésion. Notons avant cela, qu'entre G et G' nous n'appliquons aucune charge concentrée.

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = {}_{G'}\begin{Bmatrix} \vec{R}' = \vec{R} - p\,\Delta x\,\vec{y} \\ \vec{M}_{G'} = \vec{M}_G + \overrightarrow{G'G} \wedge \vec{R} + \dfrac{p(\Delta x)^2}{2}\vec{z} \end{Bmatrix}.$$

Exprimons $\vec{R} = N\,.\,\vec{x} + T_y\,.\,\vec{y} + T_z\,.\,\vec{z}$.
Notons que :

$$\overrightarrow{\Delta M}_G = \vec{M}_{G'} - \vec{M}_G = \overrightarrow{G'G} \wedge \vec{R} + \frac{p(\Delta x)^2}{2}\vec{z}.$$

Soit :

$$\overrightarrow{\Delta M}_G = T_z\,.\,\Delta x\,\vec{y} - T_y\,.\,\Delta x\,\vec{z} + \frac{p(\Delta x)^2}{2}\vec{z}\,. \quad (2)$$

On peut également exprimer la variation du moment $\overrightarrow{\Delta M}_G$:

$$\overrightarrow{\Delta M}_G = \Delta M_t\,.\,\vec{x} + \Delta M_{f_y}\,.\,\vec{y} + \Delta M_{f_z}\,.\,\vec{z}\,. \quad (3)$$

D'après les relations (2) et (3), et après projection sur les axes du repère lié à la section, $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\begin{cases} \Delta M_t = 0 \\ \Delta M_{f_y} = T_z \cdot \Delta x \\ \Delta M_{f_z} = -T_y \cdot \Delta x + \dfrac{p(\Delta x)^2}{2} . \end{cases}$$

Si Δx tend vers zéro, le terme $\dfrac{p(\Delta x)^2}{2}$ est un infiniment petit du second ordre que nous pouvons négliger. A la limite, et en employant l'écriture différentielle :

$$\boxed{\frac{dM_{f_y}}{dx} = T_z} ; \boxed{\frac{dM_{f_z}}{dx} = -T_y} . \quad (4)$$

Nota : Si nous n'avions pas choisi un coefficient de charge $p =$ cte, le résultat aurait été identique, le terme $p(x) \cdot \dfrac{(\Delta x)^2}{2}$ pouvant également être négligé.

3. VECTEUR CONTRAINTE EN UN POINT

Les efforts de cohésion, dont on connait les éléments de réduction en G, sont des actions mécaniques que le tronçon (E_2) de (E) exerce sur (E_1) à travers la section droite fictive (S). La loi de répartition dans (S) de ces efforts élémentaires est inconnue. Notons $\overrightarrow{\Delta f}$ l'action mécanique élémentaire au point M et ΔS l'élément de surface entourant ce point. Soit $\vec{n}$ la normale extérieure en M au plan de la section (S) orientée positivement vers l'extérieur de la matière de (E_1) *(fig. 3.10)*.

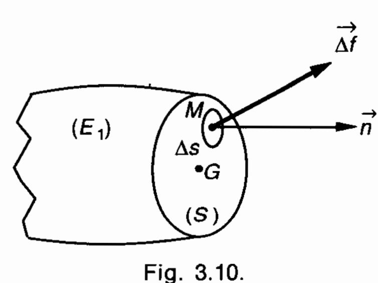


Fig. 3.10.

3.1. DÉFINITION

On appelle vecteur contrainte en M, relativement à la surface élémentaire ΔS, orientée par la normale extérieure $\vec{n}$, le vecteur noté $\vec{C}(M, \vec{n})$ tel que :

$$\boxed{\vec{C}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta f}}{\Delta S} = \frac{\overrightarrow{df}}{dS}} \quad (1)$$

3.2. UNITÉ

La dimension d'une contrainte est le quotient de l'unité de force par l'unité de surface :

$$[C] = [F] \cdot [L]^{-2} .$$

Dans le système légal, cette unité est **le pascal** :

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 .$$

On utilisera le plus souvent son multiple : le méga-pascal

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2 .$$

On rappelle que 1 MPa ≈ 10 bar.

3.3. EXPRESSION DES ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION EN G DU TORSEUR DES FORCES DE COHÉSION

D'après la relation de définition (1) de la contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$ on peut écrire :

$$\overrightarrow{df} = \vec{C}(M, \vec{n}) \cdot dS .$$

On peut donc exprimer $\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}$;

et dans la section droite S écrire que :

$$\begin{cases} \vec{R} = \displaystyle\iint_{(S)} \vec{C}(M, \vec{n}) \cdot dS \\ \vec{M}_G = \displaystyle\iint_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{C}(M, \vec{n}) \cdot dS \end{cases}$$

(voir *fig. 3.10*).

3.4. CONTRAINTE NORMALE $\vec{\sigma}$ ET CONTRAINTE TANGENTIELLE $\vec{\tau}$

Nous noterons, relation (1) que la contrainte est une grandeur vectorielle. Sa direction est généralement différente de celle de la normale extérieure orientée $\vec{n}$ à la facette ΔS *(fig. 3.11)*.

On appelle contrainte normale $\vec{\sigma}$ la projection de $\vec{C}(M, \vec{n})$ sur la normale extérieure $\vec{n}$.
On appelle contrainte tangentielle $\vec{\tau}$ la projection de $C(M, \vec{n})$ sur le plan de la facette ΔS.

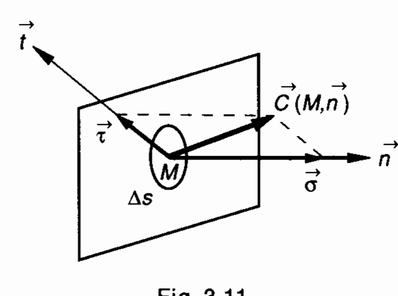


Fig. 3.11.

Supposons *(fig. 3.11)* que $\vec{t}$ désigne le vecteur unitaire de la direction sur laquelle est projetée $\vec{\tau}$. On peut alors écrire :

$$\vec{C}(M, \vec{n}) = \sigma \cdot \vec{n} + \tau \cdot \vec{t} \qquad (2)$$

σ et τ sont alors les composantes algébriques de la contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$ dans le repère $(M, \vec{n}, \vec{t})$.

Propriété

En statique, nous avons mis en évidence le théorème des actions réciproques.

Si **1** exerce sur **2** en A un effort noté $\vec{A}(1 \to 2)$, alors réciproquement, **2** exerce sur **1** en A un effort noté $\vec{A}(2 \to 1)$. Ces deux efforts sont tels que :

$$\vec{A}(1 \to 2) = -\vec{A}(2 \to 1).$$

En résistance des matériaux on peut écire en M centre de la facette orientée par $\vec{n}$ (voir *fig. 3.10*) :

$$\overrightarrow{df}(E_2 \to E_1) = \vec{C}(M, \vec{n})\, dS.$$

On écrirait de la même façon en M centre de la facette orientée par $-\vec{n}$:

$$\overrightarrow{df}(E_1 \to E_2) = \vec{C}(M, -\vec{n})\, dS.$$

Si nous appliquons le théorème des actions réciproques :

$$\overrightarrow{df}(E_2 \to E_1) = -\overrightarrow{df}(E_1 \to E_2)$$

soit en simplifiant par dS :

$$\vec{C}(M, \vec{n}) = -\vec{C}(M, -\vec{n})$$

ou bien

$$\vec{C}(M, -\vec{n}) = -\vec{C}(M, \vec{n}) \qquad (3)$$

3.5. RÉCIPROCITÉ DES CONTRAINTES TANGENTIELLES. THÉORÈME DE CAUCHY

Dans une poutre sollicitée de façon quelconque, considérons un prisme droit élémentaire de centre M, *(fig. 3.12)*.

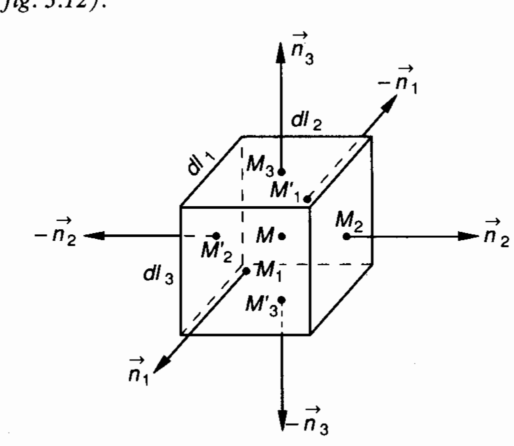


Fig. 3.12.

Les facettes de ce prisme droit sont rectangulaires et on définit pour chacune d'elles un centre et un vecteur unitaire de normale extérieure.

Exemple : facette de centre M_1 de normale $\vec{n}_1$ de surface $dS_1 = dl_2 \times dl_3$.

Si dl_1, dl_2, dl_3 tendent vers zéro, on peut écrire :

$$\vec{C}(M_1, \vec{n}_1) = \vec{C}(M, \vec{n}_1)$$
$$\vec{C}(M'_1, -\vec{n}_1) = \vec{C}(M, -\vec{n}_1)$$

et d'après la relation (3) ci-dessus :

$$\vec{C}(M, -\vec{n}_1) = -\vec{C}(M, \vec{n}_1).$$

Considérons les éléments de réduction en M du torseur $\{\mathcal{T}_{1\,coh}\}$ des forces de cohésion qui s'exercent sur la facette de centre M_1 :

$$\{\mathcal{T}_{1\,coh}\} = {}_M\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\iint_{dS_1} \vec{C}(M, \vec{n}_1)\, ds \\ \displaystyle\iint_{dS_1} \overrightarrow{MM_1} \wedge \vec{C}(M, \vec{n}_1)\, ds \end{array}\right\}.$$

On peut écrire les six torseurs de la même façon.

• Le prisme de centre M est en équilibre, on peut donc écrire que la somme en M des six torseurs de cohésion qui s'exercent sur les six facettes est un torseur nul.

$$\{\mathcal{T}_{1\,coh}\} + \{\mathcal{T}_{2\,coh}\} + \cdots = \{\vec{0}\}.$$

Ecrivons seulement l'équation des moments en groupant deux à deux les termes relatifs aux facettes opposées ; en effet : $ds_1 = ds_1'$

$$\iint_{dS_1} [\overrightarrow{MM_1} \wedge \vec{C}(M, \vec{n}_1)\, ds + \overrightarrow{MM_1'} \wedge \vec{C}(M, -\vec{n}_1)\, ds] + \cdots = \vec{0} \quad \text{(3 termes)}$$

soit d'après la relation (3) :

$$\iint_{dS_1} [\overrightarrow{MM_1} \wedge \vec{C}(M, \vec{n}_1)\, ds - \overrightarrow{MM_1'} \wedge \vec{C}(M, \vec{n}_1)\, ds] + \cdots = \vec{0} \quad \text{(3 termes)}$$

on peut mettre $\vec{C}(M, \vec{n}_1)$ en facteur :

$$\iint_{dS_1} \overrightarrow{M_1'M_1} \wedge \vec{C}(M, \vec{n}_1)\, ds + \cdots = \vec{0} \qquad \text{(3 termes)}$$

Considérons la projection des trois vecteurs de cette somme sur $\vec{n}_3$ par exemple :

$$\iint_{dS_1} (\overrightarrow{M_1'M_1} \wedge \vec{C}(M, \vec{n}_1)\, ds) \cdot \vec{n}_3 + \iint_{dS_2} (\overrightarrow{M_2'M_2} \wedge \vec{C}(M, \vec{n}_2)\, ds) \cdot \vec{n}_3 + \iint_{dS_3} (\overrightarrow{M_3'M_3} \wedge \vec{C}(M, \vec{n}_3)\, ds) \cdot \vec{n}_3 = 0 .$$

Utilisons la propriété de permutation du produit mixte :

$$(\overrightarrow{M_1'M_1}, \vec{C}(M, \vec{n}_1)\, ds, \vec{n}_3) = (\vec{n}_3, \overrightarrow{M_1'M_1}, \vec{C}(M, \vec{n}_1)\, ds)$$

On peut donc écrire :

$$\iint_{dS_1} (\vec{n}_3 \wedge \overrightarrow{M_1'M_1}) \cdot \vec{C}(M, \vec{n}_1)\, ds + \iint_{dS_2} (\vec{n}_3 \wedge \overrightarrow{M_2'M_2}) \cdot \vec{C}(M, \vec{n}_2)\, ds + \iint_{dS_3} (\vec{n}_3 \wedge \overrightarrow{M_3'M_3}) \cdot \vec{C}(M, \vec{n}_3)\, ds = 0 .$$

Les trois produits vectoriels s'expriment simplement :

$$\vec{n}_3 \wedge \overrightarrow{M_1'M_1} = dl_1\, \vec{n}_2$$
$$\vec{n}_3 \wedge \overrightarrow{M_2'M_2} = -\, dl_2\, \vec{n}_1$$
$$\vec{n}_3 \wedge \overrightarrow{M_3'M_3} = \vec{0} .$$

Donc :

$$\iint_{dS_1} dl_1\, ds\, \vec{C}(M, \vec{n}_1) \cdot \vec{n}_2 - \iint_{dS_2} dl_2\, ds\, \vec{C}(M, \vec{n}_2) \cdot \vec{n}_1 = 0 .$$

Dans les facettes de surface dS_1 et dS_2, les contraintes $\vec{C}(M, \vec{n}_1)$ et $\vec{C}(M, \vec{n}_2)$ sont constantes

$$\vec{C}(M, \vec{n}_1) \cdot \vec{n}_2 \iint_{dS_1} dl_1\, ds - \vec{C}(M, \vec{n}_2) \cdot \vec{n}_1 \iint_{dS_2} dl_2\, ds = 0 .$$

On peut en désignant par dV le volume du prisme élémentaire écrire que :

$$\iint_{dS_1} dl_1\, ds = \iint_{dS_2} dl_2\, ds = dV$$

et donc :

$$\boxed{\vec{C}(M, \vec{n}_1) \cdot \vec{n}_2 = \vec{C}(M, \vec{n}_2) \cdot \vec{n}_1} \qquad (4)$$

ou que :

$$\boxed{\tau_{12} = \tau_{21}} .$$

Cette relation traduit le **théorème de Cauchy.**

En un point M d'une poutre, si on considère deux facettes perpendiculaires dont les sections sont orientées par les normales extérieures $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ auxquelles correspondent les contraintes $\vec{C}(M, \vec{n}_1)$ et $\vec{C}(M, \vec{n}_2)$, la projection de $\vec{C}(M, \vec{n}_1)$ sur $\vec{n}_2$ est égale à la projection de $\vec{C}(M, \vec{n}_2)$ sur $\vec{n}_1$.

Notons que ces contraintes tangentielles doivent être disposées symétriquement par rapport à l'arête des facettes *(fig. 3.13)*.

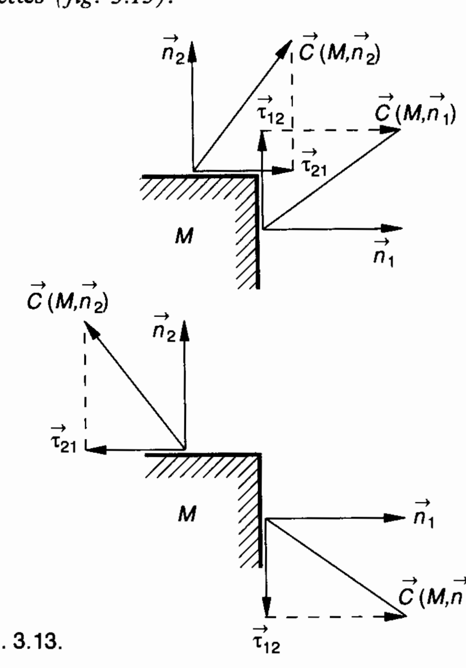


Fig. 3.13.

4. ÉTAT DE CONTRAINTE EN UN POINT. NOTIONS D'ÉLASTICITÉ PLANE

4.1. LIMITES DE L'ÉTUDE

L'élasticité plane concerne théoriquement les corps à deux dimensions ; plaques minces soumises à des forces extérieures situées dans leur plan.
Ce cas limite peut être étendu à des corps dont les déformations s'effectuent parallèlement à un plan. Soit $(O, \vec{x}, \vec{y})$ ce plan. On conçoit que les contraintes et les déformations en $M(x, y, z)$ sont indépendantes de z.
L'étude se fait alors sur un corps d'épaisseur unité suivant $\vec{z}$ *(fig. 3.14)*.

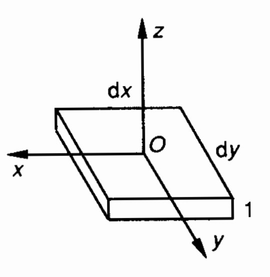


Fig. 3.14.

4.2. EXPRESSION DE LA CONTRAINTE EN FONCTION DE L'ORIENTATION DE LA FACETTE

Considérons un prisme droit (E) dont la section est un triangle rectangle élémentaire et dont l'épaisseur parallèlement à $(O, \vec{z})$ vaut l'unité *(fig. 3.15)*.

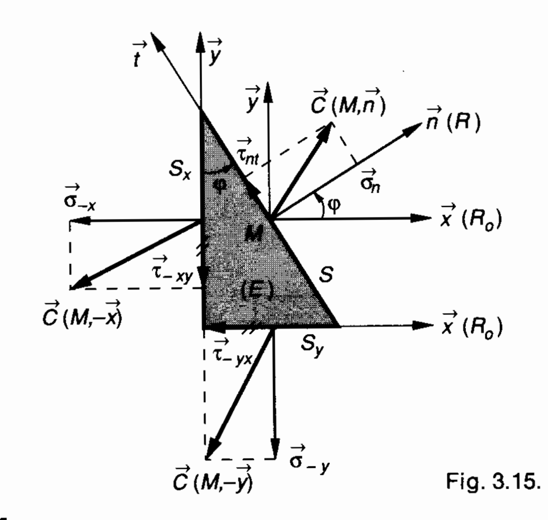


Fig. 3.15.

Les trois facettes S, S_x, S_y sont infiniment petites et on voit que :

$$S_x = S \cos \varphi \quad \text{et} \quad S_y = S \sin \varphi \, .$$

Soit M le centre de surface de la facette S orientée par la normale $\vec{n}$. Exprimons la contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$ en fonction de l'angle φ orientant la facette et des contraintes $\vec{C}(M, -\vec{x})$ et $\vec{C}(M, -\vec{y})$ sur les deux facettes perpendiculaires.
Soit (E) le prisme en équilibre. Traduisons cet équilibre par :

$$\left\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E)\right\} = \left\{\vec{0}\right\} .$$

Soit pour la résultante :

$$\vec{C}(M, \vec{n})\, S + \vec{C}(M, -\vec{x})\, S_x + \vec{C}(M, -\vec{y})\, S_y = \vec{0} \, . \quad (1)$$

Convention de signe pour les contraintes

Nous allons adopter pour les contraintes normales et tangentielles une convention d'indice et de signe qui permet de respecter le théorème de Cauchy *(fig. 3.16)*.

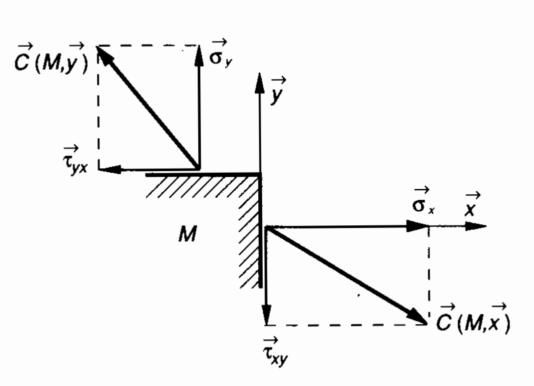


Fig. 3.16.

Sur les deux facettes perpendiculaires au point M, construisons les deux contraintes $\vec{C}(M, \vec{x})$ et $\vec{C}(M, \vec{y})$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ orientent les deux facettes.
On peut écrire :

$$\vec{C}(M, \vec{x}) = \vec{\sigma}_{xx} + \vec{\tau}_{xy}$$

avec pour convention d'indice :

1re indice = le vecteur unitaire de la normale extérieure à la facette.
2e indice = le vecteur unitaire de l'axe sur lequel est projetée la contrainte.

Pour les contraintes normales, les deux indices sont toujours identiques, on n'en met qu'un seul.

Pour les contraintes tangentielles, les deux indices sont toujours différents. $\vec{\tau}_{xy}$ signifie : contrainte tangentielle relative à la facette orientée par $\vec{x}$ (premier indice) et projetée sur $\vec{y}$ (2e indice).
On écrira donc *(fig. 3.15) :*

$$\vec{C}(M, -\vec{x}) = \sigma_{-x}\vec{x} + \tau_{-xy}\vec{y},$$

De même :

$$\vec{C}(M, -\vec{y}) = \sigma_{-y}\vec{y} + \tau_{-yx}\vec{x}.$$

D'après le théorème de Cauchy :

$$\tau_{-xy} = \tau_{-yx}.$$

Nous avons vu au *paragraphe 3.4* et d'après le théorème des actions réciproques que

$$\vec{C}(M, -\vec{n}) = -\vec{C}(M, \vec{n}).$$

On pourra donc écrire :

$$\vec{C}(M, -\vec{x}) = -\vec{C}(M, \vec{x}) = -(\sigma_x\vec{x} + \tau_{xy}\vec{y})$$

et donc pour l'équation (1) ci-dessus :

$$(\sigma_n\vec{n} + \tau_{nt}\vec{t})\,S - (\sigma_x\vec{x} + \tau_{xy}\vec{y})\,S_x - (\sigma_y\vec{y} + \tau_{yx}\vec{x})\,S_y = 0.$$

Projetons les vecteurs de cette équation sur les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $(\mathcal{R}_0)$ en remarquant que :

$$\vec{n} = \cos\varphi\,\vec{x} + \sin\varphi\,\vec{y}$$
$$\vec{t} = -\sin\varphi\,\vec{x} + \cos\varphi\,\vec{y}$$
$$S_x = S\cos\varphi$$
$$S_y = S\sin\varphi.$$

On obtient alors :

$$\begin{cases}\sigma_n\cos\varphi - \tau_{nt}\sin\varphi - \sigma_x\cos\varphi - \tau_{yx}\sin\varphi = 0\\ \sigma_n\sin\varphi + \tau_{nt}\cos\varphi - \tau_{xy}\cos\varphi - \sigma_y\sin\varphi = 0\end{cases} \quad (2)$$

Pour calculer σ_n et τ_{nt} composantes, dans le repère $\mathcal{R} = (M, \vec{n}, \vec{t})$ lié à la facette (S), de la contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$, on peut résoudre le système (2). Notons qu'il est commode d'utiliser les lignes trigonométriques de l'arc 2φ. Posons $\tau_{yx} = \tau_{xy}$.
Exprimons $\vec{C}(M, \vec{n})$ dans $(\mathcal{R})$:

4.3. DIRECTIONS PRINCIPALES ET CONTRAINTES PRINCIPALES

Une contrainte est dite principale lorsque sa direction est normale au plan de la facette. Sur la *figure 3.15,* la condition pour que $\vec{C}(M, \vec{n})$ soit contrainte principale est que $\tau_{nt} = 0$. Cette condition permet de définir l'angle φ pour qu'il en soit ainsi. Soit φ_1 cette valeur particulière de φ. D'après (3) :

$$\boxed{\tan 2\varphi_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}}. \quad (4)$$

L'équation (4) donne les deux directions principales perpendiculaires φ_1 et $\varphi_1 + \frac{\pi}{2}$. Ces deux directions définissent le repère principal $\mathcal{R}_1 = (M, \vec{X}, \vec{Y})$ tel que : $\varphi_1 = (\vec{x}, \vec{X})$.

Calcul des contraintes principales

Remplaçons $\sin 2\varphi$ et $\cos 2\varphi$ en fonction de leur valeur dans les expressions (3) et en fonction de (4) :

$$\cos^2 2\varphi_1 = \frac{1}{1 + \tan^2 2\varphi_1} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$
$$\sin^2 2\varphi_1 = \frac{\tan^2 2\varphi_1}{1 + \tan^2 2\varphi_1} = \frac{4\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

On trouve successivement :

$$\begin{cases}\sigma_X = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\\[2ex] \sigma_Y = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\end{cases} \quad (5)$$

On montre également que σ_X et σ_Y sont les extremums de la fonction σ_n ; pour cela il suffit d'écrire que $\dfrac{d\sigma_n}{d\varphi} = 0$, ce qui donne $\tan 2\varphi_1 = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$.

$$\vec{C}(M, \vec{n}) \text{ dans } (\mathcal{R}) \begin{cases}\sigma_n = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi\\[2ex] \tau_{nt} = -\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi.\end{cases} \quad (3)$$

4.4. CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES DE MÖHR

Deux problèmes se posent successivement ; pour chacun d'eux, nous indiquerons :

le procédé de calcul ;

la construction graphique qui conduit plus rapidement au résultat.

4.4.1. Premier problème

Dans un repère initial qui n'a en général rien de particulier $\mathcal{R}_0 = (M, \vec{x}, \vec{y})$ on connaît l'état de contrainte σ_x, σ_y et τ_{xy}. Déterminer les directions principales et les contraintes principales.

Procédé de calcul

D'après les relations (3), (4) et (5) ci-dessus, on trouve :

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \qquad \varphi_1 = (\vec{x}, \vec{X}).$$

$\mathcal{R}_1 = (M, \vec{X}, \vec{Y})$ est le repère en M des directions principales.

Les contraintes principales σ_X et σ_Y s'expriment alors par :

$$\sigma_X = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_Y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Construction de Möhr *(fig. 3.17)*

Sur $(M, \vec{x})$ construisons

$$\overline{MP} = \sigma_x; \quad \overline{MQ} = \sigma_y; \quad \overline{MO} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$$

On aura donc : $\overline{OP} = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$.

Parallèlement à $(M, \vec{y})$ construisons $\overline{PS} = \tau_{xy}$.

Fig. 3.17.

On remarque alors que :

$$\tan \widehat{POS} = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \tan 2\varphi_1,$$

donc : $\widehat{POS} = 2\varphi_1$.

D'où le repère principal en M : $\mathcal{R}_1 = (M, \vec{X}, \vec{Y})$.

D'autre part, construisons le cercle de Möhr de centre O et de rayon $R = OS$:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

soit $$R = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Soit AB le diamètre du cercle de Möhr pris sur $(M, \vec{x})$.

On remarque que :

$$\overline{MA} = \overline{MO} + R, \quad \overline{MB} = MO - R,$$

soit

$$\overline{MA} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sigma_X$$

$$\overline{MB} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sigma_Y$$

4.4.2. Deuxième problème

Supposons maintenant qu'au point M on connaisse les contraintes principales σ_X et σ_Y ; par définition on sait que $\tau_{XY} = 0$. Déterminer pour une facette orientée par $\vec{n}$ tel que $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi$ les contraintes σ_n et τ_{nt} correspondantes.

Procédé de calcul

Utilisons les relations (3) pour exprimer $\vec{C}(M, \vec{n})$ dans le repère $\mathcal{R} = (M, \vec{n}, \vec{t})$.

Les contraintes connues sont alors σ_X et σ_Y et l'angle φ vaut alors $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi$.

Exprimons $\vec{C}(M, \vec{n})$ dans $(\mathcal{R})$:

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\cos 2\varphi \\ \tau_{nt} &= -\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\sin 2\varphi \end{aligned}\right. \qquad (6)$$

Contrainte tangentielle maximale
D'après les relations (6), $|\tau_{nt}|$ est maximale quand $\sin 2\varphi = 1$ soit pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

alors $$|\tau_{nt}|_{\max} = \left|\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\right|.$$

Construction du cercle de Möhr

Notons *a priori* que dans les relations (5) : $\sigma_X > \sigma_Y$.
Sur l'axe principal $(M, \vec{X})$ construisons *(fig. 3.18)* :

$$\overline{MA} = \sigma_X$$
$$\overline{MB} = \sigma_Y$$
$$\overline{MO} = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2}.$$

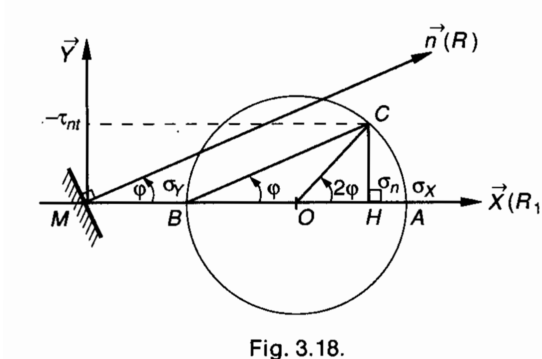


Fig. 3.18.

Le cercle de centre O et de diamètre AB a un rayon égal à :

$$R = \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}.$$

Soit en M une facette orientée par $\vec{n}$ tel que $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi$.
Construisons par B la parallèle à $\vec{n}$ et soit C son intersection, avec le cercle de Möhr.
Soit H la projection de C sur $(M, \vec{X})$.
Calculons $\overline{MH}$:

$$\overline{MH} = \overline{MO} + \overline{OH}$$
$$= \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\cos 2\varphi = \sigma_n.$$

Calculons $\overline{HC}$:

$$\overline{HC} = \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \cdot \sin 2\varphi = -\tau_{nt}.$$

Le cercle de Möhr permet de lire directement :

$$\begin{cases} \sigma_n = \overline{MH} \\ \tau_{nt} = -\overline{HC} \end{cases}.$$

Notons sur la *figure 3.18* que sur $(M, \vec{X})$ les contraintes normales σ sont algébriques et que sur $(M, \vec{Y})$ on lit les contraintes tangentielles (changées de signe).

4.5. APPLICATION

Dans un repère initial $\mathcal{R}_0 = (M, \vec{x}, \vec{y})$ on connaît les valeurs des contraintes normales et tangentielles sur les facettes orientées par $\vec{x}$ et $\vec{y}$ (voir *fig. 3.15*).
On donne : $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 1$, $\tau_{xy} = 2$.

Nota : Ces valeurs ont été choisies dans le but de simplifier les calculs.

QUESTION 1

Soit en M une facette orientée par $\vec{n}$ tel que $(\vec{x}, \vec{n}) = \varphi$. Exprimer la contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$ par ses composantes σ_n et τ_{nt} dans le repère associé $\mathcal{R} = (M, \vec{n}, \vec{t})$.

RÉPONSE

D'après les relations (3) :

$$\underset{(\mathcal{R})}{\vec{C}(M, \vec{n})} \begin{cases} \sigma_n = 1 + 2\sin 2\varphi \\ \tau_{nt} = 2\cos 2\varphi \end{cases}.$$

QUESTION 2

Déterminer le repère $\mathcal{R}_1 = (M, \vec{X}, \vec{Y})$ des directions principales et calculer les contraintes principales σ_X et σ_Y.

RÉPONSE

D'après la relation (4)

$$\tan 2\varphi_1 = \infty, \quad \text{donc} \quad 2\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Directions principales $$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \\ \varphi_2 = \frac{3\pi}{4} \end{cases}.$$

Contraintes principales

D'après les relations (5) : $$\begin{cases} \sigma_X = 3 \\ \sigma_Y = -1 \end{cases}.$$

QUESTION 3

Calculer la contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$ pour une facette orientée par $\vec{n}$ tel que $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi = -\frac{\pi}{4}$.

RÉPONSE

D'après les relations (6) :

$$\underset{(\mathcal{R})}{\vec{C}(M, \vec{n})} \begin{cases} \sigma_n = 1 \\ \tau_{nt} = 2 \end{cases}.$$

QUESTION 4

Retrouvons le résultat précédent en utilisant la construction graphique de Möhr.

RÉPONSE *(fig. 3.19)*

Le repère $\mathcal{R}_1 = (M, \vec{X}, \vec{Y})$ est connu ainsi que les contraintes principales correspondantes.
Sur l'axe $(M, \vec{X})$ construisons :

$$\overline{MA} = \sigma_X = 3 \qquad \overline{MB} = \sigma_Y = -1 .$$

$(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi = -\frac{\pi}{4}$

Fig. 3.19.

Le cercle de centre O et de dimaètre AB a pour rayon :

$$R = \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} = 2 .$$

On mesure : $\begin{cases} \sigma_n = \overline{MH} = 1 \\ \tau_{nt} = -\overline{HC} = 2 \end{cases}$.

Conclusion

Cet exercice montre qu'à partir de la connaissance des contraintes sur deux facettes perpendiculaires, on peut déterminer graphiquement la contrainte sur une facette quelconque.

4.6. RÉPARTITION DES CONTRAINTES. ELLIPSE DE LAMÉ

Supposons connues les directions principales $\mathcal{R}_1 = (M, \vec{X}, \vec{Y})$ ainsi que les contraintes principales correspondantes σ_X et σ_Y.
Considérons une facette centrée en M et orientée par $\vec{n}$ tel que $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi$.
Les relations (6) du *paragraphe 4.4* permettent d'écrire les composantes de la contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$ dans le repère $\mathcal{R}$ lié à la facette : $\mathcal{R} = (M, \vec{n}, \vec{t})$
Exprimons $\vec{C}(M, \vec{n})$ dans $(\mathcal{R})$:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \cos 2\varphi \\ \tau_{nt} &= -\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \sin 2\varphi \end{aligned}} \qquad (7)$$

Nous allons effectuer un changement de base et exprimer les composantes de $\vec{C}(M, \vec{n})$ dans le repère principal $\mathcal{R}_1 = (M, \vec{X}, \vec{Y})$ *(fig. 3.20)*.

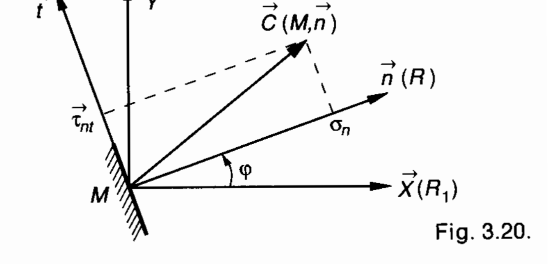


Fig. 3.20.

Pour cela posons :

$$\vec{n} = \cos\varphi\, \vec{X} + \sin\varphi\, \vec{Y}$$
$$\vec{t} = -\sin\varphi\, \vec{X} + \cos\varphi\, \vec{Y} .$$

Dans $\mathcal{R}$, $\vec{C}(M, \vec{n})$ s'écrit :

$$\vec{C}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_{nt} \vec{t} .$$

Dans $\mathcal{R}_1$, $\vec{C}(M, \vec{n})$ s'écrit :

$$\vec{C}(M, \vec{n}) = (\sigma_n \cos\varphi - \tau_{nt} \sin\varphi)\, \vec{X} + (\sigma_n \sin\varphi + \tau_{nt} \cos\varphi)\, \vec{Y} .$$

Soit d'après (7) et après simplifications :

$$\boxed{\vec{C}(M, \vec{n}) = \sigma_X \cos\varphi\, \vec{X} + \sigma_Y \sin\varphi\, \vec{Y}} . \qquad (8)$$

Recherchons dans le plan, le lieu de l'extrémité du vecteur $\vec{C}(M, \vec{n})$.
Ses coordonnées dans $\mathcal{R}_1 = (M, \vec{X}, \vec{Y})$ sont :

$$\vec{C}(M, \vec{n}) \begin{cases} X = \sigma_X \cos\varphi \\ Y = \sigma_Y \sin\varphi . \end{cases}$$

Eliminons le paramètre φ en écrivant que : $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ soit

$$\boxed{\frac{X^2}{\sigma_X^2} + \frac{Y^2}{\sigma_Y^2} = 1} . \qquad (9)$$

Cette équation est l'équation de l'ellipse de Lamé dont les axes sont portés par les axes du repère principal *(fig. 3.21)*.

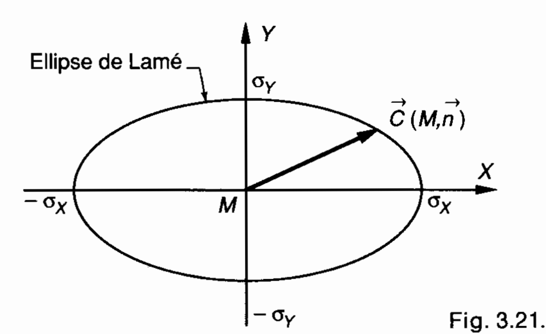


Fig. 3.21.

5. LOI DE HOOKE

5.1. RAPPEL DE RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Dans un solide à l'état naturel, c'est-à-dire ne supportant aucune charge on admet que les contraintes et les déformations sont nulles.
Pour les matériaux tels que aciers, fontes, alliages... les métaux en général et à condition de rester dans le domaine élastique, nous admettrons que les contraintes sont proportionnelles aux déformations unitaires.

5.2. ÉTUDE DES DÉFORMATIONS LIÉES À L'EXISTENCE D'UNE CONTRAINTE NORMALE σ_x

Considérons une plaque rectangulaire de faible épaisseur soumise à une extension selon une direction principale de contrainte *(fig. 3.22)*.

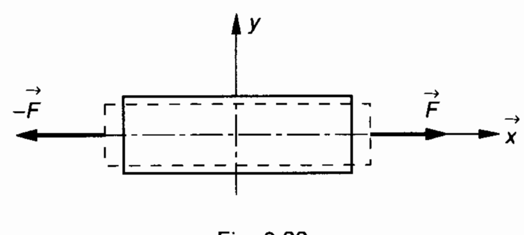


Fig. 3.22.

On observe dans la direction principale $\vec{x}$ un allongement et dans la direction principale perpendiculaire $\vec{y}$ une contraction.
On note :

$$\boldsymbol{\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x} \qquad \boldsymbol{\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x}.$$

avec

- σ_x = contrainte normale principale (en MPa) ;
- ε_x = allongement relatif suivant $\vec{x}$ (sans unité) ;
- E = module de Young (en MPa) ;
- ε_y = contraction suivant $\vec{y}$ (ou raccourcissement) (sans unité) ;
- ν = coefficient de Poisson. Suivant les matériaux $0{,}1 \leq \nu \leq 0{,}5$. Pour les aciers on prend généralement $\nu = 0{,}3$.

5.3. EXTENSION ET COMPRESSION SUIVANT DEUX DIRECTIONS PERPENDICULAIRES

Considérons une plaque rectangulaire soumise à des actions mécaniques réparties sur ses 4 faces perpendiculaires au plan de la *figure 3.23*.

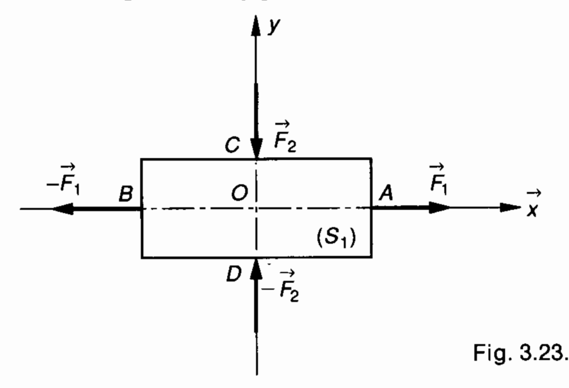


Fig. 3.23.

Sur la face (S_1) de centre A, les actions mécaniques extérieures se réduisent à un glisseur $\{\mathcal{T}_1\}$ tel que :

$$\{\mathcal{T}_1\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{F}_1 \\ \vec{0}\end{Bmatrix} \qquad \text{avec } \vec{F}_1 = F_1\,\vec{x}.$$

De la même façon, sur les trois autres faces :

$$\{\mathcal{T}_2\} = {}_C\begin{Bmatrix}\vec{F}_2 \\ \vec{0}\end{Bmatrix} \qquad \text{avec } \vec{F}_2 = -F_2\,\vec{y}$$

$$\{\mathcal{T}_3\} = {}_B\begin{Bmatrix}-\vec{F}_1 \\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}_4\} = {}_D\begin{Bmatrix}-\vec{F}_2 \\ \vec{0}\end{Bmatrix}.$$

Le repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$ est un repère principal et les contraintes $\vec{\sigma}_x$ et $\vec{\sigma}_y$ sont des contraintes principales.
Les déformations unitaires suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ s'expriment par ε_x et ε_y.
D'après le principe de superposition, la déformation globale est due, d'une part à l'effort normal d'extension N_1 suivant $\vec{x}$ d'autre part à l'effort normal de compression N_2 suivant $\vec{y}$

$$N_1 = \|\vec{F}_1\|; \qquad N_2 = -\|\vec{F}_2\|.$$

• Exprimons les déformations ε_{1x} et ε_{1y} dues à N_1 :

suivant $\vec{x}$: $\quad \varepsilon_{1x} = \dfrac{\sigma_x}{E}$

suivant $\vec{y}$: $\quad \varepsilon_{1y} = -\nu\,\varepsilon_{1x} = -\nu\,\dfrac{\sigma_x}{E}$

• Exprimons les déformations ε_{2x} et ε_{2y} dues à N_2 :

suivant $\vec{y}$: $\varepsilon_{2y} = \dfrac{\sigma_y}{E}$

suivant $\vec{x}$: $\varepsilon_{2x} = -\nu\varepsilon_{2y} = -\nu\dfrac{\sigma_y}{E}$.

• Appliquons le principe de superposition pour écrire les déformations totales suivant $\vec{x}$ et suivant $\vec{y}$:

suivant $\vec{x}$: $\varepsilon_x = \varepsilon_{1x} + \varepsilon_{2x} = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E}$

suivant $\vec{y}$: $\varepsilon_y = \varepsilon_{1y} + \varepsilon_{2y} = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} + \dfrac{\sigma_y}{E}$.

Regroupons les résultats concernant les déformations :

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \end{aligned}} \qquad (1)$$

A partir de ces relations, exprimons les contraintes :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \end{aligned}} \qquad (1')$$

5.4. ÉTAT DE CISAILLEMENT PUR

Nous avons vu au *paragraphe 4.4.2* (relations 6) qu'en élasticité plane les contraintes normales et tangentielles relatives à une facette oreintée par $\vec{n}$ tel que $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi$ s'expriment dans le repère $\mathfrak{R} = (M, \vec{n}, \vec{t})$ par ;

Exprimons $\vec{C}(M, \vec{n})$ dans $(\mathfrak{R})$:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\cos 2\varphi \\ \tau_{nt} &= -\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\sin 2\varphi \end{aligned}} \qquad (2)$$

σ_X et σ_Y sont les contraintes principales.

Plaçons-nous dans le cas très particulier où $\sigma_Y = -\sigma_X$ pour cela, considérons une plaque rectangulaire tendue suivant $\vec{X}$ et comprimée suivant $\vec{Y}$; $(O, \vec{X}, \vec{Y})$ étant alors le repère principal *(fig. 3.24)*.

Fig. 3.24.

Supposons que les contraintes principales suivant $\vec{X}$ et suivant $\vec{Y}$ soient telles que $\sigma_Y = -\sigma_X$.

Les relations (2) ci-dessus s'écrivent alors dans le repère $\mathfrak{R} = (O, \vec{n}, \vec{t})$:

$$\boxed{\begin{matrix} \vec{C}(M, \vec{n}) \\ (\mathfrak{R}) \end{matrix} \begin{cases} \sigma_n = \dfrac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\cos 2\varphi \\ \tau_{nt} = -\dfrac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\sin 2\varphi \end{cases}} \qquad (3)$$

Notons que pour une facette orientée par $\vec{n}$, tel que $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi$ et pour les valeurs particulières $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{4}$:

$$\sigma_n = 0 \quad \text{et} \quad |\tau_{nt}| = |\sigma_X|.$$

La construction graphique de Möhr permet de visualiser ce cas très particulier. Pour $\varphi_1 = +\dfrac{\pi}{4}$ par exemple, *(fig. 3.25)*.

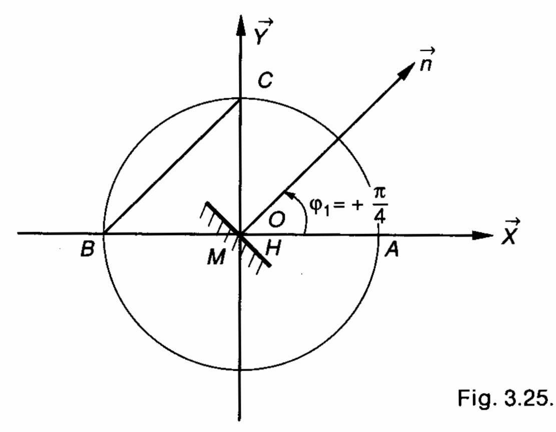


Fig. 3.25.

Construisons sur l'axe $(M, \vec{X})$ du repère principal :

$$\overline{MA} = \sigma_X$$

$$\overline{MB} = \sigma_Y = -\sigma_X$$

$$\overline{MO} = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} = 0$$

et le cercle de Möhr de diamètre AB et de rayon $R = \dfrac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} = \sigma_X$.

Alors, pour la facette orientée par $\vec{n}$ tel que $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi_1 = + \frac{\pi}{4}$:

$$\vec{C}(M, \vec{n}) \left(\varphi_1 = \frac{\pi}{4}\right) \begin{cases} \sigma_n = \overline{MH} = 0 \\ \tau_{nt} = - \overline{HC} = - \sigma_X \end{cases} .$$

De la même façon, pour la facette perpendiculaire orientée par $\vec{n}'$ tel que $(\vec{X}, \vec{n}') = \varphi_2 = - \frac{\pi}{4}$:

$$\vec{C}(M, \vec{n}') \left(\varphi_2 = - \frac{\pi}{4}\right) \begin{cases} \sigma_{n'} = 0 \\ \tau_{n't'} = \sigma_X \end{cases} .$$

Si à l'intérieur de la plaque nous isolons un carré élémentaire $ABCD$ de centre O, dont les facettes sont inclinées à 45° par rapport au repère principal, celui-ci est en équilibre sous la seule action d'efforts de cohésion tangentiels. Le carré $ABCD$ se déforme et devient le losange $A'B'C'D'$ *(fig. 3.26)*.

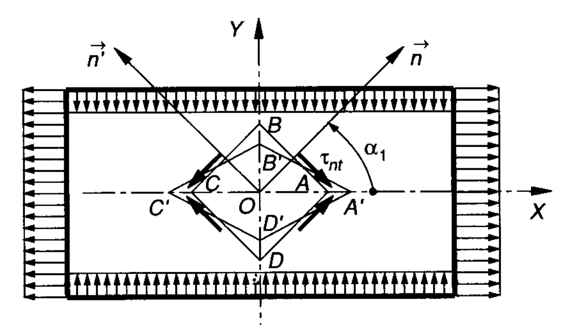


Fig. 3.26.

L'état de contrainte très particulier examiné ici est appelé **état de cisaillement pur.**

Examinons la déformation de cisaillement pur dans le carré $ABCD$. Visualisons cette déformation en superposant les deux figures du carré, avant et après déformation. Faisons coïncider pour cela les côtés CD et $C'D'$ *(fig. 3.27)*.

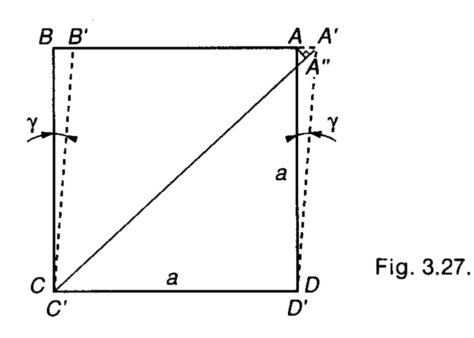


Fig. 3.27.

La déformation relative s'exprime par $\gamma = \widehat{ADA'}$.

D'après la loi de Hooke relative aux contraintes tangentielles τ :

$$\boxed{\tau = G\gamma}$$

Exprimons le module d'élasticité transversale (ou module de Coulomb) en fonction du module d'élasticité longitudinale E (ou module de Young).

Nous venons de voir que :

$$\sigma_X = - \sigma_Y = \tau .$$

Désignons par a les côtés du carré et du losange. Il existe entre la déformation relative des diagonales et l'angle γ une relation que nous allons établir. Soit ε_X la déformation relative suivant $\vec{X}$

$$\varepsilon_X = \frac{\sigma_X}{E}(1 + \nu) = \frac{\tau}{E}(1 + \nu) .$$

D'autre part :

$$AA' = a\gamma , \quad A'A'' \approx AA' \cos 45°$$

soit :
$$A'A'' \approx a\gamma \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

or
$$\frac{A'A''}{AC} = \varepsilon_X , \quad \text{donc} \quad A'A'' = \varepsilon_X a \sqrt{2} . \quad (4)$$

En égalant (3) et (4) : $\gamma = 2\,\varepsilon_X$.

Nous avons vu que : $\gamma = \frac{\tau}{G}$ et $\varepsilon_X = \frac{\tau}{E}(1 + \nu)$.

En éliminant τ, γ et ε_X :

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1 + \nu)}}$$

5.5. LOI DE HOOKE GÉNÉRALISÉE EN ÉLASTICITÉ PLANE

Regroupons les relations obtenues entre les contraintes et les déformations relatives.

Expression des déformations relatives :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma &= \frac{\tau}{G} . \end{aligned} \quad \textbf{(4)}$$

Expression des contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau &= G\gamma . \end{aligned} \quad \textbf{(5)}$$

Notons que les relations ci-dessus sont vraies, pour les axes principaux ainsi que pour des axes quelconques.

5.6. PRINCIPE DE SUPERPOSITION DES EFFETS DES FORCES

Si n systèmes de forces extérieures indépendants provoquent séparément des déformations élastiques et des contraintes, leur application simultanée (à condition de rester dans le domaine élastique) provoquera des déformations élastiques et des contraintes qui seront les sommes géométriques des déformations et des contraintes prises séparément.

Nous nous limiterons à cet énoncé, conséquence des démonstrations précédentes. Nous utiliserons très souvent ce résultat.

5.7. APPLICATION

Un état plan de contrainte est défini par les contraintes principales σ_X et σ_Y exprimées en mégapascal :

$$\sigma_X = 300\,, \qquad \sigma_Y = -100\,.$$

QUESTION 1

Calculer les composantes normales et tangentielles de la contrainte en M sur une facette orientée par la normale $\vec{n}$ telle que : $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi$.
Dans les deux cas :

$\varphi_1 = 60°$, **normale** $\vec{n}_1$;

$\varphi_2 = -30°$, **normale** $\vec{n}_2$.

RÉPONSE

D'après les relations (6) du *paragraphe 4.4*, on peut calculer les composants de $\vec{C}(M, \vec{n})$ dans le repère $\mathcal{R} = (M, \vec{n}, \vec{t})$ lié à la facette lorsqu'on connaît les contraintes principales. Pour $(\vec{X}, \vec{n}_1) = \varphi_1 = 60°$:

$$\vec{C}(M, \vec{n}_1)\begin{cases}\sigma_{n_1} = \dfrac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \dfrac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\cos 2\varphi_1 \\ \tau_{n_1 t_1} = -\dfrac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\sin 2\varphi_1\end{cases}$$

avec $\sigma_X = 300$ (MPa) ; $\sigma_Y = -100$ (MPa) ; $\varphi_1 = 60°$, on obtient :

$$\vec{C}(M, \vec{n}_1)\begin{cases}\sigma_{n_1} = 0 \\ \tau_{n_1 t_1} = -173{,}2\ \text{(MPa)}\end{cases}$$

et pour $(\vec{X}, \vec{n}_2) = \varphi_2 = -30°$:

$$\vec{C}(M, \vec{n}_2)\begin{cases}\sigma_{n_2} = 200\ \text{(MPa)} \\ \tau_{n_2 t_2} = 173{,}2\ \text{(MPa)}\,.\end{cases}$$

QUESTION 2

Retrouver les résultats de la question précédente en utilisant la construction graphique de Möhr.

RÉPONSE *(fig. 3.28)*

• **Pour $\varphi_1 = (\vec{X}, \vec{n}_1) = 60°$**
Construisons sur $(M, \vec{X})$:

$$\overline{MA} = \sigma_X = 300\ \text{(MPa)}$$
$$\overline{MB} = \sigma_Y = -100\ \text{(MPa)}$$
$$\overline{MO} = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} = 100\ \text{(MPa)}\,.$$

Construisons : $\widehat{ABC_1} = \varphi_1 = 60°$ et H_1, projection de C_1 sur $\vec{X}$:

On mesure : $\overline{MH_1} = \sigma_{n_1} = 0$

$-\overline{H_1C_1} = \tau_{n_1 t_1} = -173{,}2$ (MPa) .

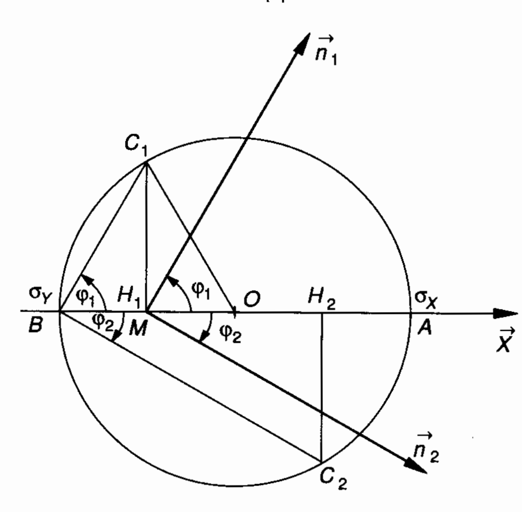


Fig. 3.28.

• **Pour $\varphi_2 = (X, \vec{n}_2) = -30°$.**
Construisons : $\widehat{ABC_2} = \varphi_2 = -30°$ et H_2 projection de C_2 sur $\vec{X}$:

On mesure : $\overline{MH_2} = \sigma_{n_2} = 200$ (MPa)

$-\overline{H_2C_2} = \tau_{n_2 t_2} = 173{,}2$ (MPa) .

QUESTION 3

Donner la représentation sur deux facettes orientées par $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ des deux contraintes $\vec{C}(M, \vec{n}_1)$ et $\vec{C}(M, \vec{n}_2)$ ainsi que leurs projections dans le repère lié à chaque facette. Vérifier le théorème de Cauchy.

RÉPONSE *(fig. 3.29)*

$\vec{C}(M, \vec{n}_1)\,.\,\vec{n}_2 = -\tau_{n_1 t_1} = 173{,}2$ (MPa).

$\vec{C}(M, \vec{n}_2)\,.\,\vec{n}_1 = \tau_{n_2 t_2} = 173{,}2$ (MPa).

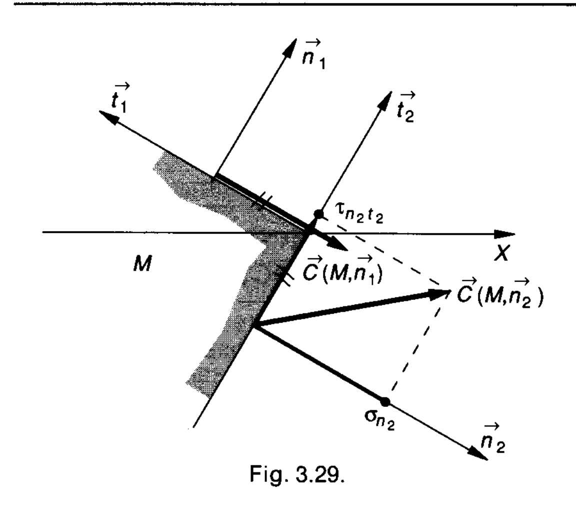


Fig. 3.29.

5.8. NOTIONS D'EXTENSOMÉTRIE

Lorsqu'une pièce mécanique est sollicitée de façon complexe, aucune mesure ne permet de déterminer les contraintes dans le matériau ; par contre, il est toujours possible à l'aide de dispositifs amplificateurs appropriés de mesurer dans telle ou telle direction de la surface extérieure de la pièce, les déformations linéaires (extension ou compression). Ces dispositifs sont des jauges de contrainte ou plus précisément des extensomètres à fils résistants. Le principe en est que la variation relative de résistance R est proportionnelle à la variation relative de sa longueur :

$$\frac{\Delta R}{R} = \lambda \frac{\Delta l}{l}.$$

Dans une direction définie par $\vec{x}$: $\dfrac{\Delta l}{l} = \varepsilon_x$.

Soit un point M de la surface extérieure non chargée de la pièce et soit $(M, \vec{z})$ la normale extérieure à la surface, $(M, \vec{z})$ est une direction principale : $(M, \vec{z}) = (M, \vec{Z})$.

Sur une telle surface, non chargée, il est possible de coller des extensomètres et de faire une étude plane des contraintes à la surface. Les paramètres qu'il faut déterminer sont :

l'angle φ des directions principales ;
les contraintes principales σ_X et σ_Y.

Pour déterminer ces trois inconnues $(\varphi, \sigma_X, \sigma_Y)$ il est nécessaire d'avoir trois mesures suivant trois directions connues et d'exploiter les résultats. On utilise industriellement des « rosettes ». Une « rosette » est un ensemble de trois extensomètres dont les directions de mesure sont définies.
On rencontre ainsi des rosettes à 120° ou des rosettes à 45° par exemple *(fig. 3.30)*.

Supposons qu'une rosette à 45° soit collée à la surface d'une pièce et que la lecture du résultat d'extensométrie dans les directions $(M, \vec{x})$; $(M, \vec{y})$; $(M, \vec{u})$ donne ε_x, ε_y, ε_u. A partir de ces trois résultats de mesure nous devons déterminer : les directions principales : $(M, \vec{X}, \vec{Y})$ telles que $(\vec{X}, \vec{x}) = \varphi$, les contraintes principales σ_X et σ_Y.

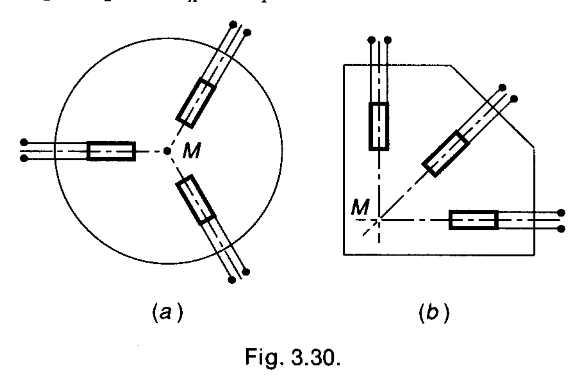


Fig. 3.30.

Définissons les angles des directions de la rosette *(fig. 3.31)*.

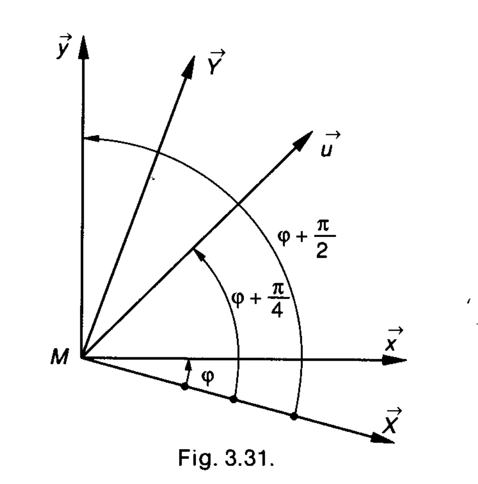


Fig. 3.31.

Nous avons vu qu'une contrainte normale σ_x peut s'exprimer en fonction des contraintes principales σ_X, σ_Y et de l'angle $\varphi = (\vec{X}, \vec{x})$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \cos 2\varphi . \qquad (6)$$

• Pour la direction $(M, \vec{y})$ avec l'angle $\varphi + \dfrac{\pi}{2}$, on notera en tenant compte que
$\cos 2\left(\varphi + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\varphi$:

$$\sigma_y = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} - \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \cos 2\varphi . \qquad (7)$$

• Pour la direction $(M, \vec{u})$ avec l'angle $\varphi + \dfrac{\pi}{4}$, on notera en tenant compte que
$\cos 2\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin 2\varphi$:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} - \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \sin 2\varphi . \qquad (8)$$

Les relations contrainte-déformations (loi de Hooke) permettent d'écrire :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)\,;$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)\,.$$
$$\sigma_X = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_X + \nu\varepsilon_Y)\,;$$
$$\sigma_Y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_Y + \nu\varepsilon_X)\,.$$

Dans les équations (6), (7) et (8) ci-dessus, remplaçons σ_x, σ_y, σ_X et σ_Y en fonction des relations ci-dessus.
On obtient :

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_X + \varepsilon_Y}{2} + \frac{\varepsilon_X - \varepsilon_Y}{2}\cos 2\varphi \qquad (9)$$
$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_X + \varepsilon_Y}{2} - \frac{\varepsilon_X - \varepsilon_Y}{2}\cos 2\varphi \qquad (10)$$
$$\varepsilon_u = \frac{\varepsilon_X + \varepsilon_Y}{2} - \frac{\varepsilon_X - \varepsilon_Y}{2}\sin 2\varphi\,. \qquad (11)$$

Les équations (9), (10) et (11) ci-dessus constituent un système de trois équations à trois inconnues (φ, ε_X, ε_Y).
En additionnant membre à membre (9) et (10) on remarque que :

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_X + \varepsilon_Y\,;$$

puis en soustrayant membre à membre (9) et (10) on remarque que :

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y = (\varepsilon_X - \varepsilon_Y)\cos 2\varphi\,.$$

Ces deux remarques permettent de simplifier grandement les calculs.
Les résultats de ceux-ci sont :

$$\begin{cases} \tan 2\varphi = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y - 2\,\varepsilon_u}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \\ \varepsilon_X = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2\cos 2\varphi} \\ \varepsilon_Y = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2\cos 2\varphi}\,. \end{cases}$$

REMARQUE

Aujourd'hui, un programme de calcul existe pour résoudre ces problèmes, mieux, le calculateur est le plus souvent couplé à la chaîne de mesure et donne directement le résultat.

6. CONDITIONS DE RÉSISTANCE

6.1. CONDITIONS THÉORIQUES DE RÉSISTANCE

La résistance des matériaux permet, après avoir pris en compte un certain nombre d'hypothèses simplificatrices de calculer les contraintes nominales maximales σ_{max} ou τ_{max} que peuvent subir les pièces, tout en restant dans le domaine des déformations élastiques.

Critère de Rankine

La contrainte normale σ en tout point du matériau doit être inférieure ou égale à la contrainte limite élastique à l'extension σ_e (ou à la compression, lorsque c'est le cas et que celles-ci sont différentes) :

$$\boxed{\sigma \leqslant \sigma_e}$$

Critère de Guest

La contrainte tangentielle τ en tout point du matériau doit être inférieure ou égale à la contrainte limite élastique au glissement τ_e, déterminée par l'essai de torsion

$$\boxed{\tau \leqslant \tau_e}$$

6.2. COEFFICIENT DE SÉCURITÉ

Pour tenir compte d'un certain nombre d'incertitudes ; incertitudes relatives à la composition réelle du matériau, à ses propriétés mécaniques, à la conformité de la forme de la pièce avec les hypothèses de la résistance des matériaux, ou même aux états de surface de la pièce ainsi qu'à son vieillissement ; les concepteurs sont conduits à adopter un certain coefficient de sécurité s qui s'exprime par :

$$\sigma_{pe} = \frac{\sigma_e}{s} \qquad \text{ou} \qquad \tau_p = \frac{\tau_e}{s}$$

σ_{pe} et τ_p sont appelées contraintes pratiques alors que σ_e et τ_e sont les limites élastiques.
En construction mécanique : $1{,}2 \leqslant s \leqslant 5$ en général.

6.3. CONDITIONS RÉELLES DE RÉSISTANCE

Les limites de contrainte que nous venons d'évoquer sont en fait théoriques et il existe bien des cas où les critères de résistance définis ainsi sont insuffisamment contraignants. Nous allons examiner successivement deux paramètres qui viennent restreindre sensiblement ces conditions.

— Les modifications brusques de section des pièces qui conduisent à adopter un coefficient k de concentration de contraintes.
— Les sollicitations périodiques qui introduisent la notion de fatigue du matériau et qui conduisent à utiliser une limite dite d'endurance σ_D.

6.4. CONCENTRATION DE CONTRAINTES

Lorsqu'une pièce mécanique présente un accident de forme : congé, filetage, trou de goupille, etc., *la contrainte réelle,* mesurée par photoélasticimétrie ou calculée en utilisant une modélisation basée sur les éléments finis est sensiblement plus grande que la contrainte nominale. Dès lors, on convient, pour une contrainte normale par exemple, d'écrire :

$$k = \frac{\sigma_{\text{max réelle}}}{\sigma_{\text{max nominale}}} \qquad (k > 1)\,.$$

k désigne alors le facteur théorique de concentration de contrainte. Précisons que ce facteur théorique ou coefficient, ne peut s'appliquer que si les charges sont statiques et si $\sigma_{\text{max réelle}}$ reste plus faible que la limite élastique. Notons également que pour une même pièce, présentant le même accident de section, k est différent suivant le type de sollicitation que supporte la pièce. Nous en prendrons un exemple *(fig. 3.32)*.

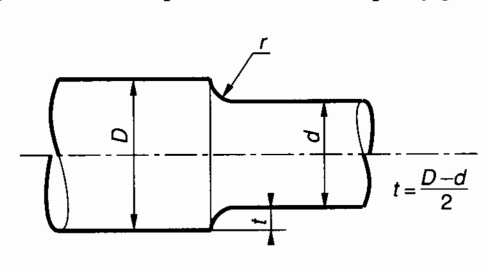


Fig. 3.32.

Connaissant pour une forme donnée et une sollicitation donnée le coefficient de concentration de contraine k, on écrira, pour une contrainte normale par exemple :

$$\boxed{\sigma_{\text{max réelle}} = k\sigma_{\text{max}}}$$

avec $\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{max nominale}}$.

Pour une pièce travaillant en extension

r/t \ d/D	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0,1	2,3	2,8	2,9	3,1	3,3
0,2	1,8	2	2,2	2,4	2,6
0,5	1,4	1,5	1,7	1,8	2
1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6

Pour une pièce travaillant en flexion

r/t \ d/D	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0,1	1,9	2,1	2,4	2,6	3
0,2	1,55	1,7	1,9	2,1	2,3
0,5	1,3	1,35	1,5	1,6	1,8
1	1,15	1,2	1,3	1,4	1,5

Pour une pièce travaillant en torsion

r/t \ d/D	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0,1	1,5	1,6	1,75	2	2,3
0,2	1,3	1,4	1,5	1,65	1,85
0,5	1,15	1,2	1,25	1,35	1,5
1	1,1	1,1	1,15	1,2	1,3

Nota : Les trois tableaux ci-dessus ne sont donnés qu'à titre d'exemple. Il existe des procédés de calcul, des abaques, etc. Tout bureau d'études doit posséder cette documentation.

6.5. RÉSISTANCE À LA FATIGUE OU ENDURANCE

Nous savons que les essais statiques (extension, torsion, etc.) permettent de définir deux zones de déformation pour un matériau :

— la zone élastique qui permet la définition de la limite élastique (σ_e ou τ_e) ;
— la zone plastique qui permet la définition de la limite de rupture (σ_r ou τ_r).

Supposons qu'une pièce mécanique supporte des sollicitations variables provoquant des contraintes périodiques (extension-compression alternées par exemple). On peut montrer expérimentalement, à condition que l'amplitude, la fréquence et le nombre de sollicitations périodiques soient suffisants, que la rupture de la pièce intervient bien avant la limite statique de rupture et même que la limite statique d'élasticité.

Un certain nombre d'essais caractéristiques ont été définis :

- essai de flexion plane ;
- essai de flexion rotative ;
- essai de torsion ;
- essais divers sous contraintes combinées.

Dans tous ces essais, trois paramètres sont pris en compte :

- amplitude de la déformation ;
- fréquence d'application des charges ;
- nombre de sollicitation (nombre de cycles).

EXEMPLE

Essai d'endurance sous amplitude constante. Courbe de Wöhler (fig. 3.33).

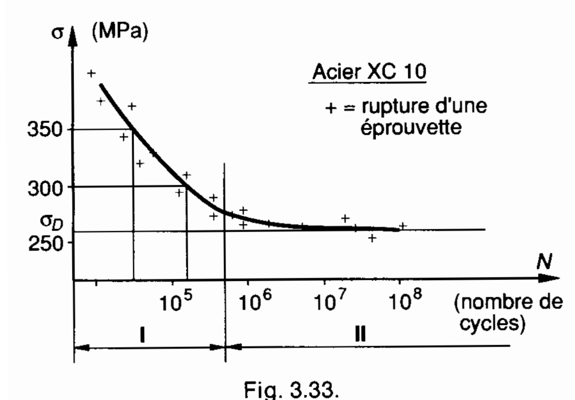


Fig. 3.33.

Citons ici l'essai le plus simple :
Une éprouvette à section circulaire est soumise à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude et de fréquence constantes et on note le nombre de cycles N provoquant la rupture.

Sur la courbe de Wöhler on peut distinguer deux zones.

Zone I dite « zone de fatigue » où la rupture est atteinte après un nombre limité de cycles. Exemple : Pour une sollicitation périodique à contrainte maximale $\sigma = 300$ MPa, la rupture se produit (avec une probabilité correcte) à $N = 2 \times 10^5$ cycles.

Zone II dite « zone d'endurance illimitée » où la rupture n'est pas atteinte avant un nombre très élevé de cycle, 10^8 le plus souvent.
Dans de nombreux cas on peut tracer une asymptote à la courbe de Wöhler. Cette asymptote permet alors de connaître la limite d'endurance σ_D.
Suivant le matériau essayé, le passage de la zone I à la zone II est plus ou moins marqué.
Exemples :
— pour l'aluminium, la courbe de Wöhler ne présente pas de coude marqué et on ne distingue pas toujours une asymptote ;
— pour l'acier, la courbe de Wöhler présente un coude très marqué et l'asymptote est très visible dès 10^6 ou 10^7 cycles.
Présentons quelques résultats expérimentaux qui permettent de calculer σ_D en fonction des caractéristiques des matériaux.
Pour les aciers :

$$\sigma_D = 0{,}40\,\sigma_e + 0{,}25\,\sigma_r \qquad \text{(Rogers)}$$
$$\sigma_D = 0{,}32\,\sigma_r + 121 \qquad \text{(Brand)}$$

avec : σ_e = limite d'élasticité (MPa)
σ_r = limite de rupture (MPa)
σ_D = limite de fatigue (MPa).

Condition de résistance à la fatigue

Dans les conditions données d'amplitude, de fréquence, de nombre de cycles :

$$\boldsymbol{\sigma_{\max} \leqslant \sigma_D}$$

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 Une poutre droite **1** est modélisée à *la figure 3.34* par sa ligne moyenne AB.

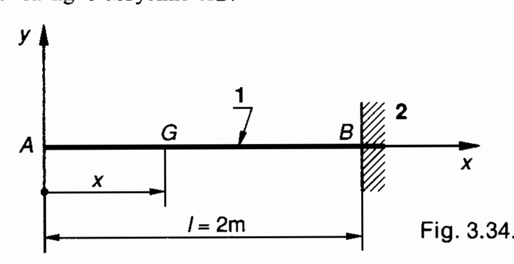


Fig. 3.34.

1 est encastrée en B dans un bâti **2**, elle supporte en A une action mécanique extérieure de $3 \to 1$ modélisable en A par un torseur $\{\mathcal{T}(3 \to 1)\}$ tel que :

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

avec $\vec{A}(3 \to 1) = 200\,\vec{x} - 800\,\vec{y}$.
1 est également soumise à son poids, modélisé par une densité linéique de force $\vec{\delta}$ telle que :

$$\vec{\delta} = -200\,\vec{y}.$$

Unités : newtons et mètres.

QUESTIONS

1° Exprimer en G défini par son abscisse x, les composantes du torseur des forces de cohésion dans $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

2° Exprimer en B les composantes du torseur d'encastrement $\{\mathcal{T}(2 \to 1)\}$ dans $\mathcal{R}(B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

RÉPONSES

1° $\begin{cases} N = -200 \\ T_y = 800 + 200\,x, \\ T_z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} M_t = 0 \\ M_{f_y} = 0 \\ M_{f_z} = -800\,x - 100\,x^2 \end{cases}$

2° $\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} -200 & 0 \\ 1\,200 & 0 \\ 0 & -2\,000 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

2 Un arbre de machine **1** est modélisé à la *figure 3.35* par sa ligne moyenne AB.

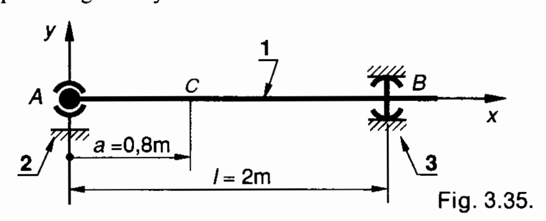


Fig. 3.35.

1 est guidé en rotation par deux roulements que l'on peut modéliser en A et B par deux liaisons :
— en A : liaison 2-1, sphérique de centre A ;
— en B : liaison 3-1, linéique circulaire d'axe $(B, \vec{x})$;
— en C, l'arbre supporte une action mécanique extérieure modélisable par un torseur $\{\mathcal{T}(4 \to 1)\}$ tel que :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(4 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

avec $\vec{C}(4 \to 1) = -100\,\vec{x} + 600\,\vec{y} - 50\,\vec{z}$.
Unités : newtons et mètres.

QUESTIONS

1° Calculer dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes des torseurs d'action mécanique associés aux liaisons 2-1 et 3-1.

2° Pour une section droite repérée par son centre de surface G tel que $\overrightarrow{AG} = 1{,}5\,\vec{x}$, exprimer les composantes dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du torseur des forces de cohésion.

RÉPONSES

1° $\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 100 & 0 \\ -360 & 0 \\ 30 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$;

$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -240 & 0 \\ 20 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

2° $\begin{cases} N = 0 \\ T_y = -240, \\ T_z = 20 \end{cases}$ $\begin{cases} M_t = 0 \\ M_{f_y} = -10 \\ M_{f_z} = -120 \end{cases}$.

3 Un ressort est modélisable par sa ligne moyenne qui a la forme d'un cercle de rayon R. Ce cercle est ouvert en A, B.
En A et B, ce ressort supporte deux actions mécaniques radiales $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ *(fig. 3.36)*.

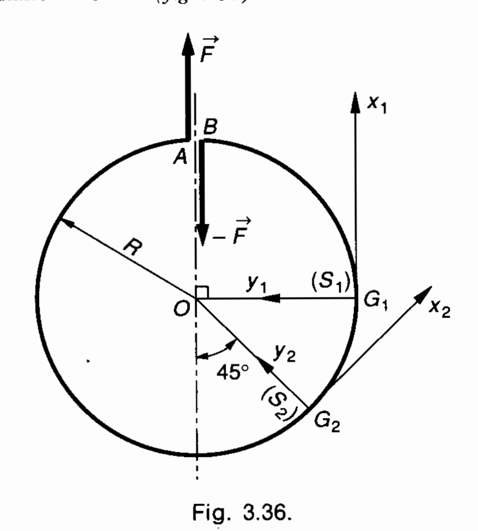


Fig. 3.36.

QUESTIONS

1° Soit une section droite (S_1) de centre G_1 qui définit le repère $\mathcal{R}_1 = (G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. Exprimer dans $\mathcal{R}_1$ les composantes du torseur des actions de cohésion dans (S_1).

2° Soit une section droite (S_2) de centre G_2 qui définit le repère $\mathcal{R}_2 = (G_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. Exprimer dans $\mathcal{R}_2$ les composantes du torseur des actions de cohésion dans (S_2).

3° Dans quelle section droite a-t-on théoriquement une sollicitation de cisaillement simple ?

RÉPONSES

1° $\{\mathcal{T}_{coh}\}_{(S_1)} = {}_{G_1}\begin{Bmatrix} -\|\vec{F}\| & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \|\vec{F}\|\,R \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$

2° $\{\mathcal{T}_{coh}\}_{(S_2)} = {}_{G_2}\begin{Bmatrix} -\|\vec{F}\|\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\|\vec{F}\|\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\|\vec{F}\|\,R\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$

3° Dans une section droite diamétralement opposée à l'ouverture *A, B*.

4 On connaît un repère initial $\mathcal{R}_0 = (M, \vec{x}, \vec{y})$ et l'état plan de contrainte en M défini par :

$$\sigma_x = 60, \quad \sigma_y = 20, \quad \tau_{xy} = -30 \quad \text{(MPa)}.$$

QUESTIONS

1° Déterminer les directions principales $(M, \vec{X}, \vec{Y})$ telles que : $(\vec{x}, \vec{X}) = \varphi_1$; $(\vec{x}, \vec{Y}) = \varphi_2$ et les contraintes principales correspondantes σ_X et σ_Y.

2° Déterminer les composantes dans le repère $\mathcal{R} = (M, \vec{n}, \vec{t})$ de la contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$ définie par $(\vec{X}, \vec{n}) = 45°$
— par le calcul ;
— par la construction graphique de Mohr.

3° Donner l'équation de l'ellipse de Lamé dans le repère principal $\mathcal{R}_1 = (M, \vec{X}, \vec{Y})$.

RÉPONSES

1° $\varphi_1 = -28{,}15°$; $\varphi_2 = 61{,}85°$.
$\sigma_X \approx 76$ (MPa) ; $\sigma_Y \approx 4$ (MPa).

2° $\sigma_n = 40$ (MPa) ; $\tau_{nt} = -36$ (MPa).

3° $\dfrac{X^2}{76^2} + \dfrac{Y^2}{4^2} = 1$.

5 Une plaque rectiligne de section constante est sollicitée en extension pure par une action mécanique provoquant un état de contrainte uniaxial dans chaque section droite (S). Soit σ_X cette contrainte principale *(fig. 3.37)*.

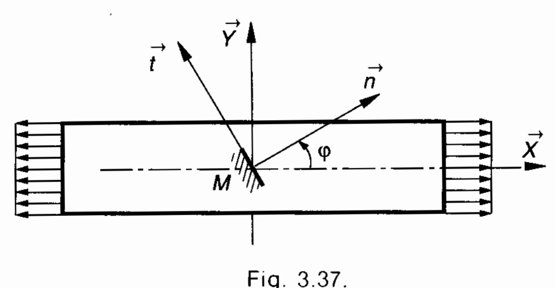


Fig. 3.37.

QUESTIONS

1° En un point M quelconque, soit une facette orientée par $(M, \vec{n})$ et le repère $\mathcal{R} = (M, \vec{n}, \vec{t})$ correspondant. En posant $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi$, exprimer les composantes σ_n et τ_{nt} de $\vec{C}(M, \vec{n})$.

2° Calculer la valeur particulière de l'angle φ pour que la contrainte tangentielle $|\tau_{nt}|$ soit maximale $\left(\varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Pour cette valeur de φ, calculer σ_n et τ_{nt}
— par le calcul ;
— par la construction graphique de Mohr.

3° Exprimer $\vec{C}(M, \vec{n})$ telle que $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi$ quelconque dans $\mathcal{R}_1 = (M, \vec{X}, \vec{Y})$ et en déduire que quel que soit φ, $\vec{C}(M, \vec{n})$ est parallèle à $\vec{X}$.

RÉPONSES

1° $\sigma_n = \dfrac{\sigma_X}{2}(1 + \cos 2\varphi)$

$\tau_{nt} = -\dfrac{\sigma_X}{2}\sin 2\varphi$.

2° $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $\quad \sigma_n = \dfrac{\sigma_X}{2}$, $\quad \tau_{nt} = -\dfrac{\sigma_X}{2}$.

3° $\vec{C}(M, \vec{n}) = \sigma_X \cos\varphi\,\vec{X}$.

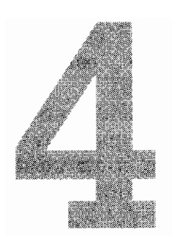
6 Cet exercice concerne seulement l'application numérique de l'exemple de la rosette à 45° développée dans le *paragraphe 5.8*.
On donne les résultats de la lecture des extensomètres (graduations en mm) :
$\varepsilon_x = 100 \times 10^{-5}$, $\varepsilon_y = 40 \times 10^{-5}$, $\varepsilon_u = 20 \times 10^{-5}$.
On donne : $\nu = 0{,}3$ et $E = 2 \times 10^5$ MPa.

QUESTIONS

Calculer l'angle $\varphi = (\vec{X}, \vec{x})$ définissant les directions principales.
Calculer les contraintes principales σ_X et σ_Y.

RÉPONSES

$\varphi = 29{,}52°$, $\sigma_X = 289{,}7$ MPa, $\sigma_Y = 110{,}3$ MPa.



extension compression

Ces deux sollicitations simples sont distinctes et un certain nombre de matériaux ont un comportement différent en extension et en compression (par exemple, la fonte grise Ft20 a pour contrainte limite élastique en extension 20 MPa et pour contrainte limite élastique en compression 150 MPa). Cependant dans les deux cas nous arriverons aux mêmes relations de contraintes et de déformations.

Dans un grand nombre d'applications l'une de ces sollicitations sur une pièce entraîne l'autre sollicitaton sur la pièce qui assure la liaison (immobilisation de deux pièces par vis, boulons ou goujons). Dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à la section, extension et compression se différencieront par le signe de l'effort normal :

$$N > 0 \quad \text{extension}$$
$$N < 0 \quad \text{compression}.$$

1. EXTENSION SIMPLE

1.1. DÉFINITION

On dit qu'une poutre (E) travaille en extension simple quand les torseurs associés aux actions mécaniques de liaison, auxquelles sont soumises chacune de ses extrémités, se réduisent au centre de surface de ses sections extrêmes à une résultante axiale qui tend à l'allonger *(fig. 4.1)*.

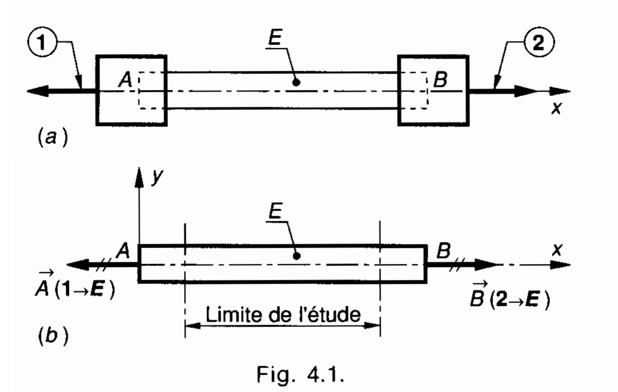


Fig. 4.1.

On notera :

$$\{\mathcal{T}(1 \to E)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to E) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}(2 \to E)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(2 \to E) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

et, puisque la poutre (E) est un équilibre :

$$\|\vec{A}(1 \to E)\| = \|\vec{B}(2 \to E)\|.$$

1.2. ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION EN *G* DU TORSEUR DES FORCES DE COHÉSION

Effectuons une section droite (S) de la poutre (E) et repérons le centre de surface G de cette section droite par son abscisse x dans $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié à la poutre. Considérons le repère $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de définition des sollicitations *(fig. 4.2)*.

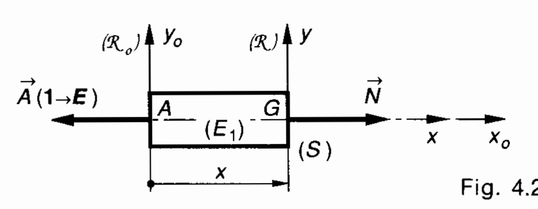


Fig. 4.2.

La poutre est soumise à l'extension simple si le torseur des efforts de cohésion

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}$$

est tel que $\begin{cases} \vec{R} = N\vec{x} & (N > 0) \\ \vec{M}_G = \vec{0} \end{cases}$

par conséquent :

$$\begin{cases} N \neq 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} M_t = 0 \\ M_{f_y} = 0 \\ M_{f_z} = 0 \end{cases} .$$

1.3. HYPOTHÈSE

Dans la plupart des applications, de l'extension (et de la compression) le poids de la poutre peut être négligé. Quand cela n'est plus possible, deux cas peuvent se produire :

— la fibre moyenne de la poutre, repérée le plus souvent par l'axe $(A, \vec{x}_0)$ est verticale ; nous traiterons ce cas au *paragraphe 3.4 ;*

— la fibre moyenne $(A, \vec{x}_0)$ n'est pas verticale, la poutre est alors soumise à une sollicitation composée d'extension-flexion ; nous traiterons ce cas au chapitre 8.

1.4. HYPOTHÈSE DE BARRÉ DE SAINT-VENANT

Les résultats de la résistance des matériaux ne s'appliquent valablement qu'à une certaine distance de la région d'application des charges concentrées.

En tout état de cause, et pour l'étude des contraintes, seule une zone éloignée des perturbations causées par les charges concentrées sera prise en considération *(fig. 4.1 b).*

1.5. DÉFORMATIONS

Rappel de l'hypothèse de Navier et Bernoulli

Les sections planes, normales aux fibres avant déformation, demeurent planes et normales aux fibres après.

Cette hypothèse, fondamentale pour la résistance des matériaux élémentaire, est très bien vérifiée par les mesures de laboratoire dans les sollicitations simples, donc en extension.

Si l'allongement Δx est le même pour tous les points d'une section droite (S), il s'ensuit que l'allongement unitaire $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta x}{x}$ est le même en tout point de (S).

D'après la loi de Hooke, $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$, il est alors évident que **les contraintes normales σ_x sont les mêmes en tout point de la section droite (S).**

Nous avons vu au chapitre 3 que la déformation unitaire d'extension ε_x n'est pas la seule et que dans le plan d'une section droite il existe une contraction notée ε_y telle que : $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$ ($\forall \vec{y} \in$ section droite)

ν est le coefficient de Poisson (pour les métaux, $\nu \approx 0{,}3$). En général, dans les calculs de résistance ou de déformation, on néglige la variation de la section droite.

1.6. CONTRAINTE DANS UNE SECTION DROITE (S)

Considérons une section droite (S), de centre de surface G, d'une poutre tendue. Etudions l'équilibre du tronçon (E_1) *(fig. 4.3).*

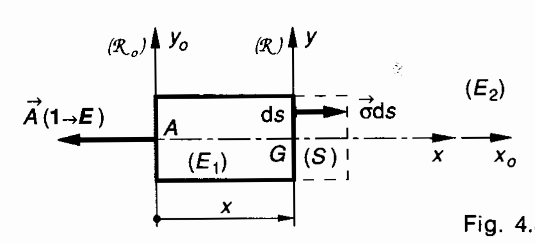


Fig. 4.3.

Les actions mécaniques extérieures à (E_1) sont modélisées par les deux torseurs :

Torseur des actions de liaison $1 - E$ que nous avons déjà analysé au paragraphe 1.1.

$$\{\mathcal{T}(1 \to E)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to E) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} .$$

Torseur des actions de cohésion que (E_2) exerce sur (E_1) à travers (S)

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix} .$$

L'équilibre de (E_1) entraîne que :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} + \{\mathcal{T}(1 \to E)\} = \{\vec{0}\}$$

soit : $\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = -\{\mathcal{T}(1 \to E)\}$

et par conséquent (relation 4 du *paragraphe 1.3* du *chapitre 3*) :

$$_G\begin{cases} \vec{R} = -\vec{A}(1 \to E) \\ \vec{M}_G = \vec{0} \end{cases} .$$

Par conséquent, dans $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$N = \|\vec{A}(1 \to E)\| .$$

Nous savons par ailleurs que *(fig. 4.3)* :

$$\vec{R} = \iint_{(S)} \vec{\sigma}\, dS. \qquad (1)$$

D'après l'hypothèse de Navier et Bernoulli : (σ = Cte dans S) et en projetant les vecteurs de la relation (1) sur $(G, \vec{x})$: $N = \sigma S$.
Nous écrirons donc :

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{S}}.$$

En extension : $N > 0$, $\sigma > 0$.
Unités : N en newton, S en mm², σ en MPa.

1.7. CONTRAINTE DANS UNE SECTION OBLIQUE *(fig. 4.4)*

L'axe de la poutre est une direction principale. Dans une poutre soumise à une sollicitation simple d'extension, seule la contrainte principale σ_X est non nulle. Donc quels que soient $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ du plan de la section droite : $\sigma_X > 0$, $\sigma_Y = 0$, $\sigma_Z = 0$.

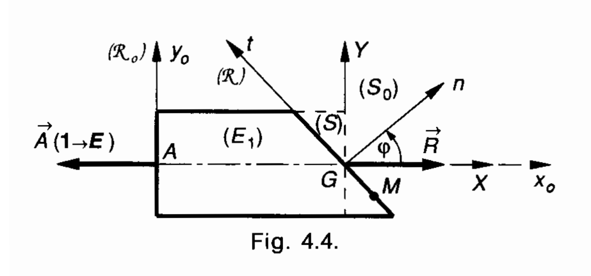


Fig. 4.4.

Effectuons une section oblique (s) orientée par sa normale extérieure $(G, \vec{n})$ et soit $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi$.
Soit M un point quelconque de (S).
Exprimons la contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$ dans le repère $\mathfrak{R}(M, \vec{n}, \vec{t})$.
Nous avons vu au chapitre 3 *paragraphe 4.4.2,* relations 6.

$$\vec{C}(M,\vec{n})\ (\mathfrak{R}) \begin{cases} \sigma_n = \dfrac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \dfrac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \cos 2\varphi \\ \tau_{nt} = -\dfrac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \sin 2\varphi \end{cases}$$

avec ici $\sigma_Y = 0$.

$$\vec{C}(M,\vec{n})\ (\mathfrak{R}) \begin{cases} \sigma_n = \dfrac{\sigma_X}{2} (1 + \cos 2\varphi) \\ \tau_{nt} = -\dfrac{\sigma_X}{2} \sin 2\varphi . \end{cases}$$

• **Calcul de $|\sigma_n|_{max}$ et $|\tau_{nt}|_{max}$**

$|\sigma_n|$ est maximale quand $\cos 2\varphi = 1$ soit pour $\varphi = 0$.

Alors $\qquad |\sigma_n|_{max} = \sigma_X$.

Rappelons que σ_X est la contrainte principale.
$|\tau_{nt}|$ est maximale quand $|\sin 2\varphi| = 1$, soit pour $\varphi = \pm \dfrac{\pi}{4}$,

$$\text{alors : } \quad |\tau_{nt}|_{max} = \frac{\sigma_X}{2}.$$

Montrons que $\vec{C}(M, \vec{n})$ est parallèle à $\vec{X}$ quelque soit φ.
Dans $\mathfrak{R}$ on peut écrire que :

$$\vec{C}(M,\vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_{nt} \vec{t}$$

avec : $\vec{n} = \cos\varphi \vec{X} + \sin\varphi \vec{Y}$
$\qquad \vec{t} = -\sin\varphi \vec{X} + \cos\varphi \vec{Y}$

par conséquent :

$$\vec{C}(M,\vec{n}) = \frac{\sigma_X}{2}(1 + \cos 2\varphi)(\cos\varphi \vec{X} + \sin\varphi \vec{Y}) - \frac{\sigma_X}{2} \sin 2\varphi (-\sin\varphi \vec{X} + \cos\varphi \vec{Y})$$

soit :

$$\vec{C}(M,\vec{n}) = \sigma_X \cos\varphi\, \vec{X}.$$

Conséquence

Il n'y a extension pure que pour les sections normales à la direction des forces extérieures (σ est maxi pour $\varphi = 0$). Pour toute autre section, il existe en tout point $M \in (S)$ une contrainte tangentielle. Celle-ci est maximale en valeur absolue pour $\varphi = 45°$.

1.8. CONDITION DE RÉSISTANCE

Compte tenu de l'existence éventuelle d'un coefficient de concentration de contrainte k et si on adopte un coefficient de sécurité s, la condition de résistance pour une contrainte normale d'extension peut s'écrire :

$$\boxed{\sigma_{max} \leqslant \sigma_{pe}}$$

avec $\quad \sigma_{max} = k\dfrac{N}{S} \quad$ et $\quad \sigma_{pe} = \dfrac{\sigma_e}{s}$.

1.9. RELATION ENTRE L'ALLONGEMENT ΔL ET L'EFFORT NORMAL N

D'après la loi de Hooke $\sigma_X = E\varepsilon_X$

avec $\sigma_X = \dfrac{N}{S}$ et $\varepsilon_X = \dfrac{\Delta L}{L}$, on peut écrire : $\dfrac{N}{S} = E \cdot \dfrac{\Delta L}{L}$

soit $$\boxed{\Delta L = \frac{NL}{ES}}.$$

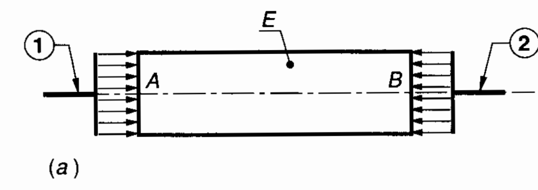
En extension : $\sigma_X > 0$, $N > 0$, $\Delta L > 0$.

Nota : L'écriture $\varepsilon_X = \dfrac{\Delta L}{L}$ suppose que l'allongement est également réparti sur toute la longueur de la poutre.

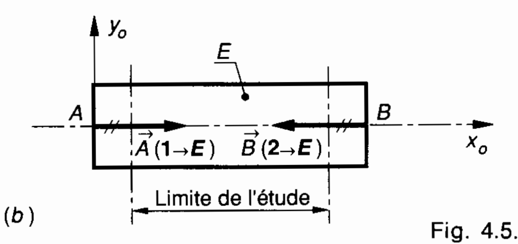
2. COMPRESSION SIMPLE

2.1. DÉFINITION

On dit qu'une poutre (E) travaille en compression simple quand les torseurs associés aux actions mécaniques de liaison, auxquelles sont soumises chacune de ses extrémités, se réduisent au centre de surface de ses sections extrêmes à une résultante axiale qui tend à la raccourcir *(fig. 4.5).*



(a)



(b)

Fig. 4.5.

On notera :

$$\{\mathcal{T}(1 \to E)\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to E) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} ;$$

$$\{\mathcal{T}(2 \to E)\} = \underset{B}{\begin{Bmatrix} \vec{B}(2 \to E) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} ;$$

et, puisque la poutre (E) est en équilibre :

$$\|\vec{A}(1 \to E)\| = \|\vec{B}(2 \to E)\| .$$

2.2. ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION EN G DU TORSEUR DES FORCES DE COHÉSION

Effectuons une section droite (S) de la poutre (E) et repérons le centre de surface G de cette section droite par son abscisse x dans $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié à la poutre. Considérons le repère $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de définition des sollicitations *(fig. 4.6)*.

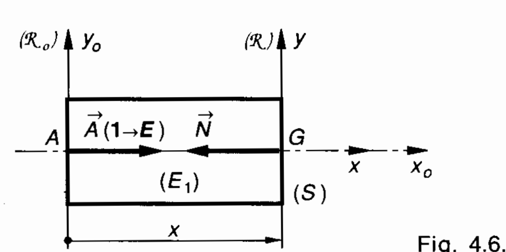


Fig. 4.6.

La poutre est soumise à la compression simple si le torseur des efforts de cohésion

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}}$$

est tel que : $\begin{cases} \vec{R} = N\vec{x} & (N < 0) \\ \vec{M}_G = \vec{0} \end{cases}$

par conséquent :

$$\begin{vmatrix} N \neq 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} M_t = 0 \\ M_{f_y} = 0 \\ M_{f_z} = 0 \end{vmatrix} .$$

2.3. HYPOTHÈSES

- La longueur L de la poutre doit être inférieure à 5 à 8 fois la dimension transversale la plus faible a : $L < 8\,a$.

La section de la poutre ne doit pas présenter une dimension trop petite a par rapport à la plus grande b : $a \leqslant b \leqslant 1{,}5\,a$.

Si ces deux conditions ne sont pas satisfaites, la poutre peut alors être soumise au flambage (ce cas sera étudié au *chapitre 9*).

- Dans la plupart des applications de la compression, le poids de la poutre peut être négligé. Quand cela n'est pas possible, deux cas peuvent se produire :

— la fibre moyenne de la poutre $(A, \vec{x}_0)$ est verticale ; nous traiterons ce cas au *paragraphe 3.4* ;

— la fibre moyenne $(A, \vec{x}_0)$ n'est pas verticale, la poutre est alors soumise à une sollicitation composée de compression-flexion ; nous traiterons ce cas au *chapitre 8*.

• Pour la compression, comme pour l'extension, les hypothèses de Barré de Saint-Venant ainsi que de Navier et Bernoulli seront vérifiées. Nous ne les rappèlerons pas mais nous en donnerons la conclusion :

Les contraintes normales $\vec{\sigma}$ de compression sont les mêmes en tout point d'une section droite, pourvu que celle-ci soit suffisamment éloignée des points d'application des charges concentrées.

2.4. CONTRAINTE DANS UNE SECTION DROITE (*S*)

Considérons une section droite (S), de centre de surface G, d'une poutre comprimée. Etudions l'équilibre du tronçon (E_1) *(fig. 4.7)*.

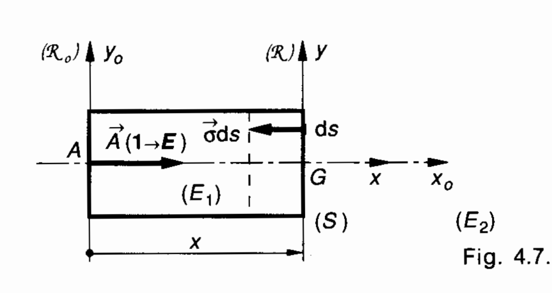


Fig. 4.7.

Les actions mécaniques extérieures à (E_1) sont modélisées par les deux torseurs :

Torseur des actions de liaison 1 — *E* que nous avons déjà analysé au *paragraphe 2.1 :*

$$\{\mathcal{T}(1 \to E)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(1 \to E) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

Torseur des actions de cohésion que (E_2) exerce sur (E_1) à travers (S):

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}.$$

L'équilibre de (E_1) entraîne que :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} + \{\mathcal{T}(1 \to E)\} = \{\vec{0}\}$$

soit : $\{\mathcal{T}_{coh}\} = -\{\mathcal{T}(1 \to E)\}$

et par conséquent (relation 4 du *paragraphe 1.3* du *chapitre 3*) :

$$_G\begin{cases} \vec{R} = -\vec{A}(1 \to E) \\ \vec{M}_G = \vec{0} \end{cases}.$$

Soit dans $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$N = -\|\vec{A}(1 \to E)\|.$$

Nous savons par ailleurs que :

$$\vec{R} = \iint_{(S)} \vec{\sigma}\, dS. \qquad (1)$$

D'après l'hypothèse de Navier et Bernoulli : (σ = Cte dans S) et en projetant les vecteurs de la relation (1) sur (G, $\vec{x}$) : $N = \sigma S$.
Nous écrirons donc :

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{S}}.$$

En compression : $N < 0$, $\sigma < 0$.
Unité : N en newton, S en mm², σ en MPa.

2.5. CONTRAINTE DANS UNE SECTION OBLIQUE *(fig. 4.8)*

L'axe de la poutre est une direction principale. Dans une poutre soumise à une sollicitation simple de compression, seule la contrainte principale σ_X est non nulle. Donc, quels que soient $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ du plan de la section droite :

$$\sigma_X < 0, \quad \sigma_Y = 0, \quad \sigma_Z = 0.$$

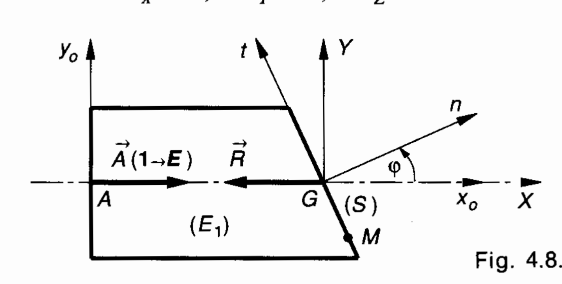


Fig. 4.8.

Effectuons une section oblique (S) orientée par sa normale extérieure (G, $\vec{n}$) et soit $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi$.
Soit M un point quelconque de (S).
Exprimons la contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$ dans le repère $\mathcal{R}(M, \vec{n}, \vec{t})$.
Nous avons vu au *chapitre 3, paragraphe 4.4.2,* relations 6 ;

$$\underset{(\mathcal{R})}{\vec{C}(M, \vec{n})} \begin{cases} \sigma_n = \dfrac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \dfrac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\cos 2\varphi \\ \tau_{nt} = -\dfrac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\sin 2\varphi \end{cases}.$$

Avec ici $\sigma_Y = 0$

$$\underset{(\mathcal{R})}{\vec{C}(M, \vec{n})} \begin{cases} \sigma_n = \dfrac{\sigma_X}{2}(1 + \cos 2\varphi) \\ \tau_{nt} = -\dfrac{\sigma_X}{2}\sin 2\varphi \end{cases}.$$

• **Calcul de $|\sigma_n|_{max}$ et $|\tau_{nt}|_{max}$.**

$|\sigma_n|$ est maximale quand $\cos 2\varphi = 1$ soit pour $\varphi = 0$.

Alors $$|\sigma_n|_{max} = |\sigma_X| .$$

Rappelons que σ_X est la contrainte principale $|\tau_{nt}|$ est maximale quand $|\sin 2\varphi| = 1$ soit pour $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$

alors $$|\tau_{nt}|_{max} = \frac{|\sigma_X|}{2} .$$

Conséquence

Il n'y a compression pure que pour les sections normales à la direction des forces extérieures ($|\sigma|$ est maxi pour $\varphi = 0$). Pour toute autre section, il existe en tout point $M \in (S)$ une contrainte tangentielle ; celle-ci est maximale en valeur absolue pour $\varphi = 45°$.

2.6. CONDITION DE RÉSISTANCE

Compte tenu de l'existence éventuelle d'un coefficient de concentration de contrainte k et si on adopte un coefficient de sécurité s, la condition de résistance pour une contrainte normale de compression peut s'écrire :

$$\boxed{|\sigma_{max}| \leqslant \sigma_{pc}}$$

avec : $|\sigma_{max}| = k \cdot \frac{|N|}{S}$ et $\sigma_{pc} = \frac{\sigma_e}{s}$.

2.7. RELATION ENTRE LE RACCOURCISSEMENT ΔL ET L'EFFORT NORMAL N

D'après la loi de Hooke $\sigma_X = E \cdot \varepsilon_X$.

avec $\sigma_X = \frac{N}{S}$ et $\varepsilon_X = \frac{\Delta L}{L}$.

On peut écrire : $\frac{N}{S} = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$

soit $$\boxed{\Delta L = \frac{NL}{ES}}.$$

En compression : $\sigma_X < 0$, $N < 0$, $\Delta L < 0$.

Nota : L'écriture $\varepsilon_X = \frac{\Delta L}{L}$ suppose que le raccourcissement est également réparti sur toute la longueur de la poutre.

3. APPLICATIONS

3.1. ENVELOPPES MINCES

Une enveloppe mince est un organe capable de contenir un fluide sous pression et dont l'épaisseur est faible par rapport aux autres dimensions (tubes utilisés dans les transmissions hydrauliques, réservoirs de gaz comprimé etc...).

Nous noterons p la pression effective et nous supposerons que $p = p_{int} - p_{ext}$, la pression extérieure est le plus souvent la pression atmosphérique $p_0 \simeq 0{,}1$ MPa.

Hypothèse

Nous ne considérerons que le cas d'enveloppes possédant un plan de symétrie, (cylindre) ou un centre de symétrie, (sphère). Cette hypothèse permet en effet d'admettre que la répartition des contraintes normales dans l'enveloppe est uniforme.

Cas d'une enveloppe cylindrique

Soit un réservoir cylindrique (E) de diamètre intérieur d, de longueur l et d'épaisseur e. Soit p la pression effective.

Effectuons une coupure fictive par un plan de symétrie.

Soit $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère de définition des sollicitations.

Soit S l'aire de la section fictive : $S = 2el$.

Soit (S') la surface intérieure du demi réservoir (E_1) *(fig. 4.9)*.

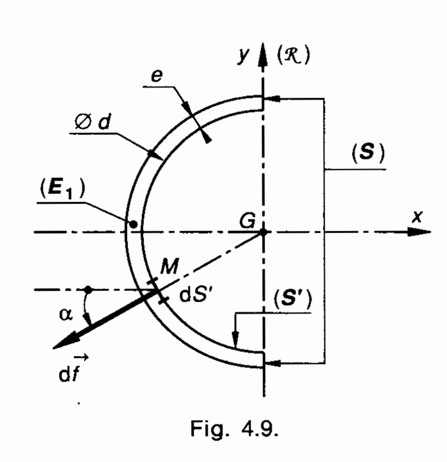


Fig. 4.9.

Chaque surface élémentaire dS' de (S') est soumise à une force de pression $\vec{df}$ perpendiculaire en M à la paroi, telle que :

$$\|\vec{df}\| = p \cdot dS' .$$

Le torseur des forces extérieures agissant sur (E_1) s'exprime par :

$$\{\mathcal{T}(\text{fluide} \to E_1)\} = {}_G\left\{\begin{aligned} &\vec{R}(\text{fluide} \to E_1) = \iint_{(S')} \overrightarrow{\mathrm{d}f} \\ &\vec{M}_G(\text{fluide} \to E_1) = \iint_{(S')} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}f} \end{aligned}\right\}.$$

Le torseur des actions de cohésion qui s'exercent sur (S) s'exprime par :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = {}_G\left\{\begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{matrix}\right\}.$$

L'équilibre du demi-réservoir (E_1) entraîne que :

$$\left|\begin{aligned} &\vec{R} = -\iint_{(S')} \overrightarrow{\mathrm{d}f} \\ &\vec{M}_G = -\iint_{(S')} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}f} \end{aligned}\right..$$

Compte tenu des symétries de (E_1) et donc de (S') par rapport aux plans $(G, \vec{x}, \vec{y})$ et $(G, \vec{x}, \vec{z})$, les composantes algébriques des éléments de réduction en G du torseur des forces de cohésion se réduisent à :

$$\left|\begin{aligned} &N = p \iint_{(S')} \mathrm{d}S' \cos\alpha \\ &T_y = 0 \\ &T_z = 0 \end{aligned}\right. , \qquad \left|\begin{aligned} &M_t = 0 \\ &M_{f_y} = 0 \\ &M_{f_z} = 0 \end{aligned}\right.$$

avec $\alpha = (-\vec{x}, \overrightarrow{\mathrm{d}f})$.

On remarque que $\mathrm{d}S' \cos\alpha$ est la projection de $\mathrm{d}S'$ sur le plan $(G, \vec{y}, \vec{z})$, par conséquent :

$$\iint_{(S')} \mathrm{d}S' \cos\alpha = \ell \times d.$$

L'effort normal s'exprime alors par :

$$\boldsymbol{N = pld}.$$

N étant positif, le réservoir subit une sollicitation d'extension telle que :

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad \text{avec } S = 2\,el$$

et donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma = \frac{pd}{2\,e}}}.$$

Cas d'une enveloppe sphérique *(fig. 4.10)*

Chaque surface élémentaire $\mathrm{d}S'$ de (S') est soumise à une force de pression $\overrightarrow{\mathrm{d}f}$ perpendiculaire en M à la paroi telle que :

$$\|\overrightarrow{\mathrm{d}f}\| = p \,.\, \mathrm{d}S'.$$

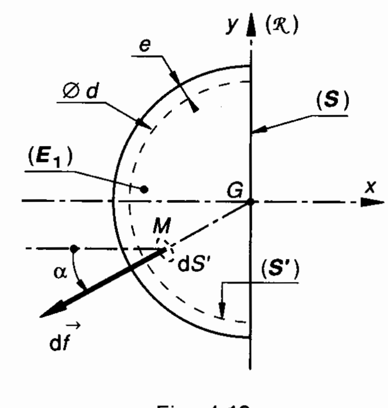


Fig. 4.10.

Le torseur des forces extérieures agissant sur (E_1) s'exprime par :

$$\{\mathcal{T}(\text{fluide} \to E_1)\} = {}_G\left\{\begin{aligned} &\vec{R}(\text{fluide} \to E_1) = \iint_{(S')} \overrightarrow{\mathrm{d}f} \\ &\vec{M}_G(\text{fluide} \to E_1) = \iint_{(S')} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}f} \end{aligned}\right\}.$$

Le torseur des actions de cohésion qui s'exercent sur (S) s'exprime par :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = {}_G\left\{\begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{matrix}\right\}.$$

L'équilibre du demi-réservoir (E_1) entraîne que :

$$\left\{\begin{aligned} &\vec{R} = -\iint_{(S')} \overrightarrow{\mathrm{d}f} \\ &\vec{M}_G = -\iint_{(S')} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}f} = \vec{0} \text{ (vecteurs colinéaires).} \end{aligned}\right.$$

Compte tenu des symétries de (E_1) et donc de (S') par rapport aux plans $(G, \vec{x}, \vec{y})$ et $(G, \vec{x}, \vec{z})$, les composantes algébriques des éléments de réduction en G du torseur des forces de cohésion se réduisent à :

$$\left|\begin{aligned} &N = p \iint_{(S')} \mathrm{d}S' \cos\alpha \\ &T_y = 0 \\ &T_z = 0 \end{aligned}\right. ; \qquad \left|\begin{aligned} &M_t = 0 \\ &M_{f_y} = 0 \\ &M_{f_z} = 0 \end{aligned}\right.$$

avec $\alpha = (-\vec{x}, \overrightarrow{\mathrm{d}f})$.

On remarque que $\mathrm{d}S' \cos\alpha$ est la projection de $\mathrm{d}S'$ sur le plan $(G, \vec{y}, \vec{z})$, par conséquent :

$$\iint_{(S')} \mathrm{d}S' \cos\alpha = \frac{\pi d^2}{4}.$$

L'effort normal s'exprime alors par :

$$N = p\,\frac{\pi d^2}{4}.$$

N étant positif, le réservoir subit une sollicitation d'extension telle que :

$\sigma = \dfrac{N}{S}$ avec $S \approx \pi d e$

et donc : $\boxed{\sigma = \dfrac{pd}{4e}}$.

3.2. CONTRAINTES D'INCURVATION DANS LES LIENS FLEXIBLES

Considérons une courroie à section rectangulaire, de section $S = a \times b$, qui « chausse » une poulie de rayon R. Soit T la tension du brin tendu et t la tension du brin mou *(fig. 4.11)*.

Dans sa partie rectiligne, l'effort normal maximal dans la courroie vaut :

$$N = \|\vec{T}\| = T$$

et la contrainte normale d'extension correspondante s'exprime par :

$$\sigma_1 = \frac{N}{S} \quad \text{soit} \quad \sigma_1 = \frac{T}{ab}.$$

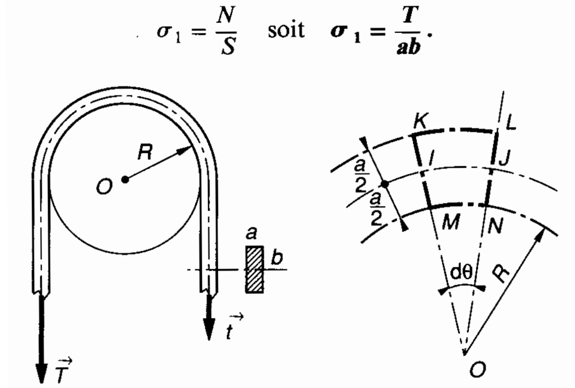


Fig. 4.11. Fig. 4.12.

Dans sa partie courbe, outre l'allongement dû à la sollicitation d'extension précédente, la courroie subit une déformation d'incurvation que nous allons analyser **seule** *(fig. 4.12)*.

Considérons un arc de courroie intercepté par l'angle au centre $d\theta$. Supposons que les fibres moyennes de la courroie n'aient pas changé de longueur. Soit IJ l'une de ces fibres. Les fibres telles que KL se sont allongées alors que les fibres telles que MN se sont raccourcies.

D'après la loi de Hooke pour les fibres KL tendues : $\sigma_x = E\varepsilon_x$ peut s'écrire : $\sigma_2 = E\dfrac{\Delta l}{l}$ avec

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{KL - IJ}{IJ}.$$

Ecrivons que :

$$IJ = \left(R + \frac{a}{2}\right) d\theta, \quad KL = (R + a)\, d\theta,$$

alors : $$\sigma_2 = \frac{Ea}{2R + a}.$$

La contrainte totale d'extension s'exprime alors par : $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$

soit : $\boxed{\sigma = \dfrac{T}{ab} + \dfrac{Ea}{2R + a}}$.

Notons que pour les courroies épaisses « chaussant » une poulie de faible diamètre, la contrainte d'incurvation σ_2 peut être plus grande que σ_1. Les constructeurs de courroie préviennent cela en imposant pour une courroie donnée un diamètre minimum de poulie.

3.3. SYSTÈMES HYPERSTATIQUES EN EXTENSION-COMPRESSION

Lorsqu'un boulon (ou tout autre organe de liaison par serrage axial) assemble plusieurs pièces en exerçant un effort de serrage, on peut dire intuitivement que le boulon est tendu alors que les pièces qu'il serre sont comprimées.
Nous allons modéliser ce problème et montrer que l'effort de serrage ne peut pas être calculé sans faire appel à la loi de Hooke *(fig. 4.13)*.

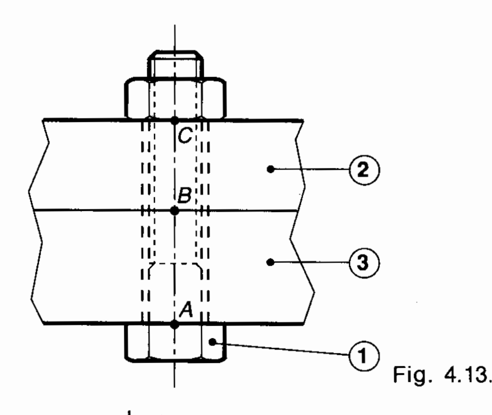


Fig. 4.13.

Pour le boulon **1** :

Ø nominal	: d_1
pas	: p
section de noyau	: S_1
module de young	: E_1

Les deux pièces serrées par le boulon seront modélisées par deux tubes **2** et **3** dans lequel passe le boulon.

Tube **2** : | section : S_2 | longueur : l_2 , | module de young : E_2

Tube **3** : | section : S_3 | longueur : l_3 . | module de young : E_3

Lors du serrage, et à partir du moment où l'écrou rentre en contact avec le tube supérieur, on effectue une fraction $\frac{1}{k}$ de tour pour réaliser le serrage.
Exprimer l'effort de serrage F des pièces **2** et **3** en fonction de k.
Considérons le système en position serrée et étudions séparément l'équilibre de chaque élément **1, 2, 3**.

Equilibre de boulon 1 *(fig. 4.14)* :

1 est en équilibre sous l'action de deux systèmes d'actions mécaniques de liaison que l'on peut modéliser respectivement en A et C par deux glisseurs $\{\mathcal{T}(3 \to 1)\}$ et $\{\mathcal{T}(2 \to 1)\}$ dont les résultantes sont directement opposées.

$$\|\vec{A}(3 \to 1)\| = \|\vec{C}(2 \to 1)\|. \quad (1)$$

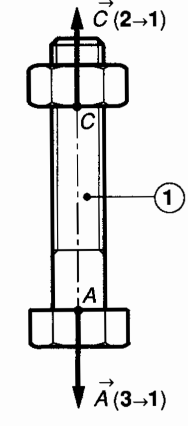


Fig. 4.14.

Equilibre du tube 2 *(fig. 4.15)* :

2 est en équilibre sous l'action de deux systèmes d'actions mécaniques de liaison que l'on peut modéliser respectivement en C et B par deux glisseurs $\{\mathcal{T}(1 \to 2)\}$ et $\{\mathcal{T}(3 \to 2)\}$ dont les résultantes sont directement opposées.

$$\|\vec{C}(1 \to 2)\| = \|\vec{B}(3 \to 2)\| . \quad (2)$$

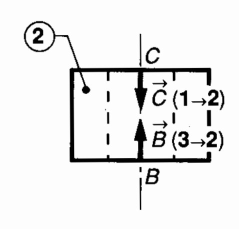


Fig. 4.15.

Equilibre du tube 3 *(fig. 4.16)* :

3 est en équilibre sous l'action de deux systèmes d'actions mécaniques de liaison que l'on peut modéliser respectivement en A et B par deux glisseurs $\{\mathcal{T}(1 \to 3)\}$ et $\{\mathcal{T}(2 \to 3)\}$ dont les résultantes sont directement opposées.

$$\|\vec{A}(1 \to 3)\| = \|\vec{B}(2 \to 3)\| . \quad (3)$$

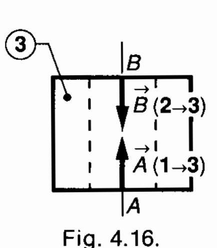


Fig. 4.16.

Le système d'équations (1), (2), (3) ne permet pas la résolution et si nous exprimons les efforts normaux algébriques N_1, N_2, N_3 dans les pièces **1, 2, 3** une étude très simple nous permet d'écrire :

$$\mathbf{N_1 = -N_2 = -N_3} \quad \begin{cases} N_1 > 0 & \text{extension} \\ N_2 < 0 & \text{compression .} \\ N_3 < 0 & \text{compression} \end{cases}$$

Ces efforts normaux sont donc égaux en valeur absolue mais nous ne les connaissons pas.

Etude des déformations du système

l_1, l_2, l_3 désignent les longueurs avant serrage donc :

$$l_1 = l_2 + l_3 \quad (4)$$

l'_1, l'_2, l'_3 désignent les longueurs après serrage donc :

$$l'_1 = l'_2 + l'_3 . \quad (5)$$

Exprimons les variations de longueur :

- *Pour le boulon* **1** : avant serrage ; longueur l_1.

En effectuant $\frac{1}{k}$ tour d'écrou, la longueur utile initiale du boulon devient : $\left(l_1 - \frac{p}{k}\right)$, c'est cette dernière qui s'allonge pour devenir l'_1 donc :

$$\Delta l_1 = l'_1 - \left(l_1 - \frac{p}{k}\right) \quad (6)$$

($\Delta l_1 > 0$: allongement).

Pour le tube **2** : avant serrage, longueur l_2
après serrage, longueur l'_2

donc $$\Delta l_2 = l'_2 - l_2 \quad (7)$$

($\Delta l_2 < 0$: raccourcissement).

- *Pour le tube* **3** : avant serrage, longueur l_3
après serrage, longueur l'_3

donc $$\Delta l_3 = l'_3 - l_3 \quad (8)$$

($\Delta l_3 < 0$: raccourcissement).

• ***Exprimons la loi de Hooke pour les trois pièces***

• *Pour le tube* **1** : $\sigma_1 = E_1\,\varepsilon_1$

avec $\sigma_1 = \dfrac{N_1}{S_1}$ et $\varepsilon_1 = \dfrac{\Delta l_1}{l_1 - \frac{p}{k}}$.

(Notons encore que l'allongement du boulon n'intervient que sur la longueur : $l_1 - \frac{p}{k}$.)

Donc $$\Delta l_1 = \frac{N_1\left(l_1 - \frac{p}{k}\right)}{E_1\,S_1}. \qquad (9)$$

• *Pour le tube* **2** : $\sigma_2 = E_2\,\varepsilon_2$

avec $\sigma_2 = \dfrac{N_2}{S_2}$ et $\varepsilon_2 = \dfrac{\Delta l_2}{l_2}$

donc $$\Delta l_2 = \frac{N_2\,l_2}{E_2\,S_2}. \qquad (10)$$

• *Pour le tube* **3** : $\sigma_3 = E_3\,\varepsilon_3$

avec $\sigma_3 = \dfrac{N_3}{S_3}$ et $\varepsilon_3 = \dfrac{\Delta l_3}{l_3}$

donc $$\Delta l_3 = \frac{N_3\,l_3}{E_3\,S_3}. \qquad (11)$$

• A partir des trois équations (6), (7), (8) calculons $\Delta l_1 - (\Delta l_2 + \Delta l_3)$:

$$\Delta l_1 - (\Delta l_2 + \Delta l_3) =$$
$$= [l'_1 - (l'_2 + l'_3)] - [l_1 - (l_2 + l_3)] + \frac{p}{k}.$$

d'après (4) et (5), les quantités entre [] du second membre sont nulles, donc :

$$\Delta l_1 - (\Delta l_2 + \Delta l_3) = \frac{p}{k}. \qquad (12)$$

• A partir des trois équations (9), (10), (11) effectuons le même calcul :

$$\Delta l_1 - (\Delta l_2 + \Delta l_3) =$$
$$= \frac{N_1\left(l_1 - \frac{p}{k}\right)}{E_1\,S_1} - \frac{N_2\,l_2}{E_2\,S_2} - \frac{N_3\,l_3}{E_3\,S_3}. \qquad (13)$$

Sachant que $(N_1 = -N_2 = -N_3)$ nous pouvons, en comparant les relations (12) et (13), écrire que :

$$\frac{N_1\left(l_1 - \frac{p}{k}\right)}{E_1\,S_1} + \frac{N_1\,l_2}{E_2\,S_2} + \frac{N_1\,l_3}{E_3\,S_3} = \frac{p}{k}.$$

Dans cette dernière équation, une seule inconnue : N_1 que l'on peut donc calculer. Notons que d'après l'étude statique initiale l'effort de serrage F est égal à N_1 :

$$\boxed{F = \frac{p}{k}\cdot\frac{1}{\dfrac{l_1 - \frac{p}{k}}{E_1\,S_1} + \dfrac{l_2}{E_2\,S_2} + \dfrac{l_3}{E_3\,S_3}}}\,.$$

3.4. POUTRE À AXE VERTICAL SOUMISE À SON PROPRE POIDS

Considérons par exemple un pilier vertical de hauteur l dont le matériau a pour poids volumique ϖ. Ce pilier supporte à son extrémité supérieure une charge que l'on peut modéliser en A par un glisseur $\{\mathcal{T}_{ext}\}$ dont la résultante $\vec{F}$ est verticale : $\vec{F} = \|\vec{F}\|\,\vec{x}_0$ *(fig. 4.17)*.

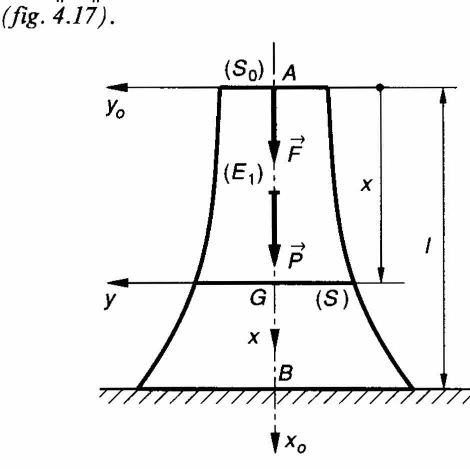


Fig. 4.17.

Considérons une section droite (S) d'abscisse x de ce pilier. A quelle loi $S(x)$ doit-elle obéir pour que la contrainte normale en tout point du pilier soit égale en valeur absolue à la contrainte pratique en compression σ_{pc} du matériau? On pose : $|\sigma| = \sigma_{pc}$.

— Soit une section droite (S) d'abscisse x dans $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

— Soit $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère de définition des sollicitations relatif au tronçon (E_1).

— $S(x)$ définit la fonction, aire de la section droite du pilier, fonction de x que l'on recherche.

— Soit $\vec{P}$ le poids du tronçon (E_1) du pilier et V son volume.

— Le torseur des efforts de cohésion dans la section (S) s'exprime par :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} = -(\vec{F} + \vec{P}) \\ \vec{M}_G = \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

— Exprimons $\vec{R}$ dans $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en posant : $\|\vec{P}\| = \varpi V$:

$$N = -[\|\vec{F}\| + \varpi V].$$

Ce pilier est donc soumis à une sollicitation de compression dont la contrainte σ (fonction de x) s'exprime par : $\sigma = \frac{N}{S}$

donc $|\sigma| = \sigma_{pc} = \frac{\|\vec{F}\| + \varpi V}{S}$,

soit $$\sigma_{pc} S = \|\vec{F}\| + \varpi V. \quad (1)$$

Dans cette relation (1), S est fonction de x et V également.

On notera plutôt : $\sigma_{pc} S(x) = \|\vec{F}\| + \varpi V(x)$.

Différentions cette expression :

$$\sigma_{pc}\, dS = \varpi\, dV.$$

Ecrivons l'expression qui permet de définir l'élément de volume dV :

$$dV = S\, dx$$

et donc : $\sigma_{pc}\, dS = \varpi S\, dx$ soit : $\frac{dS}{S} = \frac{\varpi}{\sigma_{pc}} dx$.

Intégrons les termes de cette relation :

$$\text{Ln}\, S = \frac{\varpi}{\sigma_{pc}} x + A. \quad (2)$$

Calcul de la constante d'intégration A :

Pour $x = 0$, si on désigne par S_0 la surface au sommet du pilier : Ln $S_0 = A$.

La relation (2) s'écrira alors :

$$\text{Ln}\, \frac{S}{S_0} = \frac{\varpi}{\sigma_{pc}} x, \quad \text{soit :} \quad \boxed{S(x) = S_0\, e^{\frac{\varpi}{\sigma_{pc}} x}}$$

Une telle section est dite le plus souvent « d'égale résistance » en compression, il serait plus juste de dire « d'égale contrainte ». Bien entendu, peu de constructions obéissent rigoureusement à cette loi mais toutes s'en rapprochent plus ou moins en utilisant des formes en tronc de cône (hautes cheminées) ou en tronc de pyramide (piles de ponts et de viaducs)...

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 Dans un moteur diésel, la bielle est soumise à un effort maximal de compression à chaque tour : $F_{max} = 60 \times 10^3$ N.

La fréquence moyenne d'application de cette charge est 2 400 tr/min.

Compte tenu de la nature périodique de la charge, un calcul simple permet de savoir que la durée des 10^8 cycles nécessaire à la détermination de la limite de fatigue par la courbe de Wohler est de 695 heures environ, ce qui est peu pour la durée de vie d'un moteur.

On choisit donc pour la construction des bielles un acier spécial à haute résistance à la fatigue :

$$14\ \text{NC}\ 11\ ; \quad \sigma_C = 835\ \text{MPa}\ ;$$

$$\sigma_r = 1\,080\ \text{MPa}\ ; \quad \sigma_D = 604\ \text{MPa}.$$

QUESTIONS

1° Quelle doit être la section minimale du corps de bielle ?

2° Le corps de bielle est modélisé par un prisme de section $S = 160$ mm² et de longueur $l = 320$ mm. Le module de Young de l'acier est $E = 2.10^5$ MPa. Quel est le raccourcissement maxi du corps de bielle ?

Nota : Nous verrons au chapitre 9 que cette bielle se calcule au flambage.

RÉPONSES

$S \geqslant 100$ mm².

2° $\Delta l = 0{,}6$ mm.

2 Une transmission de puissance entre deux arbres parallèles est assurée par un système de deux poulies et une courroie plate.

Poulie motrice : $d_1 = 90$ mm.

Poulie réceptrice : $d_2 = 125$ mm.

Courroie plate : épaisseur $e = 4$ mm, largeur $= 35$ mm.

Hypothèses

— La contrainte pratique d'extension dans la courroie est $\sigma_{pe} = 6$ MPa.

— Le facteur d'adhérence au contact poulie-courroie est $f = 0{,}3$.

— La contrainte d'incurvation est négligée.

— L'angle d'enroulement sur chaque poulie sera pris égal à $\alpha = \pi$ radians.

— On connaît la relation classique entre les tensions du brin tendu (T) et du brin mou (t) de la courroie : $T = t\, e^{f\alpha}$.

Ainsi que l'expression de la tension initiale de pose : $T_0 = \frac{T + t}{2}$.

— On se place dans le cas où la courroie supporte un effort maximal d'extension correspondant à la contrainte $\sigma = \sigma_{pe}$.

QUESTIONS

1° Calculer les tensions T et t des deux brins de la courroie.

2° Calculer la tension initiale de pose T_0.

3° Calculer le couple maximal transmissible au niveau de la poulie motrice.

RÉPONSES

1° $T = 840$ N, $t = 327{,}3$ N.
2° $T_0 = 583{,}65$ N.
3° $M_m = 23$ Nm.

3 La partie utile d'une éprouvette pour essai de traction est un cylindre de section droite $S_0 = 100\ \text{mm}^2$ et de longueur $l_0 = 100$ mm.
L'effort maximal d'extension permettant de déterminer la contrainte limite élastique est $F_e = 32\,000$ N.
On donne pour l'acier utilisé : le coefficient de Poisson : $\nu = 0{,}3$ ainsi que le module de Young $E = 2.10^5$ MPa.

QUESTIONS

1° Quelle est la limite élastique σ_e de cet acier.

2° Au cours de l'essai, quelle est la valeur maximale atteinte pour les contraintes tangentielles ? Pour quelle orientation de la facette ?

3° Quelle erreur relative commet-on sur l'expression de la limite élastique lorsqu'on néglige la contraction de la section droite ?

RÉPONSES

1° $\sigma_e = 320$ MPa.
2° $|\tau_{nt}|_{\max} = 160$ MPa, $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$.
3° $\frac{\Delta\sigma_e}{\sigma_e} = 0{,}017\ \%$ (tout à fait négligeable).

4 Un réservoir d'épaisseur e faible devant les autres dimensions contient de l'air comprimé à la pression effective p. Ce réservoir a la forme générale d'un cylindre de diamètre extérieur d et de longueur l. Les deux extrémités du réservoir sont deux calottes sphériques de même épaisseur e.
Considérons un point M de la surface cylindrique extérieure. On admettra sans démonstration que l'état de contrainte est le même en tout point M de la surface extérieure du cylindre et que les directions principales des contraintes en M sont *(fig. 4.18)* :

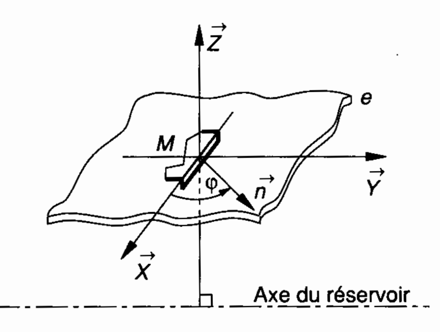


Fig. 4.18.

$(M, \vec{X})$ tangente au cercle de section droite en M ;
$(M, \vec{Y})$ parallèle à l'axe du réservoir en M ;
$(M, \vec{Z})$ rayon du cylindre en M.
On admet que la contrainte principale σ_Z est nulle. En fait elle est petite par rapport à σ_X et σ_Y.

QUESTIONS

1° Donner l'expression des contraintes principales σ_X et σ_Y.

2° Donner l'expression dans le repère principal $(M, \vec{X}, \vec{Y})$ d'une contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$ telle que $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi$ avec $(\vec{n}, \vec{Z}) = \frac{\pi}{2}$.

3° Donner l'expression de la contrainte tangentielle maximale. Pour quelle valeur de φ est-elle obtenue ?

4° Application numérique relative aux questions précédentes. On prendra : $e = 5$ mm, $d = 150$ mm, $l = 220$ mm, $p = 20$ MPa.

RÉPONSES

1° $\sigma_X = \frac{pd}{2e}$; $\sigma_Y = \frac{pd}{4e}$.
2° $\vec{C}(M, \vec{n}) = \sigma_X \cos\varphi \vec{X} + \sigma_Y \sin\varphi \vec{Y}$.
3° $|\tau_{nt}|_{\max} = \frac{pd}{8e}$ pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
4° $\sigma_X = 300$ MPa ; $\sigma_Y = 150$ MPa, $|\tau_{nt}|_{\max} = 75$ MPa.

5 Trois barres de même section S, construites dans le même matériau de module de Young E sont suspendues à un bâti supposé indéformable.

Hypothèses *(fig. 4.19)*

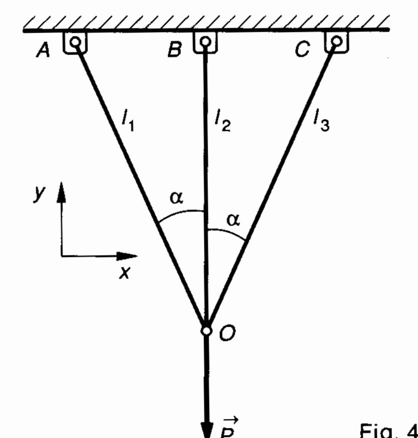


Fig. 4.19.

Les liaisons en A, B, C, O sont des liaisons pivot sans adhérence d'axe $\vec{z}$.
Le poids des barres est négligé.
On donne $\alpha = 30°$.
En O, on suspend une masse de poids $\vec{P}$.
N_1, N_2, N_3 désignent l'effort normal dans les barres.

QUESTIONS

1° Etudier l'équilibre de l'axe O et montrer que le système est hyperstatique.

2° Exprimer la relation entre les allongements des trois barres. On négligera la variation de α.

3° Exprimer les efforts normaux dans les barres.

4° On donne : $S = 100\ \text{mm}^2$, $\|P\| = 6\,000$ N, $\alpha = 30°$. Calculer les contraintes d'extension dans les trois barres.

RÉPONSES

1° Système de 4 résultantes coplanaires et concourantes en O, 3 forces inconnues pour 2 équations algébriques d'équilibre.

2° $\Delta l_1 = \Delta l_3 \approx \Delta l_2 \cos\alpha$.

3° $N_1 = N_3 = \dfrac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}$; $N_2 = \dfrac{P}{1+2\cos^3\alpha}$.

Pour $\alpha = 30°$: $N_1 = N_3 = \dfrac{3P}{4+3\sqrt{3}}$; $N_2 = \dfrac{4P}{4+3\sqrt{3}}$.

4° $\sigma_1 = \sigma_3 = 19{,}57$ MPa ; $\sigma_2 = 26{,}09$ MPa.

6 Un fil en acier de longueur $l = AB$ et de section S est lié en A et B à deux pièces fixes par deux liaisons pivot parfaites. On suspend au milieu I du fil une masse de poids $\vec{P}$ et le fil prend la configuration élastique $AI'B$.
Soit E le module de Young de l'acier constituant le fil.

Hypothèses *(fig. 4.20)*
Le poids du fil est négligé. Il n'y a pas de tension initiale de pose.

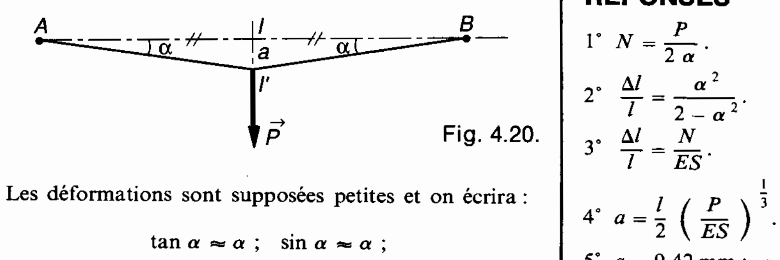


Fig. 4.20.

Les déformations sont supposées petites et on écrira :

$$\tan\alpha \approx \alpha \ ; \quad \sin\alpha \approx \alpha \ ;$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad (\alpha \text{ radians}).$$

QUESTIONS

1° Exprimer l'effort normal d'extension dans le fil en fonction de P et de α.

2° Exprimer l'allongement relatif $\dfrac{\Delta l}{l}$ du fil en fonction de α.

3° Exprimer l'allongement relatif $\dfrac{\Delta l}{l}$ du fil en fonction de l'effort normal N.

4° Dans le résultat de la 2e question on peut négliger α^2 par rapport à 2. Exprimer $II' = a$ en fonction de P.

5° *Application numérique :* $l = 320$ mm ; $P = 200$ N ; $E = 2.10^5$ MPa ; $S = 4{,}9$ mm².

RÉPONSES

1° $N = \dfrac{P}{2\alpha}$.

2° $\dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{\alpha^2}{2-\alpha^2}$.

3° $\dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{N}{ES}$.

4° $a = \dfrac{l}{2}\left(\dfrac{P}{ES}\right)^{\frac{1}{3}}$.

5° $a = 9{,}42$ mm ; $\alpha \approx 59 \times 10^{-3}$ rad ;
$\dfrac{\Delta l}{l} = 173 \times 10^{-5}$ mm ; $N = 1\,695$ N.



cisaillement simple

Dans le cas particulier d'une poutre droite tendue et comprimée suivant ses directions principales $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ et telle que $\sigma_Y = -\sigma_X$, nous avons vu au *chapitre 3, paragraphe 5.4* que pour toutes les sections de normale $\vec{n}$ telle que $(\vec{X}, \vec{n}) = \pm \frac{\pi}{4}$ la contrainte en un point quelconque est telle que :

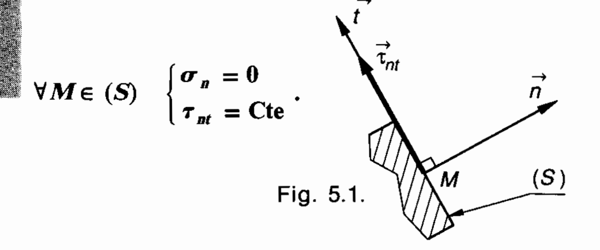
$$\sigma_n = 0 \quad \text{et} \quad |\tau_{nt}| = |\sigma_X| .$$

σ_X est constant pour une poutre tendue, il en résulte que τ_{nt} est constant en tout point d'une telle section.

1. DÉFINITIONS

1.1. ETAT DE CISAILLEMENT PUR

Dans une section (S) de normale $\vec{n}$ *(fig. 5.1)* l'état de cisaillement pur est caractérisé en tout point de cette section par une contrainte normale nulle et une répartition uniforme de la contrainte tangentielle



$$\forall M \in (S) \quad \begin{cases} \sigma_n = 0 \\ \tau_{nt} = \text{Cte} \end{cases} .$$

Fig. 5.1.

1.2. CISAILLEMENT SIMPLE

Une section droite (S) d'un solide (E) est sollicitée au cisaillement simple si la réduction au centre de surface G de (S) du torseur des forces de cohésion

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\left\{\begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{matrix}\right\} \text{ est telle que } \left|\begin{matrix} \vec{R} = \vec{T} \\ \vec{M}_G = \vec{0} \end{matrix}\right. .$$

REMARQUES

La définition du cisaillement simple s'applique à une section droite donnée (S) de la poutre et non à l'ensemble de cette poutre. La ligne moyenne de la poutre peut ne pas être rectiligne.
La section droite (S) peut avoir une forme quelconque.
La sollicitation de cisaillement simple est pratiquement irréalisable expérimentalement, on peut cependant s'en rapprocher dans certains cas.

2. EXEMPLES

2.1. ACTION D'UNE CISAILLE
(fig. 5.2)

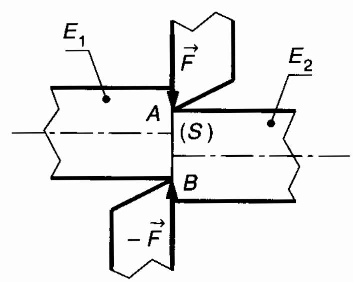


Fig. 5.2.

Sous l'action des deux résultantes $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ exercées par les deux couteaux de la cisaille, la poutre (E) tend à se séparer en deux tronçons (E_1) et (E_2) glissant l'un par rapport à l'autre dans le plan de la section droite (S).

2.2. AXES D'ARTICULATION *(fig. 5.3)*

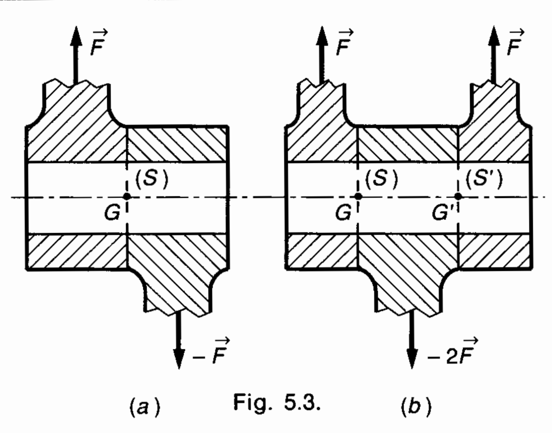


Fig. 5.3.

Dans le cas de la *figure 5.3.a,* il y a une seule section (*S*) sollicitée au cisaillement.
Dans le cas de la *figure 5.3.b,* il y a deux sections (*S*) et (*S'*) sollicitées au cisaillement.
Dans les deux cas le moment résultant $\vec{M}_G$ du torseur de cohésion $\{\mathcal{T}_{coh}\}$ n'est pas nul.
Le calcul au cisaillement des sections (*S*) et (*S'*) n'est donc qu'une première approximation. Dans la pratique ce calcul n'intervient que pour une vérification de résistance. Ce sont les conditions de matage (pièces fixes) et de graissage (pièces mobiles) qui vont déterminer les dimensions d'une clavette ou d'un axe d'articulation, d'où par exemple la possibilité d'évider un axe de piston pour réduire l'inertie des pièces en mouvement.

2.3. RIVETS *(fig. 5.4)*

La section (*S*) du rivet est principalement sollicitée au cisaillement. Le moment résultant $\vec{M}_G$ du torseur de cohésion $\{\mathcal{T}_{coh}\}$ n'est pas nul, il en résulte une flexion du rivet *(fig. 5.5)* dans le cas de glissement des tôles et s'il existe un jeu entre le rivet et son logement.

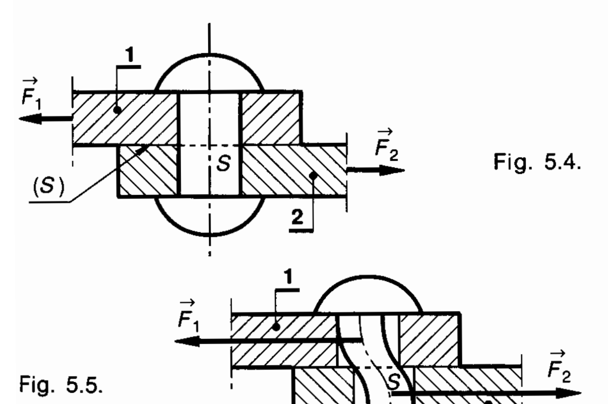


Fig. 5.4.

Fig. 5.5.

3. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

3.1. MODÉLISATION *(fig. 5.6)*

L'étude expérimentale est réalisée avec une poutre de section rectangulaire parfaitement encastrée, sur laquelle on applique un effort variable $\vec{F}$ uniformément réparti et situé dans une section droite (*S'*) à une distance très petite Δx de la section d'encastrement (*S*).

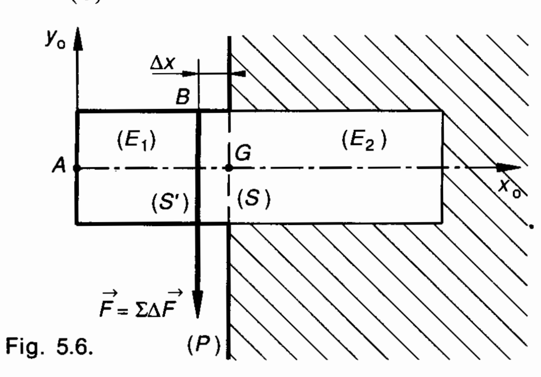


Fig. 5.6.

Considérons le tronçon (E_1) de (*E*) *(fig. 5.7).*

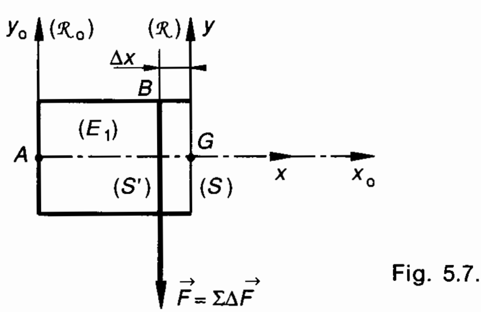


Fig. 5.7.

La réduction au centre de surface *G* de (*S*) du torseur des forces de cohésion s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} = -\vec{F} \\ \vec{M}_G = -\overrightarrow{GB} \wedge \vec{F} \end{Bmatrix}.$$

En projection dans le repère $\mathcal{R} = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à la section (*S*) on obtient :

$$\begin{vmatrix} N = 0 \\ T_y = \|\vec{F}\| \\ T_z = 0 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} M_t = 0 \\ M_{fy} = 0 \\ M_{fz} = -\|\vec{F}\|\,\Delta x \end{vmatrix}$$

soit

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \|\vec{F}\| & 0 \\ 0 & -\|\vec{F}\|\,\Delta x \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} . \quad (1)$$

Pour que cette modélisation soit conforme à la définition de sollicitation au cisaillement de la section (S), il est nécessaire que Δx soit nul, ce qui n'est pas possible. On peut par contre réaliser l'essai avec un Δx très petit, alors on peut négliger $M_{fz} \approx 0$.

3.2. RÉSULTATS DE L'ESSAI

Au cours de l'essai, la section droite (S') *(fig. 5.8)* glisse transversalement de Δy par rapport à (S). On admet que ce glissement se fait sans déformation interne de (S) et (S').

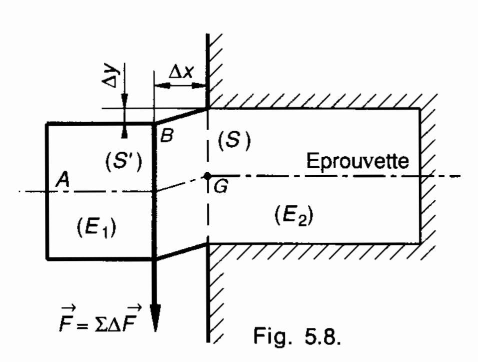


Fig. 5.8.

La courbe enregistrée *(fig. 5.9)* au cours de l'essai donne la relation entre l'intensité de la force $\vec{F}$ et le glissement transversal Δy de la section (S') par rapport à (S).

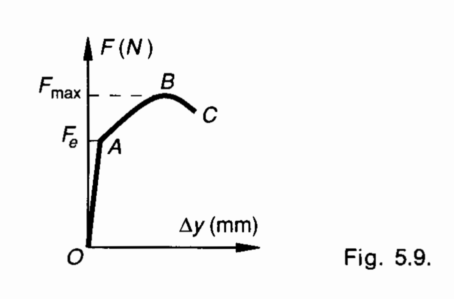


Fig. 5.9.

Sur la courbe *figure 5.9* on distingue deux zones :
— la zone OA des **déformations élastiques** ou domaine élastique ;
— la zone ABC des **déformations permanentes** ou domaine plastique.

4. ÉTUDE DES DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES

Dans la zone des déformations élastiques il y a proportionnalité entre le glissement transversal Δy et l'effort de cisaillement $\|\vec{F}\|$.

$$\|\vec{F}\| = k\,\Delta y\,.$$

La valeur de k varie avec les dimensions de l'éprouvette.
On constate qu'avec :
— en abscisse, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ appelé **glissement relatif** ou **déviation** γ en un point de la section droite (sans unité) ;
— en ordonnées, le rapport $\frac{\|\vec{F}\|}{S}$ appelé **effort unitaire de cisaillement** (en MPa).

Nous obtenons des courbes identiques qui ne dépendent que du matériau de l'éprouvette.
On note :

$$\frac{\|\vec{F}\|}{S} = G\,\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

G est le module d'élasticité transversale ou module de Coulomb.
$\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ est le glissement relatif ou déviation.

Unités :
$\|\vec{F}\|$ (en newton) ; S (en millimètre carré) ; Δy et Δx (en millimètre) ; G (en mégapascal).
Donnons les valeurs moyennes de G pour certains matériaux :

Aluminium :	28 000 MPa
AS13 ; AU4G :	32 000 MPa
Fontes :	40 000 MPa
Cuivre :	48 000 MPa
Aciers :	80 000 MPa
Tungstène :	160 000 MPa

5. ÉTUDE DES CONTRAINTES

5.1. CONTRAINTE MOYENNE DE CISAILLEMENT

Considérons l'équilibre du tronçon (E_1) *(fig. 5.10)*.

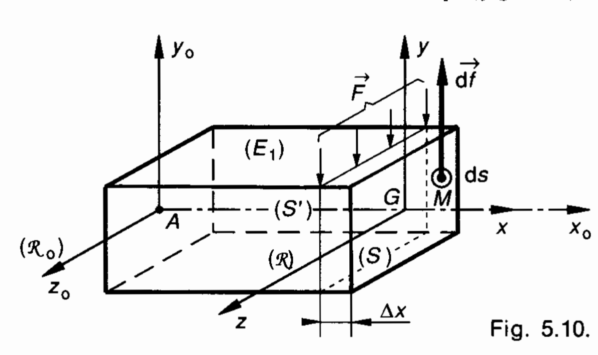


Fig. 5.10.

$\mathcal{R}_0 = (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est le repère lié à la poutre.
$\mathcal{R} = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est le repère lié à la section (S).
Nous avons vu au *paragraphe 3.1* ci-dessus que la réduction du torseur des efforts de cohésion au centre de surface G de la section (S) s'exprime par :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ \|\vec{F}\| & 0 \\ 0 & -\|\vec{F}\|\,\Delta x \end{matrix}\right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

d'où :

$$N = 0\,; \quad T_y = \|\vec{F}\|\,; \quad T_z = 0$$
$$M_t = 0\,; \quad M_{f_y} = 0\,; \quad M_{f_z} = -\|\vec{F}\|\,\Delta x\,.$$

Soit $\overrightarrow{df}$ l'effort de cohésion que (E_2) exerce sur (E_1) en un point M de la section (S). Si on admet que Δx est très petit et qu'en conséquence $M_{f_z} \approx 0$ on se trouve alors dans les conditions du cisaillement simple. Dans ce cas théorique nous admettrons que les efforts de cohésion $\overrightarrow{df}$ sont uniformément répartis dans la section (S) et parallèles à $\vec{T}$.
On en déduit que :

$$\sigma_x = 0$$

et $$\vec{C}(M, \vec{x}) = \frac{\overrightarrow{df}}{dS} = \tau_{xy}\,\vec{y}\,.$$

Si $\overrightarrow{df}$ est uniformément réparti dans (S) il en résulte que τ_{xy} est uniformément répartie dans la section droite (S). Cette hypothèse n'étant qu'approximative et pour éviter toute confusion avec la vraie valeur de la contrainte tangentielle en un point M de (S), nous noterons :

$$\boxed{\tau_{moy} = \frac{|T|}{S}}\,. \qquad \textbf{(1)}$$

REMARQUE

Si la direction de $\vec{T}$ est quelconque dans (S) :

$$\vec{T} = T_y\,\vec{y} + T_z\,\vec{z}$$

d'où $$|T| = \sqrt{T_y^2 + T_z^2}\,.$$

5.2. CONDITION DE RÉSISTANCE

En utilisant la courbe, *figure 5.9* de l'enregistrement de l'essai de cisaillement on détermine la **charge limite élastique F_e** et on en déduit la **contrainte tangentielle moyenne limite élastique τ_e**

$$\boxed{\tau_e = \frac{F_e}{S}}\,. \qquad (2)$$

De la même façon on détermine la **charge maximale F_{max}** et la **contrainte tangentielle moyenne de rupture τ_r**.

$$\boxed{\tau_r = \frac{F_{max}}{S}}\,. \qquad (3)$$

5.3. CONTRAINTE PRATIQUE DE CISAILLEMENT

Elle est définie par :

$$\boxed{\tau_p = \frac{\tau_e}{s}} \qquad (4)$$

s est un coefficient de sécurité.
Si l'utilisateur n'a pas la possibilité de réaliser un essai de cisaillement pour déterminer τ_e, il est possible d'utiliser les valeurs approximatives suivantes en fonction du type de matériau :

Acier doux : ($\sigma_e \leqslant 270$ MPa) Alliages d'aluminium	$\tau_e = 0{,}5\ \sigma_e$
Aciers mi-durs : ($320 \leqslant \sigma_e \leqslant 500$ MPa)	$\tau_e = 0{,}7\ \sigma_e$
Aciers durs : ($\sigma_e \geqslant 600$ MPa) Fontes	$\tau_e = 0{,}8\ \sigma_e$

5.4. CONDITION DE RÉSISTANCE AU CISAILLEMENT

La condition de résistance au cisaillement s'écrit :

$$\tau_{max} \leqslant \tau_p\,.$$

Dans la plupart des cas τ_{max} est difficile à déterminer, on se contente donc le plus souvent de l'expression approchée :

$$\tau_{moy} \leqslant \tau_p$$

soit

$$\boxed{\frac{|T|}{S} \leqslant \tau_p}\,. \qquad (5)$$

6. APPLICATION

La *figure 5.11* représente l'axe d'articulation 4 qui dans un compresseur assure la liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$ entre le piston **1** et la bielle **2** par l'intermédiaire du coussinet **3**.

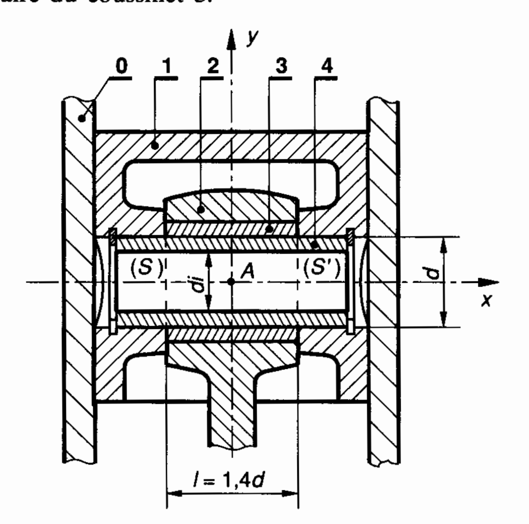


Fig. 5.11.

Le plan $(A, \vec{y}, \vec{z})$ est un plan de symétrie pour le mécanisme et pour les charges qui lui sont appliquées. Le diamètre du piston est $D = 56$ mm et la pression effective maximale qui s'exerce sur le piston est $p_1 = 0{,}7$ MPa (≈ 7 bar) lorsque l'axe de la bielle est confondu avec celui du piston. Le but poursuivi est le calcul du diamètre de l'axe **4**.
Le principe de ce calcul est le suivant :
— détermination directe des dimensions de l'axe 4 d'après la condition de graissage (la condition de non matage étant moins contraignante ne sera pas prise en compte).
La pression admissible au contact 3-4 est :

$$p_3 \leqslant 4 \text{ MPa} ;$$

— vérification des dimensions trouvées ci-dessus en calculant la contrainte moyenne de cisaillement dans l'axe. Le matériau de celui-ci est de l'acier doux XC18 pour lequel $\sigma_e = 265$ MPa.

QUESTION 1

Déterminer les éléments de réduction en *A* du torseur des actions mécaniques $\{\mathcal{T}(3 \to 4)\}$.

RÉPONSE

On considère l'équilibre de l'ensemble $E = \{1, 4\}$.
• L'action de pression des gaz sur le piston 1 est modélisable en *A* par le glisseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{gaz} \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(\text{gaz} \to 1) \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{A}(\text{gaz} \to 1) = -\ \|\vec{A}(\text{gaz} \to 1)\|\ \vec{y}$$

$$\|\vec{A}(\text{gaz} \to 1)\| = p_1\, S = 0{,}7 \times \frac{\pi\, 56^2}{4} = 1\,724 \text{ N}.$$

d'où :

$$\{\mathcal{T}(\text{gaz} \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\,1\,724 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

• Si on néglige les actions dynamiques sur la bielle **2** celle-ci est en équilibre sous l'action de deux glisseurs dont les résultantes ont pour support l'axe de la bielle. On en déduit que dans la position de la figure, le torseur des actions de contact du coussinet **3** sur l'axe **4** est modélisable en *A* par un glisseur :

$$\{\mathcal{T}(3 \to 4)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(3 \to 4) \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{tel que dans } (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

$$\{\mathcal{T}(3 \to 4)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y(3 \to 4) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

• La liaison du piston **1** avec le cylindre **0** est modélisable par une liaison pivot glissant sans adhérence. L'action du cylindre sur le piston est donc modélisable en *A* par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(0 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X(0 \to 1) & L(0 \to 1) \\ 0 & 0 \\ Z(0 \to 1) & N(0 \to 1) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

L'équilibre de $E = \{1, 4\}$ se traduit par :

$$\{\mathcal{T}(\text{gaz} \to 1)\} + \{\mathcal{T}(3 \to 4)\} + \{\mathcal{T}(0 \to 1)\} = \{\vec{0}\}$$

ce qui permet d'écrire en *A* et dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$X(0 \to 1) = 0$$
$$-\,1\,724 + Y(3 \to 4) = 0$$
$$Z(0 \to 1) = 0$$
$$L(0 \to 1) = 0$$
$$N(0 \to 1) = 0$$

d'où $\boldsymbol{Y(3 \to 4) = 1\,724}$ **(N)**

soit

$$\{\mathcal{T}(3 \to 4)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1\,724 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

QUESTION 2

En admettant que la pression moyenne sur le coussinet 3 a pour expression :

$$p_{moy} = \frac{F}{l d}$$

et en adoptant pour la largeur *l* du coussinet la valeur $l = 1{,}4\, d$ déterminer le diamètre extérieur *d* de l'axe 4 en fonction de la pression au graissage entre 3 et 4.

RÉPONSE

L'expression de la pression moyenne entre 3 et 4 permet d'écrire :

$$p_{moy} = \frac{\|\vec{A}(3 \to 4)\|}{ld}$$

soit
$$d = \sqrt{\frac{\|\vec{A}(3 \to 4)\|}{1{,}4\, p_{moy}}} = \sqrt{\frac{1\,724}{1{,}4 \times 4}}$$

$$\mathbf{d = 17{,}5\ mm}\ .$$

QUESTION 3

On se propose de vérifier l'axe 4 de diamètre $d = 17{,}5$ mm au cisaillement simple. On adopte pour cette construction un coefficient de sécurité $s = 5$.

RÉPONSE

La contrainte moyenne de cisaillement dans une section (S) a pour expression :

$$|\tau_{moy}| = \frac{|T|}{S}\ . \qquad (1)$$

Il y a deux sections (S) et (S') sollicitées au cisaillement. Pour chacune d'elles l'effort tranchant a pour valeur :

$$|T| = \frac{\|\vec{A}(3 \to 4)\|}{2} = \frac{1\,724}{2} = 862\ \text{N}$$

la relation (1) s'écrit :

$$|\tau_{moy}| = \frac{862 \times 4}{\pi \times 17{,}5^2} = 3{,}58\ \text{MPa}\ .$$

La contrainte pratique au cisaillement a pour expression :

$$\tau_p = \frac{\tau_e}{s}\ .$$

Pour l'acier doux XC18 on peut admettre que $\tau_e = 0{,}5\, \sigma_e$ d'où :

$$\tau_p = \frac{0{,}5\, \sigma_e}{s} = \frac{0{,}5 \times 265}{5} = 26{,}5\ \text{MPa}$$

$|\sigma_{moy}|$ est très inférieur à τ_p, on peut donc admettre sans calcul plus précis que l'axe **4** est largement vérifié au cisaillement simple.

QUESTION 4

Compte tenu de la très faible contrainte tangentielle moyenne dans la section (S) on décide d'évider l'axe 4.
Dans une première approche on néglige le moment de flexion M_{f_z} dans les sections (S) et (S') qui dans cette hypothèse sont sollicitées uniquement au cisaillement.
On choisit un coefficient de sécurité $s = 5$. Déterminer le diamètre intérieur d_i de l'axe 4.

RÉPONSE

La contrainte tangentielle limite élastique τ_e de l'acier doux XC18 a pour valeur approximative :

$$\tau_e = 0{,}5\, \sigma_e = 0{,}5 \times 265 = 132{,}5\ \text{MPa}\ .$$

On en déduit la contrainte pratique de cisaillement dans les sections (S) et (S')

$$\tau_p = \frac{\tau_e}{s} = \frac{132{,}5}{5} = 26{,}5\ \text{MPa}\ .$$

La condition de résistance au cisaillement a pour expression : $\frac{|T|}{S} \leqslant \tau_p$

soit
$$S \geqslant \frac{|T|}{\tau_p}$$

$$\frac{\pi}{4}(d^2 - d_i^2) \geqslant \frac{|T|}{\tau_p}$$

$$d_i \leqslant \sqrt{d^2 - \frac{4|T|}{\pi \tau_p}} = \sqrt{17{,}5^2 - \frac{4 \times 862}{\pi \times 26{,}5}}$$

$$\mathbf{d_i \leqslant 16{,}2\ mm}\ .$$

QUESTION 5

En fonction du résultat du 4° la rigidité de l'axe 4 vous paraît-elle convenable ? conclusion.

RÉPONSE

L'épaisseur de l'axe 4 est très faible

$$e = \frac{d - d_i}{2} = \frac{17{,}5 - 16{,}2}{2} = 0{,}65\ \text{mm}\ .$$

Nous savons que le moment de flexion M_{f_z} dans les sections (S) et (S') n'est pas nul. Il en résulte une déformation en flexion de l'axe **4**. Il faudra donc augmenter l'épaisseur de l'axe **4** et en déterminer le diamètre intérieur par un calcul de rigidité en flexion.
A priori un diamètre intérieur $d_i = 12{,}5$ mm semble plus convenable, ce qui correspond à une épaisseur $e = 2{,}5$ mm pour l'axe **4**.
En conclusion de cette étude, dans le cas d'un axe d'articulation avec mouvement relatif au contact de l'axe, la condition de graissage est prépondérante par rapport à celle de résistance au cisaillement.

EXERCICES AVEC SOLUTIONS

1 La *figure 5.12* représente la liaison pivot de la barre **1** avec le support **2** par l'intermédiaire de l'axe **3**. L'axe **3** est en acier E28 pour lequel $\sigma_e = 250$ MPa et $\tau_e = 125$ MPa.

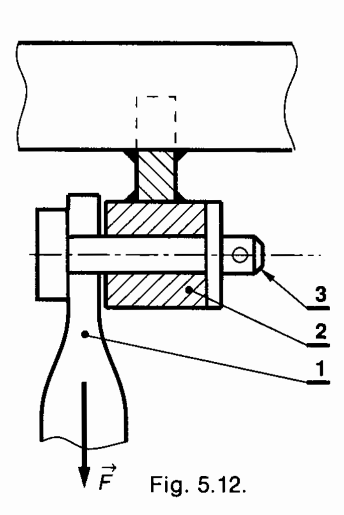


Fig. 5.12.

L'effort maximal sur **1** est $\|\vec{F}\| = 3\,000$ N.
Pour cette construction on adopte un coefficient de sécurité $s = 2{,}5$.

QUESTION

Déterminer l'effort tranchant dans la section de l'axe 3 sollicitée au cisaillement et le diamètre *d* de cet axe.

RÉPONSE

$$|T| = 3\,000 \text{ N}\,; \quad d \geqslant 8{,}74 \text{ mm}\,.$$

2 La *figure 5.13* représente la section d'un arbre cylindrique en acier XC18 pour lequel $\sigma_e = 265$ MPa. Le couple transmis par cet arbre a pour valeur $M = 65$ Nm. Un calcul préalable de résistance a permis de déterminer le diamètre $d = 32$ mm de cet arbre.

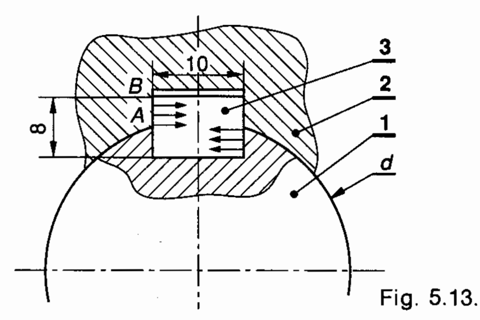


Fig. 5.13.

On se propose de déterminer la longueur d'une clavette parallèle, forme *B* (à bout plat), de section 10×8 destinée à la liaison en rotation de cet arbre avec une poulie. Cette clavette est en acier E24 pour lequel $\sigma_e = 215$ MPa et $\tau_e = 108$ MPa. On adopte un coefficient de sécurité $s = 3$.
La pression maximale admissible au matage sur le flanc *AB* du contact poulie-clavette est supposée uniforme et a pour valeur $p = 30$ MPa. On donne $AB = 4$ mm. On admet que la résultante $\vec{F}$ des actions de contact sur le flanc de la clavette est perpendiculaire à la surface de contact et que son support est situé à la distance $\frac{d}{2}$ de l'axe de l'arbre **1**.

QUESTIONS

1° Déterminer la norme de $\vec{F}$.

2° A partir de la condition de non-matage du flanc de la clavette, déterminer la longueur minimale *l* de celle-ci.

3° Vérifier la longueur de la clavette à partir de la condition de résistance au cisaillement de celle-ci.

RÉPONSES

1° $\|\vec{F}\| = 4\,062{,}5$ N.
2° $l \geqslant 33{,}85$ mm.
3° $l \geqslant 11{,}28$ mm.

3 La *figure 5.14* représente un plancher **3** en appui plan parfait sur une plaque **2** en acier. Cette plaque est soudée sur un poteau **1** en tube d'acier de diamètre extérieur $d = 300$ mm. La liaison **1-2** est obtenue par deux cordons de soudure continus de largeur 6 mm.
L'action du plancher **3** sur la plaque **2** est modélisable en *A* par un glisseur d'axe $(A, \vec{x})$ tel que :

$$\|\vec{A}(3 \to 2)\| = 6 \times 10^4 \text{ N}\,.$$

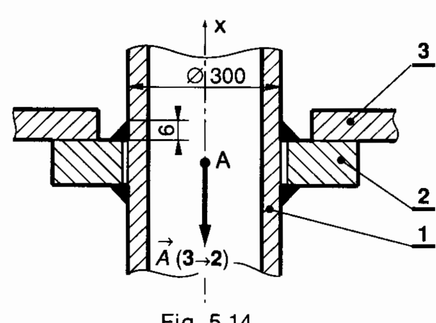


Fig. 5.14.

QUESTIONS

1° Déterminer la surface de la section sollicitée au cisaillement pour l'ensemble des deux cordons de soudure.

2° Déterminer la contrainte moyenne de cisaillement dans chaque cordon de soudure.

RÉPONSES

1° $S = 11\,309{,}7$ mm^2.
2° $\tau_{moy} = 5{,}3$ MPa.

4 Pour protéger la chaîne cinématique d'une machine on utilise au niveau de la liaison des arbres **1** et **2** (*fig. 5.15*) un dispositif de sécurité qui comprend un manchon **3** et deux goupilles **4** et **5**.

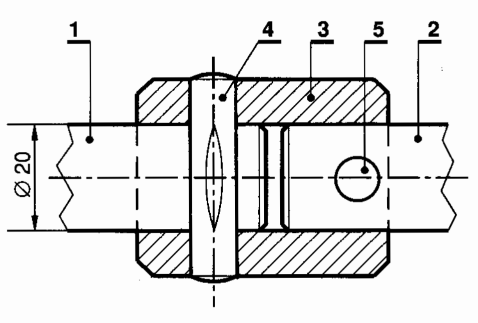


Fig. 5.15.

Le diamètre des arbres **1** et **2** est de 20 mm. On fixe la valeur maximale du moment du couple à transmettre à $\|\vec{M}(1 \rightarrow 2)\| = 60$ Nm.
Les goupilles **4** et **5** ont le même diamètre d, elles sont en acier A33 pour lequel $\sigma_r = 330$ MPa et $\tau_r = 150$ MPa.

QUESTIONS

1° Déterminer l'effort tranchant $|T|$ dans les sections sollicitées au cisaillement.

2° Déterminer le diamètre d des goupilles.

RÉPONSES

1° $|T| = 3\,000$ N.
2° $d = 5$ mm.

5 La *figure 5.16* représente en coupe la liaison pivot du levier oscillant **5** avec le bâti d'une presse pneumatique. Cette liaison pivot est obtenue à partir de l'axe **13** et des paliers **14** et **15** liés au bâti **0**.

On se propose de déterminer le diamètre d de l'axe **13**. La *figure 5.16 b* précise le repère $\mathcal{R} = (D, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à l'axe **13**.
Unités : longueur en millimètres, force en newton.
Les actions mécaniques sur l'axe **13** des paliers **14** et **15** et du levier oscillant **5** sont modélisables respectivement en A, B, C par les glisseurs :

$$\{\mathcal{T}(14 \rightarrow 13)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(14 \rightarrow 13) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que : $\vec{A}(14 \rightarrow 13) = -3\,600\,\vec{y}$

$$\{\mathcal{T}(15 \rightarrow 13)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(15 \rightarrow 13) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que : $\vec{B}(15 \rightarrow 13) = -3\,600\,\vec{y}$

$$\{\mathcal{T}(5 \rightarrow 13)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(5 \rightarrow 13) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

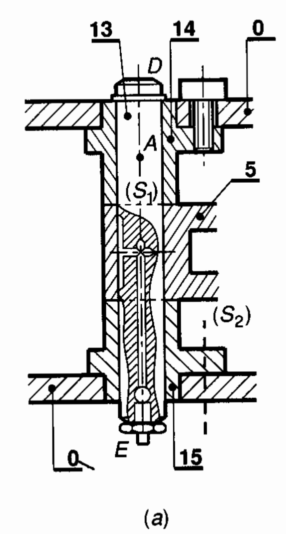
tel que : $\vec{C}(5 \rightarrow 13) = 7\,200\,\vec{y}$.

La *figure 5.16 a* montre d'une part que l'axe **13** présente deux sections (S_1) et (S_2) sollicitées au cisaillement et d'autre part qu'un graissage est prévu pour la liaison pivot **5-13** entre les sections (S_1) et (S_2).
La pression admissible de graissage a pour valeur $p = 15$ MPa.
L'axe **13** est en acier XC18 pour lequel $\sigma_e = 265$ MPa et $\tau_e = 150$ MPa. On adopte un coefficient de sécurité $s = 3$.

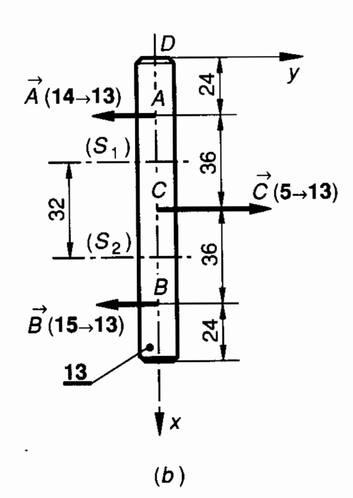
QUESTIONS

1° Déterminer le diamètre d de l'axe 13 à partir de la condition de graissage.

2° Déterminer τ_p et vérifier l'axe 13 à partir de la condition de résistance au cisaillement.



(*a*)



(*b*)

Fig. 5.16.

RÉPONSES

1° $d = 15$ mm.
2° $\tau_p = 50$ MPa ; $\tau_{uniforme} = 20,37$ MPa.
On peut donc admettre sans calculer τ_{max} que $\tau_{max} < \tau_p$.

6 On se propose d'utiliser une poinçonneuse pour découper des disques de diamètre d et d'épaisseur e dans une tôle en acier 10F1 pour lequel $\tau_r = 200$ MPa. On utilise un poinçon de diamètre d en acier 20NC6 pour lequel $\sigma_e = 980$ MPa. On adopte pour le poinçon un coefficient de sécurité $s = 2,45$.
Le poinçon exerce sur la tôle un effort tranchant maximal de valeur $|T| = 4\,000$ N.

QUESTIONS

1° A partir de la condition de résistance à la compression du poinçon et de la condition de cisaillement de la tôle, déterminer la relation littérale liant d et e.

2° Dans ces conditions déterminer l'épaisseur maximale de la tôle et le diamètre d du plus petit disque qu'on peut poinçonner dans cette tôle.

3° Quelle est l'épaisseur maximale e de cette tôle pour découper des disques de diamètre $d = 10$ mm ?

RÉPONSES

1° $d \geqslant \dfrac{4\,e\tau_r\,s}{\sigma_e}$.
2° $d \geqslant 3,57$ mm ; $e \leqslant 1,78$ mm.
3° $e \leqslant 0,636$ mm.

6 torsion simple

1. DÉFINITION ET HYPOTHÈSES

1.1. DÉFINITION

Considérons un solide E et une section droite (S) de centre de surface G *(fig. 6.1)*.
Soit $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère de définition des sollicitations lié à la section (S).

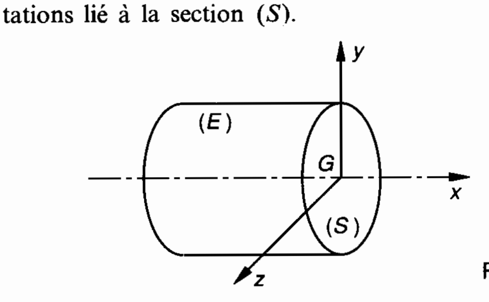


Fig. 6.1.

La section droite (S) de E est sollicitée en torsion simple si dans $\mathcal{R}$ les éléments de réduction du torseur de cohésion s'expriment par :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_G} = M_t\,\vec{x} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

1.2. HYPOTHÈSES SUR LE SOLIDE

— Le solide est un cylindre de révolution.
— Le poids du solide est négligé.
— La surface du cylindre est parfaitement polie.

1.3. ÉTUDE DE CAS

Un arbre cylindrique de révolution *(fig. 6.2)* est sollicité en torsion simple dans toutes ses sections droites (S) lorsqu'il est soumis à ses deux extrémités à des liaisons dont les torseurs associés se réduisent à deux torseurs couples opposés. Les moments de ceux-ci sont parallèles à l'axe du cylindre.

$$\{\mathcal{T}_1\} = {}_{G_1}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{G_1}} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_2\} = {}_{G_2}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{G_2}} \end{Bmatrix}$$

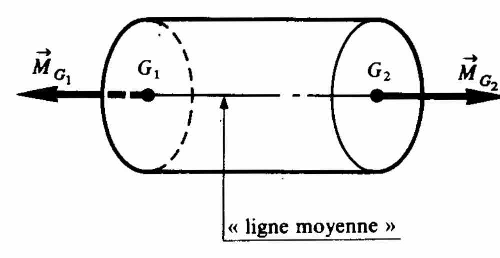


Fig. 6.2.

$\overrightarrow{M_{G_1}}$ et $\overrightarrow{M_{G_2}}$ ont pour support la ligne moyenne et sont tels que :

$$\overrightarrow{M_{G_1}} + \overrightarrow{M_{G_2}} = \vec{0}\,.$$

2. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES DÉFORMATIONS

2.1. ESSAI DE TORSION SIMPLE

Le solide de forme cylindrique de révolution est parfaitement encastré à son extrémité gauche suivant la section droite (S_1) de centre de surface G_1 *(fig. 6.3)*.

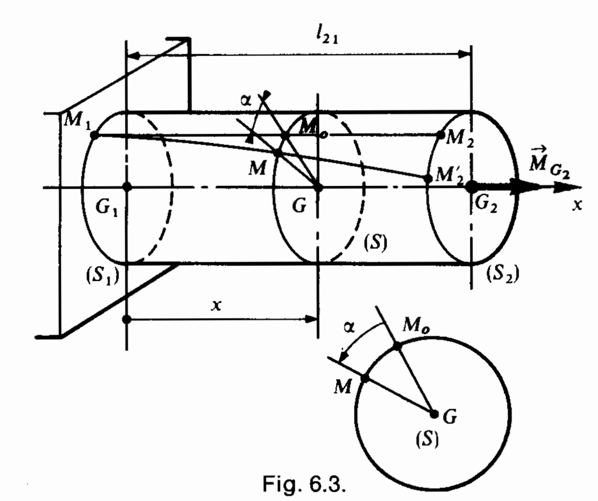


Fig. 6.3.

On trace avant l'essai une génératrice M_1M_2 du cylindre. On applique à l'extrémité droite de la poutre sur la section (S_2) de centre de surface G_2 un système d'actions mécaniques de liaison modélisable en G_2 par un torseur couple :

$$\{\mathcal{T}_2\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{G_2}} \end{matrix} \right\}_{G_2} \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{M_{G_2}} = \left\|\overrightarrow{M_{G_2}}\right\| \vec{x}\,.$$

On fait croître $\left\|\overrightarrow{M_{G_2}}\right\|$ à partir de zéro et on mesure les déformations de la poutre. On constate que :

— toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe ;

— la distance entre deux sections droites données reste sensiblement constante ;

— le déplacement d'une section droite (S) est uniquement une rotation d'angle α autour de son axe et cette rotation est proportionnelle à sa distance x à la section encastrée (S_1) :

$$\boldsymbol{\alpha = kx}\,. \tag{1}$$

La génératrice M_1M_2 se déforme donc suivant une hélice M_1M_2'. Lorsque $\left\|\overrightarrow{M_{G_2}}\right\|$ croit, un dispositif enregistreur permet de mesurer α.

La *figure 6.4* représente l'enregistrement d'un essai de torsion simple. La courbe obtenue est semblable à celle de l'enregistrement de l'essai d'extension.

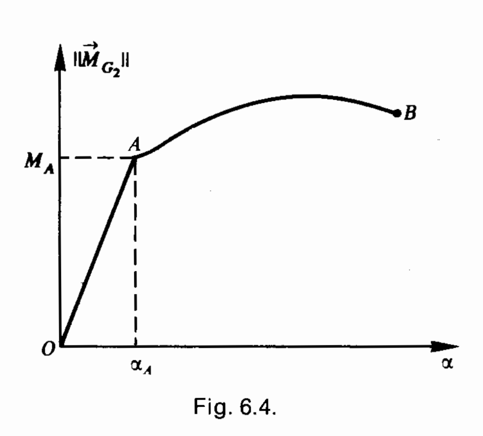


Fig. 6.4.

Nota : Pour alléger les écritures nous désignerons par M_{G_2} la norme du vecteur $\overrightarrow{M_{G_2}}$.

• *Dans la zone OA* pour laquelle $M_{G_2} < M_A$, l'angle α est proportionnel à M_{G_2}. Si on annule M_{G_2} la déformation α disparait. La zone OA correspond donc à une zone de déformation élastique.

• *Dans la zone AB* pour laquelle $M_{G_2} > M_A$ la déformation devient plus importante et en partie permanente. L'essai se termine en B par la rupture de l'éprouvette.

2.2. ANGLE UNITAIRE DE TORSION

Définition

Dans la zone des déformations élastiques, on appelle angle unitaire de torsion, la déformation angulaire relative θ entre deux sections distantes de l'unité de longueur :

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\alpha}{x}}\,. \tag{2}$$

Unités : α en radians, x en millimètres, θ en rad/mm.
D'après la relation (1) on note que $\theta = k = \text{Cte}$.
Dans la zone OA des déformations élastiques *(fig. 6.4)*, on peut écrire que : $M_{G_2} = \lambda\,\alpha$
soit

$$M_{G_2} = \lambda\,\theta x\,. \tag{3}$$

3. ÉTUDE DES CONTRAINTES

3.1. EFFORT DE COHÉSION DANS UNE SECTION DROITE

La théorie de l'élasticité permet de démontrer que dans un plan de section droite (S) les forces de cohésion $\overrightarrow{df}$ sont dans le plan de la section droite et normales au rayon GM *(fig. 6.5)*. On en déduit qu'en tout point M de (S) la contrainte normale est nulle

$$\sigma_x = 0\,.$$

Soit $M(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère direct tel que $\vec{x}$ est la normale extérieure à (S) et tel que $\vec{y}_1 = \dfrac{\overrightarrow{GM}}{\|\overrightarrow{GM}\|}$ *(fig. 6.5)*.

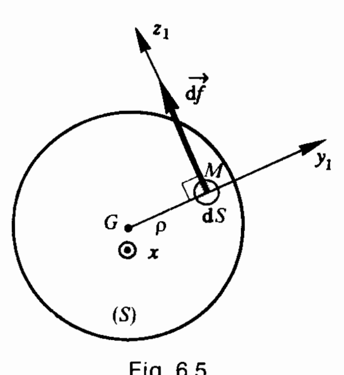


Fig. 6.5.

Dans le repère $M(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ on peut écrire que :

$\vec{C}(M, \vec{x}) = \tau_{xz_1} . \vec{z}_1$
τ_{xz_1} est la composante algébrique sur $\vec{z}_1$ du vecteur contrainte $\vec{C}(M, \vec{x})$.
Par définition : $\vec{C}(M, \vec{x}) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}f}}{\mathrm{d}S}$,
on en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}f} = \tau_{xz_1} \mathrm{d}S . \vec{z}_1} . \qquad \textbf{(4)}$$

3.2. LOI DE HOOKE

Si nous considérons *(fig. 6.6)* un petit élément de longueur Δx d'une fibre avant et après déformation, on constate que celui-ci a subi une **déviation γ_M** tout à fait comparable à celle que nous avons observé dans l'étude du cisaillement simple. La loi de Hooke pour les contraintes tangentielles s'exprime par :

$$\boxed{\tau_M = G \gamma_M} . \qquad (5)$$

G est le module d'élasticité transversale ou module de Coulomb.

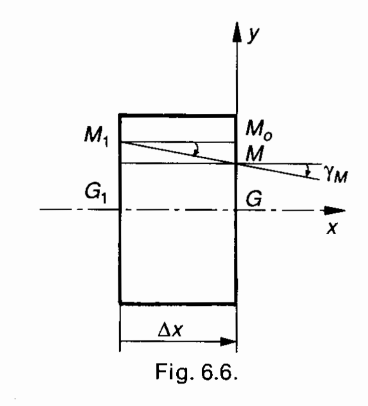


Fig. 6.6.

Unités : τ_M en mégapascals, G en mégapascals, γ_M en radians.

3.3. RÉPARTITION DES CONTRAINTES DANS UNE SECTION DROITE (*S*)

Considérons une section droite (S) distante de x de (S_1) *(fig. 6.7)*. Soit M_0 un point de (S) situé à la distance ρ de G. Après déformation M_0 vient en M tel que

$$(\overrightarrow{GM_0}, \overrightarrow{GM}) = \alpha$$

et $$(\overrightarrow{M_1M_0}, \overrightarrow{M_1M}) = \gamma_M .$$

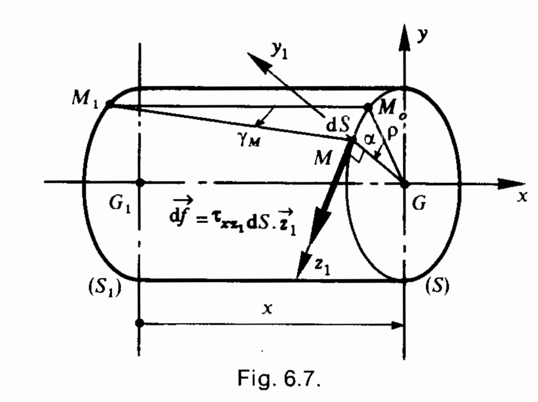


Fig. 6.7.

L'effort de cohésion en M a pour expression :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}f} = \tau_{xz_1} \mathrm{d}S . \vec{z}_1 .$$

Dans la zone des déformations élastiques, γ_M est très petit d'où :

$$\text{arc } M_0 M = \alpha \rho \approx \gamma_M x .$$

La déviation γ_M s'exprime alors par :

$$\gamma_M = \frac{\alpha}{x} \rho .$$

d'après (2) on obtient :

$$\boldsymbol{\gamma_M = \theta \rho} .$$

La relation (5) s'écrit alors :

$$\boxed{\boldsymbol{\tau_{xz_1} = G \theta \rho}} . \qquad \textbf{(6)}$$

τ_{xz_1} est la composante algébrique sur $\vec{z}_1$ de la contrainte $\vec{C}(M, \vec{x})$. G est le module d'élasticité transversale ou module de Coulomb. ρ est la distance du point M au centre de surface G de (S). θ est la valeur algébrique de l'angle unitaire de torsion.

Unités : τ_{xz_1} en MPa, G en MPa, θ en rad/mm, ρ en mm.
Dans l'expression (6) G est constant pour un matériau donné et θ est constant tout le long de la poutre, donc la valeur absolue de τ_{xz_1} est proportionnelle à ρ d'où la répartition de τ_{xz_1} *(fig. 6.8)*.

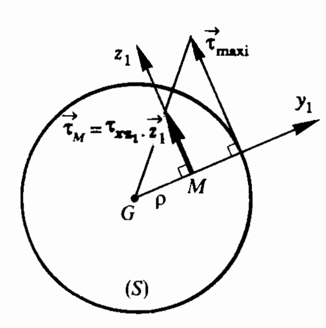


Fig. 6.8.

La contrainte en un point de la ligne moyenne est nulle.
La ligne moyenne est appelée fibre neutre.
La contrainte est maximale au point M le plus éloigné de la fibre neutre. On pose généralement :

$$\rho_{max} = v .$$

4. DÉFORMATION DE TORSION. RIGIDITÉ

4.1. ÉQUATION DE DÉFORMATION ÉLASTIQUE

Dans une section droite (S) le moment en G du torseur des efforts de cohésion a pour expression *(fig. 6.7)* :

$$\overrightarrow{M_G} = \Sigma_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{df}$$

d'après la relation (4) du *paragraphe 3.1* on peut écrire que :

$$\overrightarrow{M_G} = \Sigma_{(S)} \rho \vec{y}_1 \wedge \tau_{xz_1} \, dS \, \vec{z}_1$$
$$\overrightarrow{M_G} = \Sigma_{(S)} \rho \tau_{xz_1} \, dS \, \vec{x} .$$

Le moment de torsion en G a pour expression :

$$M_t = \overrightarrow{M_G} \cdot \vec{x}$$

soit $$M_t = \Sigma_{(S)} \rho \tau_{xz_1} \, dS .$$

D'après la relation (6) on peut écrire alors que :

$$M_t = \Sigma_{(S)} G\theta\rho^2 dS = G\theta \Sigma_{(S)} \rho^2 dS .$$

Nous avons vu au *chapitre 2* que $\Sigma_{(S)} \rho^2 dS$ est le moment quadratique polaire I_0 de (S) par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$, d'où :

$$\boxed{M_t = G\theta I_0} . \qquad (7)$$

Unités : M_t en Nmm, G en MPa, θ en rad/mm, I_0 en mm^4.

Nota : Dans la relation (7) M_t et θ sont algébriques.

4.2. CONDITION DE RIGIDITÉ

Dans les applications où l'arbre de transmission tourne relativement vite ($N > 750$ tr/min) on doit limiter les déformations de torsion de l'arbre pour éviter les vibrations importantes et surtout pour éloigner les fréquences critiques de rotation de la fréquence d'utilisation. Pour assurer une rigidité convenable de la transmission, on impose une limite à l'angle unitaire de torsion :

$$\boxed{\theta \leqslant \theta_{limite}} . \qquad (8)$$

On adopte généralement :

$$\theta_{limite} = 0{,}5^\circ/\text{m}$$

soit $$\theta_{limite} = 0{,}5 \times \frac{\pi}{180} \times 10^{-3} \text{ rad/mm} .$$

5. CONDITION DE RÉSISTANCE

5.1. EXPRESSION DE LA CONTRAINTE DE TORSION EN FONCTION DE M_t

Nous avons vu au *paragraphe 3.3* que dans une section droite, la contrainte en un point M situé à la distance ρ de la fibre neutre s'exprime par la relation :

$$\tau_{xz_1} = G\theta\rho .$$

Nous avons vu au *paragraphe 4.1* que le moment de torsion M_t au centre de surface G d'une section droite s'exprime par la relation : $M_t = G\theta I_0$.
En éliminant l'angle unitaire de torsion θ entre ces deux expressions on obtient :

$$\boxed{\tau_{xz_1} = \frac{M_t}{I_0} \times \rho} . \qquad (1)$$

Dans cette relation (1) :
τ_{xz_1} est algébrique ($\vec{\tau}_M = \tau_{xz_1} \cdot \vec{z}_1$) ;
M_t est algébrique ($\overrightarrow{M_t} = M_t \vec{x}$) ;
ρ est positif (distance entre G et M) ;
I_0 est positif.

Unités : M_t en Nmm, I_0 en mm^4; ρ en mm, τ_{xz_1} en MPa.

Dans certains cas M_t n'est pas constant tout le long de la poutre (arbre soumis à trois torseurs couples). Désignons par $|M_t|_{max}$ le moment de torsion maximal dans la poutre. Désignons par v la valeur maximale de ρ (dans le cas de notre étude $v = R$, rayon de l'arbre cylindrique de révolution).

La contrainte maximale de torsion s'exprime alors par :

$$\left|\tau_{xz_1}\right|_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{\left(\frac{I_0}{v}\right)}. \quad (2)$$

Unités : $\left|\tau_{xz_1}\right|_{max}$ en MPa, $|M_t|_{max}$ en Nmm, I_0 en mm^4, v en mm.

Nota : Dans le cas de notre étude, la section droite est circulaire de diamètre d. Le rapport $\left(\frac{I_0}{v}\right)$ quelquefois appelé **module de torsion** a pour expression :

$$\frac{I_0}{v} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

5.2. CONDITION THÉORIQUE DE RÉSISTANCE A LA TORSION

Contrainte limite élastique τ_e

C'est la contrainte correspondant au point M_A *(fig. 6.4)* qui limite dans l'essai de torsion simple la plage des déformations élastiques :

$$\tau_e = \frac{M_A}{\left(\frac{I_0}{v}\right)}.$$

Nota : Cette contrainte limite élastique est sensiblement la même que celle trouvée lors de l'essai de cisaillement.

Contrainte limite pratique τ_p

C'est le rapport de la contrainte limite élastique par un certain coefficient de sécurité s :

$$\tau_p = \frac{\tau_e}{s}. \quad (3)$$

Le coefficient s dépend du type de construction réalisée.

Condition de résistance

Elle s'exprime par la relation :

$$\left|\tau_{xz_1}\right|_{max} \leq \tau_p. \quad (4)$$

5.3. CONDITION RÉELLE DE RÉSISTANCE A LA TORSION

Validité de l'hypothèse initiale sur le solide

Les relations précédentes ont été établies dans le cas d'une poutre cylindrique de section circulaire constante. Dans la réalité, pour transmettre un couple il est nécessaire de monter sur l'arbre, des poulies, des roues dentées, etc.
La liaison en rotation de ces organes de transmission du couple est obtenue généralement par l'intermédiaire de clavettes, de cannelures ou de goupilles.
La liaison axiale de ces organes de transmission du couple, les conditions d'usinage des portées cylindriques pour ces organes et pour les paliers de guidage en rotation de l'arbre, nécessitent des dégagements et épaulements divers. Pour toutes ces raisons la section de l'arbre n'est pas constante tout le long de l'arbre.

Concentration de contraintes

Les variations de section dues aux rainures de clavettes, épaulements, etc., provoquent localement des concentrations de contraintes. La contrainte théorique doit donc être multipliée par le coefficient k de concentration de contrainte qui dépend essentiellement des proportions et du type de variation de la section.

Exemples

— Variation de diamètre pour épaulement et congé *(fig. 6.9)*.

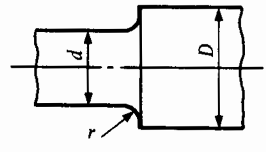


Fig. 6.9.

D/d \ r/D	0,1	0,05	0,02
1,09	1,3	1,5	1,7
1,2	1,5	1,7	2,5
1,5	1,7	2,2	2,7

(valeurs de k)

— Rainures de clavetage *(fig. 6.10)*.

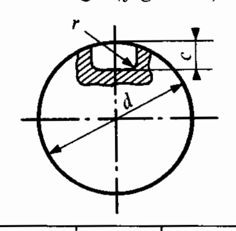


Fig. 6.10.

r/c	0,5	0,3	0,2	0,1
k	2,1	2,7	3,5	5,4

Condition réelle de résistance à la torsion

Elle s'exprime alors par :

$$k \left| \tau_{xz_1} \right|_{\max} \leqslant \tau_p \quad \textbf{(5)}$$

k est le coefficient de concentration de contrainte de torsion, déterminé par l'usage de tableaux ou d'abaques appropriés.

5.4. CAS PARTICULIER DES MATÉRIAUX POUR LESQUELS $\sigma_r < \tau_r$

C'est le cas de la fonte pour laquelle la contrainte limite de résistance à l'extension est inférieure à la contrainte limite de résistance au cisaillement. Dans le cas d'un cylindre de révolution, la sollicitation de torsion correspond à un état de cisaillement pur *(fig. 6.11)*.

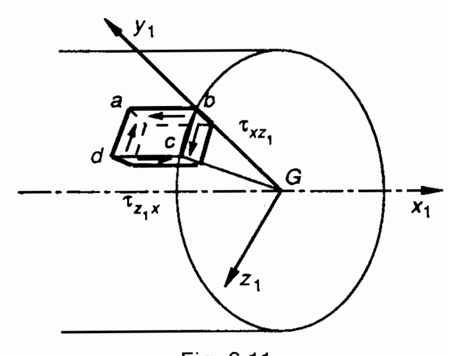


Fig. 6.11.

Nous avons vu au *paragraphe 3.3* que la contrainte de torsion est maximale sur la surface extérieure du cylindre.
Considérons *(fig. 6.12)* un petit élément *abcd* de centre M dont les côtés *ab* et *cd* sont parallèles aux génératrices du cylindre et les côtés *ad* et *bc* perpendiculaires à ces génératrices. La figure 6.12 montre la disposition des contraintess tangentielles transversales τ_{xz_1} et des contraintes tangentielles longitudinales τ_{z_1x} sur les facettes latérales de l'élément *abcd*.

τ_{xz_1} correspond à la contrainte de torsion au point M dans le plan de section droite $(M, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ passant par M. Nous avons vu au *paragraphe 5.4* du *chapitre 3* qu'à l'état de cisaillement pur sur l'élément *abcd* correspond un état d'extension et de compression d'égale contrainte suivant deux directions perpendiculaires $(M, \vec{X}, \vec{Y})$ inclinées de 45° par rapport aux facettes latérales de l'élément *abcd (fig. 6.12)*.
σ_X est la contrainte de compression et σ_Y est la contrainte d'extension, donc $\sigma_X < 0$ et $\sigma_Y > 0$.

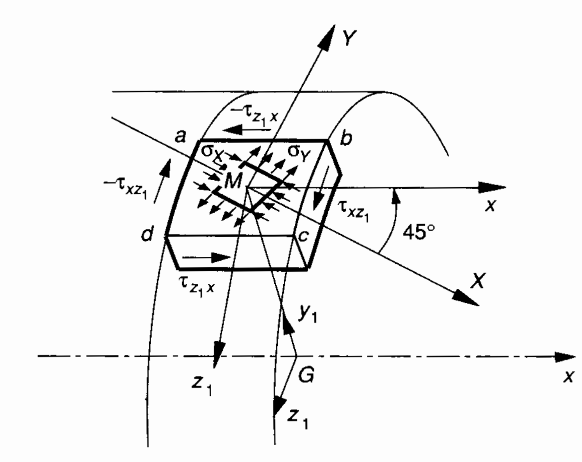


Fig. 6.12.

L'état de cisaillement pur suivant les axes $(M, \vec{X})$ et $(M, \vec{Y})$ permet d'écrire que *(chapitre 3, paragraphe 5.4)* :

$$|\sigma_X| = |\sigma_Y|\,.$$

La construction graphique de Möhr *(chapitre 3, paragraphe 4.4.2)* permet d'évaluer τ_{xz_1} au point M.
Sur l'axe $(M, \vec{X})$ on porte *(fig. 6.13)* :

$$\overline{MA} = \sigma_X \quad \text{avec} \quad \sigma_X < 0$$
$$\overline{MB} = \sigma_Y = -\sigma_X\,.$$

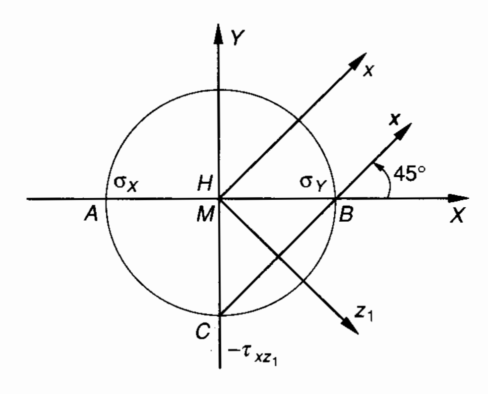


Fig. 6.13.

Le cercle de Möhr est le cercle de diamètre AB.
On trace $(B, \vec{x})$ tel que $(\vec{X}, \vec{x}) = 45°$.
$(B, \vec{x})$ coupe le cercle de Möhr en C. Soit H la projection de C sur $(M, \vec{X})$. On en déduit que :

$$\overline{HC} = -\tau_{xz_1}\,.$$

Sur la *figure 6.13* on voit que :

$$|\overline{HC}| = |\overline{MA}| = |\overline{MB}|$$

d'où $$|\tau_{xz_1}| = |\sigma_X| = |\sigma_Y|\,.$$

En un point M de la surface extérieure du cylindre l'état de contrainte est donc tel que :

$$|\tau_{xz_1}|_{\text{torsion}} = |\sigma_Y|_{\text{extension}} .$$

Dans le cas de la fonte on sait que :

$$\tau_r > \sigma_{r\,\text{extension}} .$$

Il s'ensuit que si l'on exerce une torsion jusqu'à la rupture, celle-ci est due en un point M de la périphérie à la sollicitation d'extension suivant la direction $(M, \vec{Y})$, d'où l'apparition d'une fissure au point M suivant une hélice inclinée à 45° par rapport aux génératrices du cylindre.
Dans le cas de la fonte il faut donc choisir pour la contrainte pratique τ_p de torsion la valeur correspondant à σ_p extension qui est inférieure à τ_p cisaillement.

6. SYSTÈME HYPERSTATIQUE EN TORSION

On considère une barre de torsion **1** en acier, constituée par un cylindre de révolution de diamètre $d = 20$ mm encastré à ses extrémités A et B dans deux supports fixes **2** et **3** supposés indéformables *(fig. 6.14)*.

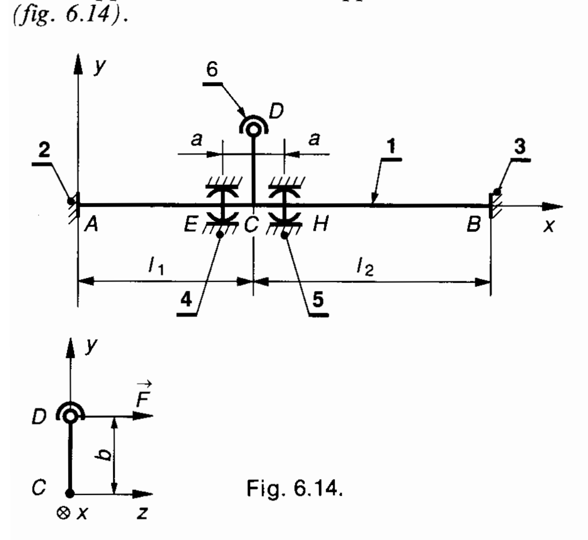


Fig. 6.14.

Une tige rigide CD perpendiculaire à AB permet par une liaison rotule **6-1** d'exercer en D une force $\vec{F}$ perpendiculaire à CD et située dans le plan de section droite passant par C. E et H sont les centres de deux roulements à billes dont l'angle de rotulage est suffisant pour assimiler ces deux liaisons à deux liaisons linéiques circulaires. E et H sont disposés symétriquement à la distance a de C.
On note : $\mathcal{R} = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
On donne : $AC = l_1 = 0{,}30$ m ; $CB = l_2 = 0{,}40$ m ; $d = 20$ mm ;
$CD = b = 0{,}20$ m ; $EC = CH = a = 0{,}02$ m ;
$\|\vec{F}\| = 500$ N ; $G = 8.10^4$ MPa.

On constate que a est faible par rapport à l_1 et l_2, donc la sollicitation de flexion de l'arbre AB est négligeable devant celle de torsion. Si on ne retient que la sollicitation de torsion, on peut modéliser les actions mécaniques qui agissent sur 1 de la façon suivante :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix} \text{ tel que dans } \mathcal{R} : \vec{M_A} = \overline{M_A}\,\vec{x}$$

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_B \end{Bmatrix} \text{ tel que dans } \mathcal{R} : \vec{M_B} = \overline{M_B}\,\vec{x}$$

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_E\begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ tel que dans } \mathcal{R}: \vec{E} = -\frac{\vec{F}}{2} = -250\,\vec{z}$$

$$\{\mathcal{T}(5 \to 1)\} = {}_H\begin{Bmatrix} \vec{H} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ tel que dans } \mathcal{R}: \vec{H} = -\frac{\vec{F}}{2} = -250\,\vec{z}$$

$$\{\mathcal{T}(6 \to 1)\} = {}_D\begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ tel que dans } \mathcal{R} : \vec{F} = 500\,\vec{z}.$$

On se propose de déterminer $\overline{M_A}$ et $\overline{M_B}$.
Exprimons tous ces torseurs au point C :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M_A} \end{Bmatrix} ; \quad \{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{M_B} \end{Bmatrix} ;$$

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} -\dfrac{\vec{F}}{2} \\ \vec{CE} \wedge -\dfrac{\vec{F}}{2} \end{Bmatrix} ;$$

$$\{\mathcal{T}(5 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} -\dfrac{\vec{F}}{2} \\ \vec{CH} \wedge -\dfrac{\vec{F}}{2} \end{Bmatrix} ;$$

$$\{\mathcal{T}(6 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{CD} \wedge \vec{F} \end{Bmatrix} .$$

Le principe fondamental de la statique permet d'écrire en C :

$$-\frac{\vec{F}}{2} - \frac{\vec{F}}{2} + \vec{F} = \vec{0} \tag{1}$$

$$\vec{M_A} + \vec{M_B} + \vec{CE} \wedge -\frac{\vec{F}}{2} + \vec{CH} \wedge -\frac{\vec{F}}{2} + \vec{CD} \wedge \vec{F} = \vec{0} . \tag{2}$$

La relation (1) ne comporte pas d'inconnue.
Ecrivons dans $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les équations de projection relatives à (2) :

$$\overline{M_A} + \overline{M_B} - \frac{a\,\|\vec{F}\|}{2} + \frac{a\,\|\vec{F}\|}{2} + b\,\|\vec{F}\| = 0 . \tag{3}$$

L'équation (3) comporte deux inconnues $\overline{M_A}$ et $\overline{M_B}$.
Le système de forces est donc hyperstatique d'ordre 1.
On obtient une deuxième équation à partir de l'étude des déformations. Soit α_1 la déformation angulaire de la section C par rapport à la section A. Soit α_2 la déformation angulaire de la section C par rapport à la section B.
Entre les sections fixes A et B on obtient :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 .$$

Nous avons vu au *paragraphe 2.2* que :

$$\theta_1 = \frac{\alpha_1}{l_1} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \frac{\alpha_2}{l_2}$$

d'où

$$\theta_1 l_1 + \theta_2 l_2 = 0 . \qquad (4)$$

D'après la relation (7) du *paragraphe 4.1* on peut écrire :

$$\theta_1 = \frac{M_{t_1}}{GI_0} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \frac{M_{t_2}}{GI_0} .$$

Dans la relation (4) exprimons θ_1 et θ_2 et simplifions par GI_0, on obtient :

$$M_{t_1} l_1 + M_{t_2} l_2 = 0 .$$

Pour le tronçon AC, on peut écrire

$$M_{t_1} = - \overline{M_A} .$$

Pour le tronçon CB, on peut écrire

$$M_{t_2} = \overline{M_B}$$

d'où $\quad - \overline{M_A} l_1 + \overline{M_B} l_2 = 0$

$$\boxed{\overline{M_A} l_1 = \overline{M_B} l_2} \qquad (5)$$

Les relations (3) et (5) permettent de déterminer $\overline{M_A}$ et $\overline{M_B}$.

$$\overline{M_A} = - \frac{bl_1 \|\vec{F}\|}{l_1 + l_2} ; \quad \overline{M_B} = - \frac{bl_2 \|\vec{F}\|}{l_1 + l_2} .$$

$\overline{M_A} = - 42{,}857$ (Nm) ; $\quad M_B = - 57{,}143$ (Nm).

Exprimons le moment de torsion le long de la poutre AB :

— entre A et C :

$$M_{t1} = - \overline{M_A} = 42{,}857 \text{ (Nm)} ;$$

— entre C et B :

$$M_{t_2} = \overline{M_B} = - 57{,}143 \text{ (Nm)} .$$

La relation (2) du *paragraphe 5.1* permet de déterminer la contrainte maximale de torsion :

$$|\tau_{xz_1}|_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{\left(\frac{I_0}{v}\right)} = \frac{57143 \times 16}{\pi 20^3}$$

$$|\tau_{xz_1}|_{\max} = \mathbf{36{,}3\ MPa} .$$

L'angle dont a tourné la section C par rapport à la section fixe A est défini par la relation (7) du *paragraphe 4.1*.

$$M_{t_1} = G\theta_1 I_0 \quad \text{avec} \quad \theta_1 = \frac{\alpha_1}{l_1}$$

d'où

$$\alpha_1 = \frac{M_{t_1} l_1}{GI_0} \quad \text{avec} \quad I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\alpha_1 = \frac{42857 \times 300 \times 32}{8.10^4 \times \pi \times 20^4} = 0{,}01 \text{ rad}$$

$$\alpha_1 = \mathbf{0{,}586\ degré} .$$

7. DÉTERMINATION D'UN ARBRE CREUX

On considère un arbre cylindrique creux de diamètre intérieur $d = 20$ mm. Sa longueur utile entre les sections A et B est $l = 600$ mm. Le diamètre extérieur D est à déterminer.
Cet arbre est en acier pour lequel :

$$\tau_e = 130 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad G = 8 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

La valeur maximale du couple à transmettre est de 50 Nm.
La variation de section entre A et B provoque une concentration de contrainte de valeur $k = 1{,}7$. On s'impose pour cette construction un coefficient de sécurité $s = 3$.

Détermination de D à partir de la condition de résistance

La relation (5) du *paragraphe 5.3* exprime la condition de résistance en tenant compte du coefficient k de concentration de contrainte :

$$k |\tau_{xz_1}|_{\max} \leq \tau_p . \qquad (1)$$

Les relations (2) et (3) du *paragraphe 5* nous permettent d'écrire :

$$|\tau_{xz_1}|_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{\left(\frac{I_0}{v}\right)} \quad \text{et} \quad \tau_p = \frac{\tau_e}{s} .$$

La relation (1) s'écrit alors :

$$\frac{k |M_t|_{\max} v}{I_0} \leq \frac{\tau_e}{s}$$

avec : $\quad I_0 = \dfrac{\pi (D^4 - d^4)}{32} ; \quad v = \dfrac{D}{2} ,$

d'où

$$\frac{16 k |M_t|_{\max} D}{\pi (D^4 - d^4)} \leq \frac{\tau_e}{s} .$$

Numériquement : $\dfrac{16 \times 1{,}7 \times 5.10^4 D}{\pi (D^4 - 20^4)} \leq \dfrac{130}{3} .$

$$130 \pi (D^4 - 20^4) - 3 \times 16 \times 1{,}7 \times 5.10^4 D \geq 0$$

$$408{,}4 D^4 - 408.10^4 D - 6534{,}5127.10^4 \geq 0.$$

Notons

$$f(D) = 408{,}4 D^4 - 408.10^4 D - 6534{,}5127.10^4 .$$

Donnons à D différentes valeurs : a, b, etc.
Si $f(a) . f(b) < 0$, alors $a < D < b$;

$d = 20$ mm justifie le choix de départ : $a = 24$; $b = 26$ comme valeurs d'essais de calcul :

$$\left.\begin{array}{l} f(24) = -2{,}77.10^7 \\ f(26) = 1{,}52.10^7 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 24 < D < 26$$

$$\left.\begin{array}{l} f(25) \quad = -0{,}78.10^7 \\ f(25{,}5) = 0{,}33.10^7 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 25 < D < 25{,}5 .$$

On choisira la valeur supérieure

$$\mathbf{D = 25{,}5\ mm} .$$

Détermination de *D* à partir de la condition de rigidité

Le type de construction nécessite une déformation limite de l'arbre de 0,5°/m. Déterminer le diamètre extérieur D de l'arbre creux.
Les relations (7) et (8) du *paragraphe 4* permettent d'écrire :

$$\frac{M_t}{GI_0} \leqslant \theta_{\text{limite}} , \qquad \frac{32\ M_t}{G\pi\ (D^4 - d^4)} \leqslant \theta_{\text{limite}} \qquad (2)$$

avec

$$\theta_{\text{limite}} = 0{,}5 \times \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{10^3} = 8{,}7266 \times 10^{-6}\ \text{rad/mm} .$$

Numériquement, (2) permet d'écrire

$$8.10^4\ \pi (D^4 - 20^4) . 8{,}7266.10^{-6} - 5.10^4 \times 32 \geqslant 0$$

$$2{,}1932\ D^4 - 195{,}092.10^4 \geqslant 0$$

$$\mathbf{D \geqslant 30{,}7\ mm} .$$

La contrainte maximale obtenue pour $v = \frac{D}{2} = 15{,}35$ mm a pour valeur :

$$\tau_{\max} = k \left| \tau_{xz_1} \right|_{\max} = \frac{k \left| M_t \right|_{\max}}{\left(\frac{I_0}{v}\right)}$$

$$= \frac{1{,}7 \times 5.10^4 \times 32 \times 15{,}35}{\pi (30{,}7^4 - 20^4)}$$

$$\boldsymbol{\tau_{\max} = 18{,}25\ \text{MPa}} .$$

La déformation entre les sections A et B s'exprime par la relation (7) du *paragraphe 4.1* :

$$M_t = G\theta I_0$$

$$\alpha_{AB} = \theta l = \frac{M_t\, l}{GI_0}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{5.10^4 \times 600 \times 32}{8.10^4 \times \pi (30{,}7^4 - 20^4)}$$

$$\alpha_{AB} = 5{,}245.10^{-3}\ \text{rad}$$

$$\boldsymbol{\alpha_{AB} = 0{,}3\ \text{degré}} .$$

8. DÉTERMINATION D'UN RESSORT HÉLICOÏDAL A FIL ROND

Nous nous limiterons volontairement à la détermination d'un ressort de compression à fil rond. Le calcul d'un ressort d'extension se conduit avec la même méthode mais celui-ci ne possède pas de limite « à spires jointives » et les spires d'extrémité n'ont pas la même forme.

8.1. DÉFINITION D'UN RESSORT DE COMPRESSION *(fig. 6.15)*

Les caractéristiques, ou paramètres de construction d'un ressort hélicoïdal à fil rond sont les suivantes

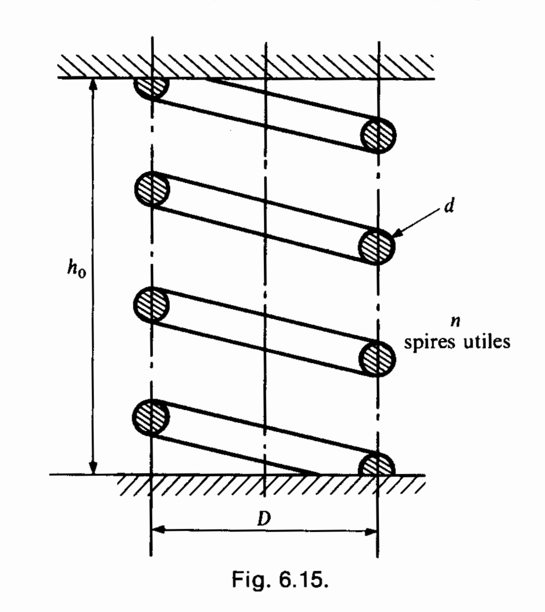


Fig. 6.15.

- D = diamètre d'enroulement de l'hélice moyenne,
- d = diamètre de fil (normalisé ; c'est un nombre normal),
- n = nombre de spires utiles. C'est le nombre de spires capables de se déformer. Ce n'est pas forcément un nombre entier. Les tronçons meulés à chaque extrémité et destinés à donner une assise plane au ressort ne sont pas compris dans la valeur de n,
- h_0 = hauteur utile à vide.

Nota : Lorsque tous les paramètres du ressort ne sont pas définis par une référence au cahier des charges, on pourra adopter une proportion habituelle entre D et d :

$$D \approx 6\, d$$

8.2. RIGIDITÉ

On sait que pour un ressort, dans la zone de ses déformations élastiques, il y a proportionnalité entre la charge axiale notée P et la déformation correspondante ou flèche notée f :

$$\boxed{P = kf} \quad \text{avec} \quad f = (h_0 - h).$$

h_0 = hauteur utile à vide ;
h = hauteur utile sous la charge P.
Le coefficient de proportionnalité k s'appelle la **rigidité** du resssort et son unité est le newton par millimètre (N/mm).

Nota : Quelquefois on utilise la **flexibilité** du ressort, il faut savoir qu'elle est égale à $\frac{1}{k}$ et s'exprime en millimètres par newton.

8.3. SOLLICITATIONS DANS UN RESSORT HÉLICOÏDAL DE COMPRESSION

Soit un ressort hélicoïdal en équilibre stable sous l'action de deux torseurs de liaison d'extrémité se réduisant à deux glisseurs opposés : $\{\mathcal{T}_1\}$ et $\{\mathcal{T}_2\}$ *(fig. 6.16)*.

$$\{\mathcal{T}_1\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_2\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{P'} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

A est un point quelconque de l'axe de l'hélice moyenne et $\vec{P} + \vec{P'} = \vec{0}$.

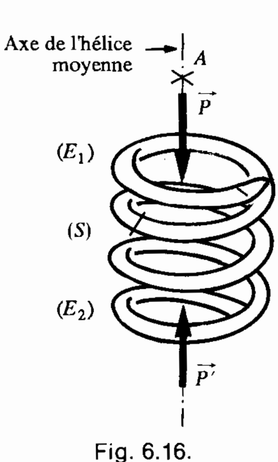


Fig. 6.16.

Effectuons une section fictive (S) normale au fil et considérons le système matériel {tronçon E_1} situé au-dessus de (S). Soit G le centre de surface de la section du fil dans (S) *(fig. 6.17)*.

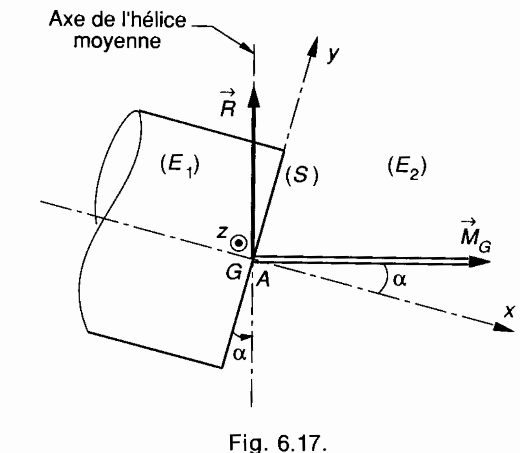


Fig. 6.17.

Considérons le torseur des forces de cohésion $\{\mathcal{T}_{coh}\}$, que (E_2) exerce sur (E_1) à travers la section (S) et exprimons ses éléments de réduction en G.

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_G} \end{Bmatrix}.$$

Nous savons par ailleurs que (voir *chapitre 3*) :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = -\{\mathcal{T}_1\}. \qquad \textbf{(1)}$$

Exprimons $\{\mathcal{T}_1\}$ au point G, centre de surface de (S)

$$\overrightarrow{M_{1\,G}} = \vec{0} + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{P}.$$

D'après (1) on peut alors écrire que :

$$\begin{cases} \vec{R} = -\vec{P} \\ \overrightarrow{M_G} = -(\overrightarrow{GA} \wedge \vec{P}). \end{cases}$$

Exprimons ces éléments de réduction du torseur de cohésion dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de définition des sollicitations. Pour simplifier le calcul nous prendrons comme point A appartenant à l'axe de l'hélice, la projection orthogonale de G sur celui-ci.

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} -\|\vec{P}\| \sin\alpha & \|\vec{P}\| \dfrac{D}{2}\cos\alpha \\ \|\vec{P}\| \cos\alpha & \|\vec{P}\| \dfrac{D}{2}\sin\alpha \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

Exprimons les composantes dans $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du torseur de cohésion :

effort normal : $N = -\|\vec{P}\| \sin\alpha$;

effort tranchant : $T_y = \|\vec{P}\| \cos\alpha$;

moment de torsion : $M_t = \|\vec{P}\| \dfrac{D}{2} \cos \alpha$;

moment de flexion : $M_{f_y} = \|\vec{P}\| \dfrac{D}{2} \sin \alpha$.

L'angle α est généralement assez faible ; de l'ordre de 6° à 8°.
Notons par exemple que $\sin 6° \approx 0{,}10$ et que $\cos 6° \approx 0{,}99$. Compte tenu de ces valeurs, on peut convenir de négliger l'effort normal et le moment de flexion et d'exprimer l'effort tranchant et le moment de torsion par excès.

$$\begin{cases} N \approx 0, \\ T_y \approx \|\vec{P}\|, \\ M_t \approx \|\vec{P}\| \dfrac{D}{2}, \\ M_{f_y} \approx 0. \end{cases}$$

Contraintes dues à la torsion et au cisaillement

Exprimons et analysons les contraintes correspondant aux sollicitations de torsion et de cisaillement.
Notons pour simplifier l'écriture : $\|\vec{P}\| = P$.

Contrainte maximale de torsion : τ_1

Nous avons vu au *paragraphe 5.1* que la contrainte maximale est obtenue pour $\rho = GM = v = \dfrac{d}{2}$.

Dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\vec{y}_1 = \dfrac{\overrightarrow{GM}}{\|\overrightarrow{GM}\|}$ on obtient :

$$\tau_1 = |\tau_{xz_1}|_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{\left(\dfrac{I_0}{v}\right)} = \frac{8\,PD}{\pi d^3}. \qquad (1)$$

Contrainte moyenne de cisaillement : τ_2

En supposant en première approximation que la contrainte de cisaillement est uniformément répartie dans la section on obtient :

$$\tau_2 = \frac{T}{S} = \frac{4\,P}{\pi d^2}. \qquad (2)$$

La *figure 6.18* montre la répartition des contraintes τ_1 et τ_2 dans une section droite (S) du ressort. On voit que τ_1 et τ_2 ont même sens au point M situé sur GA et à l'intérieur de la spire. Au point N situé sur GA et à l'extérieur de la spire τ_1 et τ_2 sont de sens contraire. Donc la contrainte résultante $\vec{\tau}$ définie par :
$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$ est maximale en M.

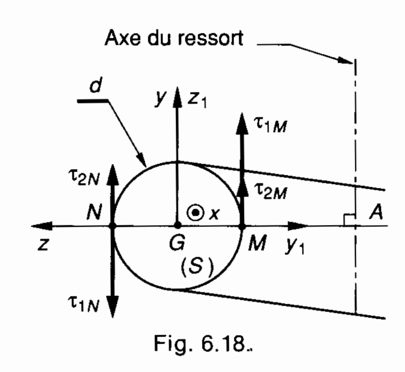


Fig. 6.18.

$$|\tau|_{\max} = \tau_{1M} + \tau_{2M}$$

$$|\tau|_{\max} = \frac{8\,PD}{\pi d^3} + \frac{4\,P}{\pi d^2} = \frac{8\,PD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{2\,D}\right). \qquad (3)$$

L'expérience montre que pour les ressorts de très grande rigidité (suspension de voiture, de camion, de T.G.V.) pour lesquels le rapport $\dfrac{d}{D}$ n'est pas négligeable, les premières fissures apparaissent à l'intérieur de la spire.
Dans le cas d'un ressort de rigidité moyenne pour lequel $D \approx 6\,d$, les relations (1) et (2) montrent que

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{12}$$

ce qui nous permet de négliger τ_2 par rapport à τ_1 en faisant une approximation de 8 % environ.
Si le ressort doit être calculé avec précision il est nécessaire d'utiliser la relation (3).
Si on s'autorise les approximations que nous venons de voir, la contrainte maximale de torsion dans une section droite (S) a pour valeur :

$$\boxed{|\tau|_{\max} = \frac{8\,PD}{\pi d^3}}. \qquad (4)$$

8.4. CONDITION DE RÉSISTANCE D'UN RESSORT

Condition de résistance sous charge maximale

Si $P_{\max}$ est la valeur maximale de $\|\vec{P}\|$ en fonctionnement normal, la condition de résistance à la torsion s'écrit :

$$\boxed{\tau_{\max} \leqslant \tau_p}$$

avec $\tau_{\max} = \dfrac{8\,P_{\max}\,D}{\pi d^3}$.

Condition de résistance sous surcharge accidentelle

Il peut arriver accidentellement qu'un ressort soit comprimé « à bloc » c'est-à-dire à spires jointives. On doit s'assurer impérativement que la contrainte ultime correspondante ne dépasse pas la limite élastique

$$\boxed{\tau_{ult} \leqslant \tau_e}$$

avec $\tau_{ult} = \dfrac{8\, P_{ult}\, D}{\pi d^3}$.

Limite élastique de l'acier à ressort

Les aciers à ressort ont des caractéristiques élastiques élevées. Citons par exemple l'acier au chrome vanadium 50CV4 :

$$\begin{cases} G = 82.10^3 \text{ MPa}, \\ \tau_e = 560 \text{ MPa}, \\ \tau_p \approx 300 \text{ MPa (par exemple)}. \end{cases}$$

Avec d'autres aciers plus élaborés on peut atteindre $\tau_e = 800$ MPa.

8.5. ÉTUDE DE LA DÉFORMATION

Isolons un tronçon de ressort, de longueur Δl très petite *(fig. 6.19)*. Sur cette longueur, le ressort peut être assimilé à une poutre droite AB soumise au moment de torsion :

$$|M_t| = P\,\frac{D}{2}. \qquad (5)$$

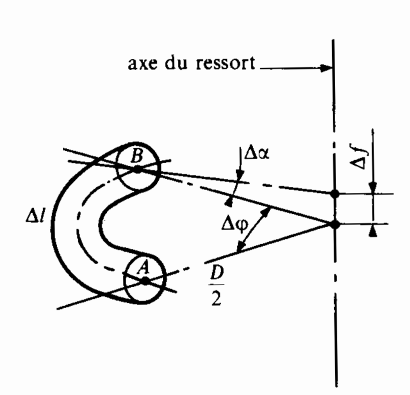


Fig. 6.19.

D'après l'équation de déformation élastique :

$$|M_t| = G\theta I_0, \qquad (6)$$

avec l'angle unitaire de torsion

$$\theta = \frac{\Delta\alpha}{\Delta l}. \qquad (7)$$

Soit Δf la flèche élémentaire axiale relative à l'élément de longueur Δl du ressort :

$$\Delta f \approx \frac{D}{2}\,\Delta\alpha.$$

D'après (7) : $\Delta f = \dfrac{D}{2} \cdot \theta \cdot \Delta l$.

D'après (5) et en posant $I_0 = \dfrac{\pi d^4}{32}$:

$$\Delta f = \frac{8\,PD^2}{\pi G d^4} \cdot \Delta l. \qquad (8)$$

La flèche totale f est la somme des Δf pour toute la longueur du ressort.
En prenant pour longueur approximative de celui-ci : $\Sigma\,\Delta l \approx n\pi D$, où n est le nombre de spires utiles, on trouve d'après (8) :

$$\boxed{\mathbf{f = \frac{8\,PD^3 n}{Gd^4}}} \qquad \mathbf{(9)}$$

f : mm,
P : N,
D : mm,
n : sans unité,
G : MPa,
d : mm.

Expression de la ridigité

On sait que : $k = \dfrac{P}{f}$ et donc d'après (9) :

$$\mathbf{k = \frac{Gd^4}{8\,D^3 n}}.$$

REMARQUE

Le nombre de paramètres de définition d'un ressort hélicoïdal à fil rond est de quatre : D, d, n, h_0. On dispose pour leur détermination des trois relations :

$$\begin{cases} \tau_{max} \leqslant \tau_p & \textit{avec} \quad \tau_{max} = \dfrac{8\,P_{max}\,D}{\pi d^3}, \\ \tau_{ult} \leqslant \tau_e & \textit{avec} \quad \tau_{ult} = \dfrac{8\,P_{ult}\,D}{\pi d^3}, \\ k = \dfrac{Gd^4}{8\,D^3 n}. \end{cases}$$

Une condition supplémentaire d'encombrement, de proportion ou autre est donc nécessaire.

8.6. EXEMPLE DE CALCUL D'UN RESSORT

Déterminer les caractéristiques d'un ressort de compression hélicoïdal à fil rond dont le cahier des charges précise :

1° Le ressort doit être guidé dans un tube de ∅ 52.

2° Charge maximale en fonctionnement normal : $P_{max} = 500$ N.

3° Rigidité approximative : $k \approx 18$ N/mm.

4° Caractéristiques de l'acier de construction utilisé :

$$G = 84.10^3 \text{ MPa} ; \quad \tau_e = 600 \text{ MPa} ;$$

$$\tau_p = 400 \text{ MPa} .$$

Solution

• **Condition d'encombrement**

Pour assurer une certaine liberté dans le tube de ∅ 52, nous prendrons :

$$D + d \approx 50 . \qquad (10)$$

• **Condition de résistance pratique**

$$\tau_{max} \leqslant \tau_p \quad \text{avec} \quad \tau_{max} = \frac{8\,P_{max}\,D}{\pi d^3} ,$$

soit $$10\,D \leqslant \pi d^3 . \qquad (11)$$

• **Condition de déformation**

$$f = \frac{8\,PD^3 n}{Gd^4} \quad \text{avec} \quad P = kf \quad \text{donc} \quad k = \frac{Gd^4}{8\,D^3 n} ,$$

soit $$12\,D^3 n = 7.10^3 d^4 . \qquad (12)$$

Le système (10), (11) permet la détermination des deux inconnues D et d. Le calcul doit nécessairement commencer par d car c'est un nombre normal. Après élimination de D on obtient :

$$\pi d^3 + 10\,d - 500 \geqslant 0 .$$

Pour résoudre une telle inéquation on peut utiliser une méthode graphique ; on peut également utiliser un programme ou alors procéder par approximations successives.

• **Méthode par approximations successives**

Notons $f(d) = \pi d^3 + 10\,d - 500$.

Le calcul de la fonction dérivée : $f'(d) = 3\,\pi d^2 + 10$, montre que $f'(d) > 0$, quel que soit d.

La fonction $f(d)$ est donc : définie quel que soit d, continue, monotone, croissante. Elle admet donc une seule racine réelle.

Donnons à d différentes valeurs : a, b, etc.

$$\text{si} \quad f(a) . f(b) < 0 \quad \text{alors} \quad a < d < b .$$

$D \approx 6\,d$ justifie le choix de départ : $a = 5$; $b = 6$ comme valeurs d'essais de calcul :

$$\left.\begin{array}{l} f(5) = -57{,}3 \\ f(6) = 238{,}58 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 5 < d < 6$$

$$f(5{,}5) = 77{,}68 \quad \Rightarrow \quad 5 < d < 5{,}5$$

$$f(5{,}2) = -6{,}26 \quad \Rightarrow \quad 5{,}2 < d < 5{,}5$$

on prendra le nombre normal $\boxed{d = 5{,}5 \text{ mm.}}$

• **Méthode utilisant un programme de calcul rédigé en BASIC**

— Principe de la résolution de

$$\pi d^3 + 10\,d - 500 \geqslant 0 .$$

Posons $d = \sqrt[3]{\dfrac{500 - 10\,d}{\pi}}$.

Notons :

X = valeur de d à substituer dans le membre de droite. On rentrera $X = 5$ (même justification que précédemment).

Y = valeur de d correspondante dans le membre de gauche.

I = compteur d'itération qui augmentera d'une unité à chaque itération.

N = nombre maximal d'itérations autorisées.

Remarque : La connaissance de d à 0,01 près est très suffisante. Nous limiterons également le nombre d'itérations à $N = 10$.

— Organigramme de résolution : *(fig. 6.20)*.

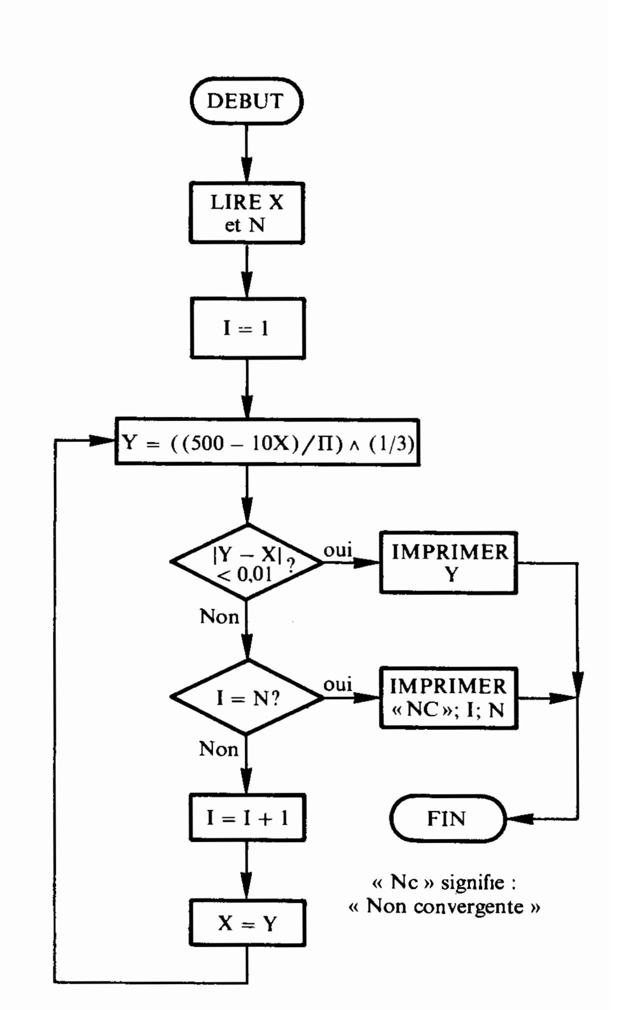


Fig. 6.20.

— Programme de résolution :

```
 10 : REM CALCUL DE RACINES
 20 : INPUT X, N
 30 : LET I = 1
 40 : LET Y = ((500 – 10 * X)/π) ∧ (1/3)
 50 : PRINT = LPRINT
      (Commande pour imprimante)
 60 : IF ABS (Y – X) < .01 THEN 110
 70 : IF I = N THEN 130
 80 : LET I = I + 1
 90 : LET X = Y
100 : GOTO 40
110 : PRINT Y
120 : GOTO 140
130 : PRINT « NC » ; I ; N
140 : END.
```

Résultat affiché : $Y = 5.223222201$
On retrouve évidemment la valeur approchée de d, soit le nombre normal **$d = 5{,}5$ mm**.

• **Suite du calcul du ressort**
Reprise des équations (10), (11), (12).
On calculera maintenant D et n

$$\boxed{D = 44{,}5 \text{ mm}}\ ; \quad n = 6{,}057 .$$

La rigidité k étant approximative, dans le but de simplifier les résultats on peut prendre

$$\boxed{n = 6 \text{ spires utiles}} .$$

Si k devait avoir une valeur exacte on garderait $n = 6{,}057$. Avec la valeur $n = 6$, le calcul de k définitif donne :

$$\boxed{k = 18{,}17 \text{ N/mm}} .$$

• **Calcul de la hauteur libre h_0**
Sous $P_{max} = 500$ N, la flèche maximale est :

$$f_{max} = \frac{P_{max}}{k}, \quad f_{max} \approx 27{,}5 \text{ mm} .$$

Sous charge ultime, inconnue pour l'instant : P_{ult}, le ressort est à spires jointives.

$$h_{ult} = (n + 1)\, d \quad \text{soit} \quad h_{ult} = 38{,}5 \text{ mm} .$$

La contrainte τ_{ult} ne doit pas dépasser la contrainte limite élastique à la torsion.

$$\tau_{ult} \leqslant \tau_e$$

avec $\tau_{ult} = \dfrac{8\, P_{ult}\, D}{\pi d^3}$ et $\tau_e = 600$ MPa, ceci permet le calcul de : $P_{ult} = 880{,}9$ N et de la flèche ultime :

$$f_{ult} = \frac{P_{ult}}{k}\ ; \quad f_{ult} = 48{,}4 \text{ mm} .$$

On prendra : $h_0 = h_{ult} + f_{ult}$ $\boxed{h_0 \approx 86{,}9 \text{ mm}}$.
On peut également calculer le pas à vide de l'hélice :

$$p = \frac{h_0}{n}, \quad \boxed{p \approx 14{,}5 \text{ mm}} .$$

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 Un arbre cylindrique de diamètre d transmet un couple de moment $M = 50$ Nm. Cet arbre est en acier E36 pour lequel : $\sigma_r = 510$ MPa, $\sigma_e = 325$ MPa, $\tau_e = 175$ MPa et $G = 8 \times 10^4$ MPa. On adopte un coefficient de sécurité $s = 3{,}5$.

QUESTIONS

1° Déterminer le diamètre minimal de cet arbre à partir de la condition de résistance à la torsion.

2° Déterminer l'angle de déformation en degrés entre deux sections distantes de 300 mm si on choisit $d = 18$ mm pour le diamètre de l'arbre.

RÉPONSES

1° $d \geqslant 17{,}1$ mm.
2° $\alpha = 1{,}04$ degré.

2 Un arbre cylindrique de diamètre d transmet un couple de moment $M = 100$ Nm. Le type de construction exige une grande rigidité. On limite la déformation unitaire à 0,25 degré/m. Une rainure de clavette provoque une concentration de contrainte de valeur $k = 3$. On choisit pour le matériau un acier A33 pour lequel : $\sigma_r = 300$ MPa, $\sigma_e = 155$ MPa, $\tau_e = 75$ MPa et $G = 8 \times 10^4$ MPa.

QUESTIONS

1° Déterminer le diamètre minimal de cet arbre.

2° Déterminer la contrainte tangentielle maximale pour $d = 41$ mm.

3° Quelle est la valeur du coefficient de sécurité dont on dispose ?

RÉPONSES

1° $d \geqslant 41$ mm.
2° $|\tau|_{max} = 22,17$ MPa.
3° $s = 3,4$.

3 Un arbre cylindrique plein de diamètre $d_1 = 30$ mm transmet un couple de moment $M = 50$ Nm.
Cet arbre est en acier XC10 pour lequel : $\sigma_r = 350$ MPa, $\sigma_e = 215$ MPa, $\tau_e = 108$ MPa et $G = 8 \times 10^4$ MPa.
Une rainure de clavette provoque une concentration de contrainte de valeur $k = 3,5$.

QUESTIONS

1° Déterminer l'angle de déformation unitaire de l'arbre plein en degré par mètre.

2° Déterminer la contrainte tangentielle maximale pour l'arbre plein. Quelle est la valeur du coefficient de sécurité dont on dispose ?

3° Pour alléger la construction on se propose de remplacer cet arbre plein par un arbre creux de diamètre extérieur $D = 32$ mm. Déterminer le diamètre intérieur d pour que la contrainte tangentielle maximale soit la même qu'au 2°.

4° Quel est l'angle unitaire de torsion de l'arbre creux en degré par mètre si on choisit un tube rond normalisé NF A49-642 de dimensions $D = 32$ mm et $d = 29,5$ mm ?

5° Quel est le pourcentage de gain en masse ?

RÉPONSES

1° $\theta = 0,45$ degré/m.
2° $|\tau|_{max} = 33$ MPa.
3° $d = 29,92$ mm.
4° $\theta = 1,25$ degré/m.
5° 82,9 %.

4 Pour transmettre un couple de 400 Nm on envisage d'utiliser soit un arbre plein, soit un arbre creux.
Ces deux arbres sont constitués du même acier pour lequel $\tau_e = 240$ MPa et $G = 8 \times 10^4$ MPa. On adopte dans les deux cas le même coefficient de sécurité $s = 3$.
L'arbre plein a un diamètre d. L'arbre creux a pour diamètres D et d_1 tels que $d_1 = 0,6\, D$.

QUESTIONS

1° Déterminer le diamètre d de l'arbre plein et la déformation angulaire entre deux sections distantes de 300 mm.

2° Déterminer les diamètres D et d_1 de l'arbre creux et la déformation angulaire entre deux sections distantes de 300 mm. Comparer avec le 1°.

3° Déterminer le rapport λ de leur masse. Conclusion.

RÉPONSES

1° $d = 29,42$ mm ; $\alpha = 0,0204$ rad $= 1,168$ degré.
2° $D = 30,81$ mm ; $d_1 = 18,48$ mm ;
$\alpha = 0,0195$ rad $= 1,11$ degré.
L'arbre creux est aussi résistant et un peu plus rigide que l'arbre plein.
3° $\lambda = 0,7$. L'arbre creux permet un gain de 30 % en masse.

5 Un arbre cannelé de boîte de vitesse doit transmettre un couple de 400 Nm. Cet arbre est en acier XC 42f pour lequel après trempe à l'eau à 820° et revenu à 550° on obtient les caractéristiques suivantes : $\tau_e = 1\,200$ MPa, $G = 8 \times 10^4$ MPa.
Les cannelures provoquent une concentration de contrainte $k = 1,57$. On adopte pour cette construction un coefficient de sécurité $s = 3$.
On envisage deux solutions : un arbre plein de diamètre d ou un arbre creux de diamètre intérieur $d_1 = 15$ mm.

QUESTIONS

1° Déterminer le diamètre d de l'arbre plein.

2° Déterminer la déformation angulaire de l'arbre plein entre deux sections droites distantes de 140 mm.

3° Déterminer le diamètre extérieur D de l'arbre creux.

4° Déterminer la déformation angulaire de l'arbre creux entre deux sections droites distantes de 140 mm.

5° Déterminer le rapport λ de leur masse.

RÉPONSES

1° $d = 20$ mm.
2° $\alpha = 2,55$ degrés.
3° $D = 21,8$ mm.
4° $\alpha = 2,33$ degrés.
5° $\lambda = 0,62$.

6 On considère un ressort hélicoïdal de compression à fil rond qui est guidé à l'intérieur d'un cylindre de diamètre 75 mm. On adopte pour la condition d'encombrement : $D + d = 73$ mm. La charge maximale en fonctionnement normal est $P_{max} = 900$ N.
On choisit pour ce ressort une rigidité moyenne $k = 25$ N/mm. Ce ressort est en acier pour lequel $\tau_e = 600$ MPa et $G = 8 \times 10^4$ MPa. On adopte un coefficient de sécurité $s = 2$.

QUESTIONS

1° Déterminer D et d à partir de la condition d'encombrement et de la condition de résistance.

2° Déterminer le nombre de spires utiles à partir de la condition de déformation et la valeur définitive de la rigidité k du ressort.

3° Déterminer la hauteur libre h_0 du ressort de telle façon que à spires jointives la contrainte maximale reste inférieure à τ_e.

4° Déterminer le pas à vide du ressort.

RÉPONSES

1° $7,9 < d < 8$. On adopte $d = 8$ mm d'où $D = 65$ mm.
2° $n = 6$ spires utiles ; $k = 24,86$ N/mm.
3° $h_0 = 130,6$ mm.
4° $p = 21,7$ mm.



flexion plane simple

1. DIFFÉRENTS TYPES DE FLEXION

Dans le *chapitre 3* nous avons donné la définition du système matériel constitué par le tronçon de poutre (E_1) situé d'un même côté d'une section droite (S). Soit G le centre de surface de la section. Soit $\mathcal{R} = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère de définition des sollicitations tel que $\vec{y}$ et $\vec{z}$ soient les axes principaux de (S), et N, T_y, T_z, M_t, M_{f_y}, M_{f_z} les composantes des éléments de réduction en G du torseur des forces de cohésion dans $\mathcal{R}$.
On définit différents types de flexion en fonction de la géométrie de la poutre, de la configuration des actions mécaniques extérieures et des valeurs prises par N, T_y, T_z, M_t, M_{f_y}, M_{f_z}.

1.1. FLEXION PURE *(fig. 7.1)*

Le système des forces extérieures appliquées à la poutre doit pouvoir se réduire à un système coplanaire et ce plan doit être confondu avec un plan de symétrie de la poutre. D'autre part le torseur des forces de cohésion doit pouvoir se réduire en G à un moment de flexion porté par un axe de symétrie de la section et ceci quelle que soit la section droite (S).

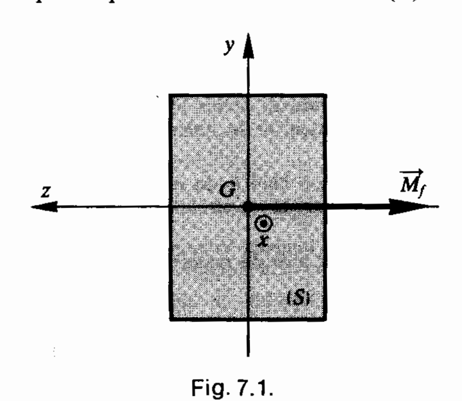


Fig. 7.1.

Soit $(G, \vec{x}, \vec{y})$ le plan des forces. Dans le repère principal $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de définition des sollicitations, les composantes des éléments de réduction du torseur des forces de cohésion ont pour valeur :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} N = 0 & M_t = 0 \\ T_y = 0 & M_{f_y} = 0 \\ T_z = 0 & M_{f_z} \neq 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

EXEMPLE

Considérons la poutre AB *(fig. 7.2)*. Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie de la poutre. $(G, \vec{z})$ est un axe de symétrie donc axe principal d'une section droite (S). Les points A, B, C, D appartiennent à la ligne moyenne portée par $(A, \vec{x})$. Les actions mécaniques extérieures sont modélisables respectivement en A, B, C, D par quatre glisseurs dont on note les résultantes $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$. Ces quatre résultantes sont parallèles à $\vec{y}$. On donne : $AC = DB$ et $\vec{C} = \vec{D}$.

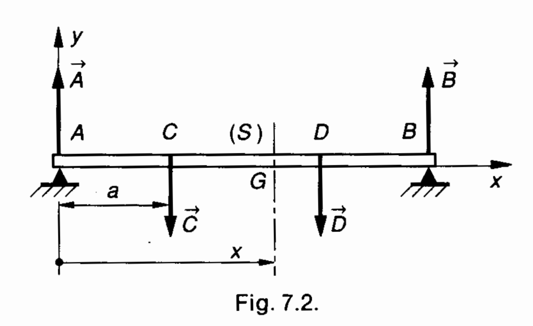


Fig. 7.2.

Par raison de symétrie on peut écrire que :

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = \|\vec{C}\| = \|\vec{D}\| .$$

Considérons une section droite (S) entre C et D. On peut écrire au centre de surface G de (S) :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} = -(\vec{A} + \vec{C}) = \vec{0} \\ \vec{M}_G = -(\vec{GA} \wedge \vec{A} + \vec{GC} \wedge \vec{C}) \end{Bmatrix} .$$

Dans le repère $\mathcal{R} = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de définition des sollicitations on calcule :

$$\vec{GA} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} -x & & 0 \\ 0 & \wedge & \|\vec{A}\| \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -x\|\vec{A}\| \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{GC} \wedge \vec{C} = \begin{pmatrix} -x+a & & 0 \\ 0 & \wedge & -\|\vec{C}\| \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ x\|\vec{C}\| - a\|\vec{C}\| \end{vmatrix}$$

d'où $\vec{M}_G \underset{\mathcal{R}}{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a\|\vec{C}\| \end{vmatrix}}$ et $\vec{R} \underset{\mathcal{R}}{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}}$.

L'expression dans $\mathcal{R}$ de $\{\mathcal{T}_{coh}\}$ au centre de surface G d'une section droite (S) située entre C et D est :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} \underset{G}{=} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a\|\vec{C}\| \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

D'après la définition du *paragraphe 1.1* la poutre AB est sollicitée à la flexion pure entre les sections C et D.

1.2. FLEXION PLANE *(fig. 7.3)*

Le système des forces extérieures appliquées à la poutre doit pouvoir se réduire à un système coplanaire et ce plan doit être confondu avec un plan de symétrie de la poutre.

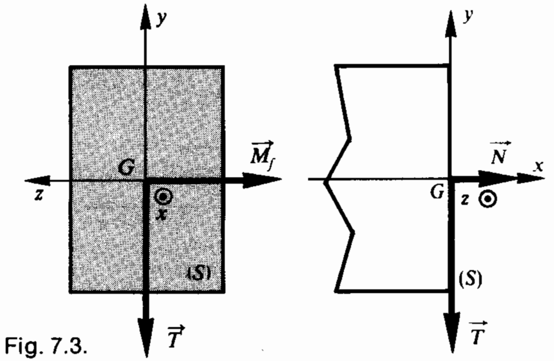


Fig. 7.3.

Soit $(G, \vec{x}, \vec{y})$ le plan des forces. Notons que $(G, \vec{y}, \vec{z})$ est le repère principal en G de la section droite (S).
Dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de définition des sollicitations, les composantes des éléments du torseur des forces de cohésion ont pour valeur :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} \underset{G}{=} \begin{Bmatrix} N \neq 0 & M_t = 0 \\ T_y \neq 0 & M_{f_y} = 0 \\ T_z = 0 & M_{f_z} \neq 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

Nous étudierons ce cas dans le chapitre 8.

1.3. FLEXION PLANE SIMPLE *(fig. 7.4)*

La ligne moyenne de la poutre est droite. Le système des forces extérieures appliquées à la poutre peut se réduire à un système coplanaire et ce plan est un plan de symétrie de la poutre. Toutes les forces sont perpendiculaires à la ligne moyenne.

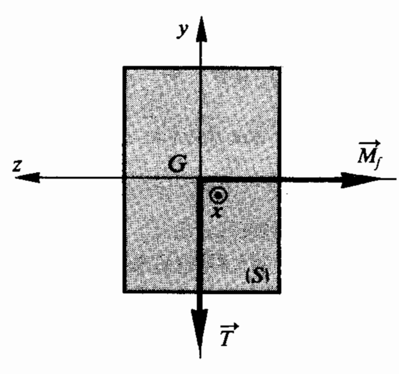


Fig. 7.4.

Soit $(G, \vec{x}, \vec{y})$ le plan des forces. Notons que $(G, \vec{y}, \vec{z})$ est le repère principal en G de la section droite (S).
Dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de définition des sollicitations, les composantes des éléments de réduction en G du torseur des forces de cohésion ont pour valeur :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} \underset{G}{=} \begin{Bmatrix} N = 0 & M_t = 0 \\ T_y \neq 0 & M_{f_y} = 0 \\ T_z = 0 & M_{f_z} \neq 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

1.4. FLEXION DÉVIÉE *(fig. 7.5)*

La ligne moyenne de la poutre est droite. Le système des forces extérieures appliquées à la poutre peut se réduire à un système coplanaire mais ce plan n'est pas un plan de symétrie de la poutre. Toutes les forces sont perpendiculaires à la ligne moyenne.

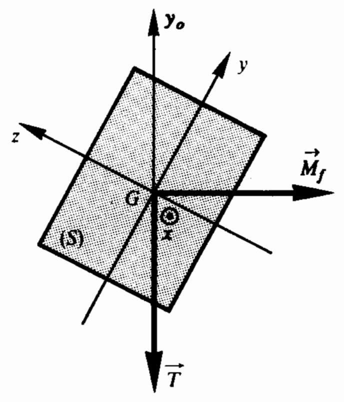


Fig. 7.5.

Soit $(G, \vec{x}, \vec{y}_0)$ le plan des forces. Soit $(G, \vec{y}, \vec{z})$ le repère principal en G de la section droite (S).

Dans le repère principal $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de définition des sollicitations, les composantes des éléments de

réduction en G du torseur des forces de cohésion ont pour valeur :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = \left\{\begin{matrix} N=0 & M_t = 0 \\ T_y \neq 0 & M_{f_y} \neq 0 \\ T_z \neq 0 & M_{f_z} \neq 0 \end{matrix}\right\}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} .$$

Nous étudierons ce cas dans le *chapitre 8*.

2. HYPOTHÈSES PARTICULIÈRES À LA FLEXION PLANE SIMPLE

En plus des hypothèses générales vues dans le *chapitre 3* nous ajoutons celles-ci *(fig. 7.6)* :

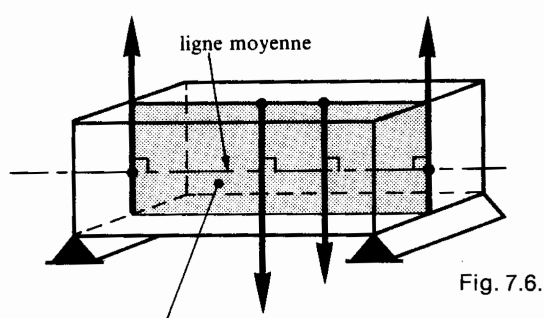


Fig. 7.6.

— la ligne moyenne de la poutre est rectiligne ;
— la section droite de la poutre est constante ;
— la poutre admet un plan de symétrie longitudinal ;
— toutes les forces appliquées à la poutre sont perpendiculaires à la ligne moyenne et sont situées dans le plan de symétrie longitudinal ou réparties symétriquement par rapport à celui-ci ;
— les forces appliquées sont soit concentrées en un point, soit réparties suivant une loi déterminée ;
— les déformations ne modifient ni les positions relatives des forces ni leur intensité ;
— au cours de la déformation, les sections droites restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne (hypothèse de Navier et Bernoulli).

3. MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES

3.1. HYPOTHÈSES

On définit le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à la poutre tel que :
— l'axe $(O, \vec{x})$ est confondu avec la ligne moyenne ;
— le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ est le plan de symétrie de la poutre. Il en résulte que $(G, \vec{y})$ et $(G, \vec{z})$ sont les axes principaux d'une section droite ;
— les liaisons de la poutre avec le milieu extérieur sont parfaites (sans adhérence) ;
— les forces extérieures sont situées dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ ou sont réparties symétriquement par rapport à ce plan. Ces forces sont perpendiculaires à $(O, \vec{x})$.

Dans les exemples qui suivent, **1** désigne la poutre et **2** par exemple désigne le solide en contact avec **1**. A est le centre du repère local associé à la liaison **2-1**.

3.2. LIAISON LINÉIQUE RECTILIGNE D'AXE $(A, \vec{z})$

(fig. 7.7)

Compte tenu des hypothèses générales du *paragraphe 3.1,* les actions mécaniques de liaison de **2** sur **1** peuvent être modélisées en A par le glisseur :

$$\{\mathcal{T}(2\to 1)\} = \left\{\begin{matrix} \vec{A}(2\to 1) \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A .$$

Dans notre cas de figure et dans le repère $\mathcal{R}$, on obtient :

$$\{\mathcal{T}(2\to 1)\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ \|\vec{A}(2\to 1)\| & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

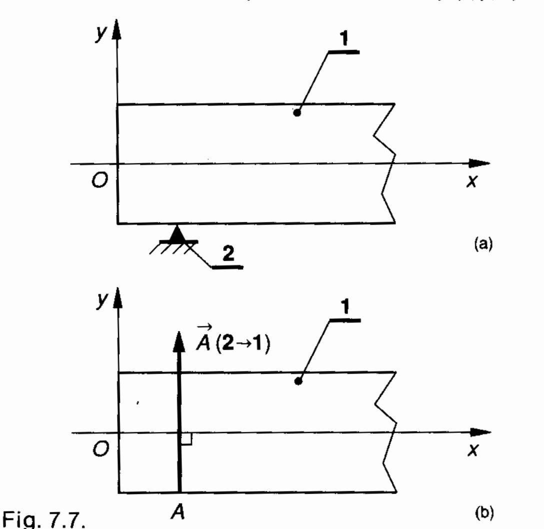


Fig. 7.7.

3.3. LIAISON LINÉIQUE RECTILIGNE D'AXE $(A, \vec{x})$

1er cas : la longueur du contact est courte

(fig. 7.8)

Soit a la longueur du contact et l la longueur de la poutre, dans ce cas :

$$a < \frac{l}{10} .$$

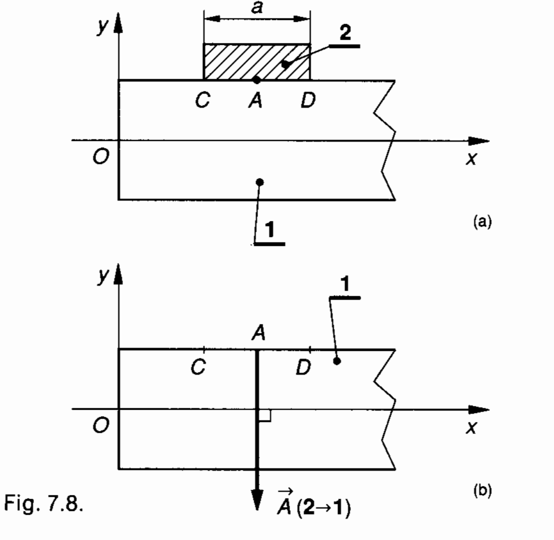


Fig. 7.8.

Compte tenu des hypothèses générales du *paragraphe 3.1,* les actions mécaniques de liaison de **2** sur **1** peuvent être modélisées en A par le glisseur :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

Dans notre cas de figure et dans le repère $\mathcal{R}$, on obtient :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\left\|\vec{A}(2 \to 1)\right\| & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

2[e] cas : la longueur du contact est grande

(fig. 7.9)

$$a > \frac{l}{10}.$$

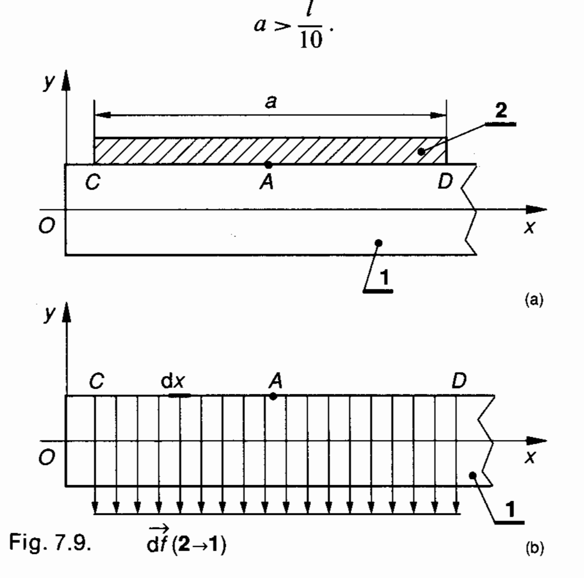


Fig. 7.9.

Compte tenu des hypothèses générales du *paragraphe 3.1,* les actions mécaniques de liaison de **2** sur **1** sont modélisables par une charge répartie le long du segment CD situé dans le plan de symétrie $(O, \vec{x}, \vec{y})$ de la poutre.

Sur un élément de longueur $\mathrm{d}x$ appartenant au segment CD, on définit la force élémentaire de contact $\overrightarrow{\mathrm{d}f}(2 \to 1)$ dont le support est perpendiculaire à $\vec{x}$.

On définit la densité linéique de force par :

$$\vec{\delta}(2 \to 1) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}f}(2 \to 1)}{\mathrm{d}x} \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}x \to 0\,.$$

Dans notre cas de figure et dans le repère $\mathcal{R}$:

$$\vec{\delta}(2 \to 1) = -\left\|\vec{\delta}(2 \to 1)\right\| \vec{y}\,.$$

On supposera que $\left\|\vec{\delta}(2 \to 1)\right\|$ est constant entre C et D.

3.4. LIAISON LINÉIQUE CIRCULAIRE D'AXE $(A, \vec{x})$

(fig. 7.10)

Supposons que le guidage en rotation de **1** par rapport à **2** soit obtenu à partir de roulements à billes de type *BC* ou *BS* et que ces roulements possèdent un angle de rotulage suffisant pour compenser la déformation de flexion de **1** *(fig. 7.10 a).*

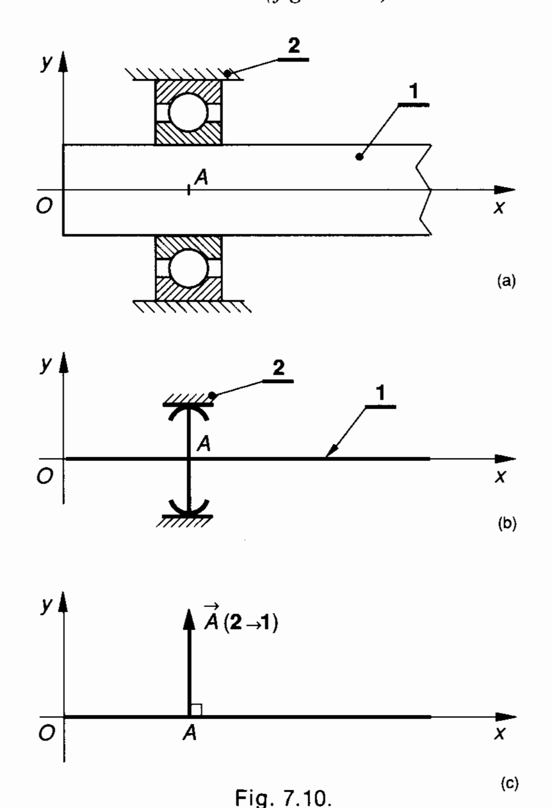


Fig. 7.10.

Dans ce cas la liaison **2-1** est modélisable par une liaison linéique circulaire d'axe $(A, \vec{x})$ *(fig. 7.10 b).* Compte tenu des hypothèses générales du *paragra-*

phe 3.1, les actions mécaniques de liaison de **2** sur **1** sont modélisables en A par le glisseur *(fig. 7.10 c)* :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

Dans notre cas de figure et dans le repère $\mathcal{R}$, on peut écrire :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A(2 \to 1) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

3.5. LIAISON ENCASTREMENT
(fig. 7.11)

Dans ce cas la répartition des actions de contact élémentaires $\overrightarrow{df}(2 \to 1)$ est inconnue.

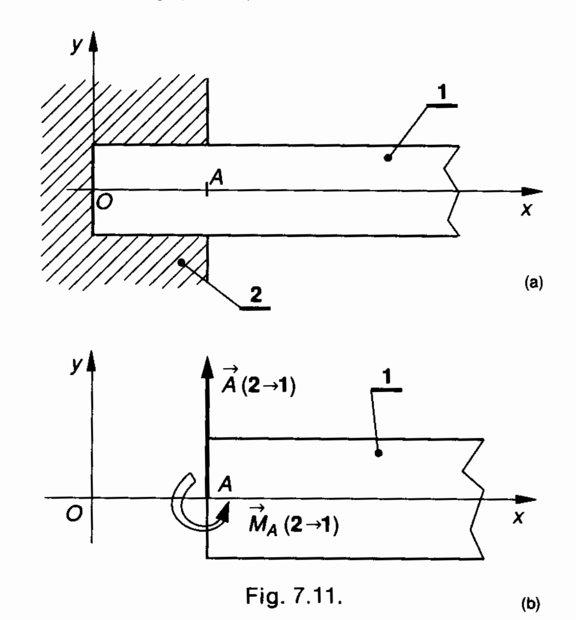


Fig. 7.11.

Les actions mécaniques de liaison de **2** sur **1** sont modélisables en A, centre de surface de la section d'encastrement par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{M}_A(2 \to 1) \end{Bmatrix}.$$

Compte tenu des hypothèses générales du *paragraphe 3.1*, dans $\mathcal{R}$ on peut écrire :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A(2 \to 1) & 0 \\ 0 & N_A(2 \to 1) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

Notons qu'on ne représente pas la portion de poutre encastrée *(fig. 7.11 b)*.

3.6. LIAISON PIVOT D'AXE $(A, \vec{z})$
(fig. 7.12)

Compte tenu des hypothèses générales du *paragraphe 3.1*, les actions mécaniques de liaison de **2** sur **1** sont modélisables en A par le glisseur :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ tel que dans } \mathcal{R} :$$

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A(2 \to 1) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$

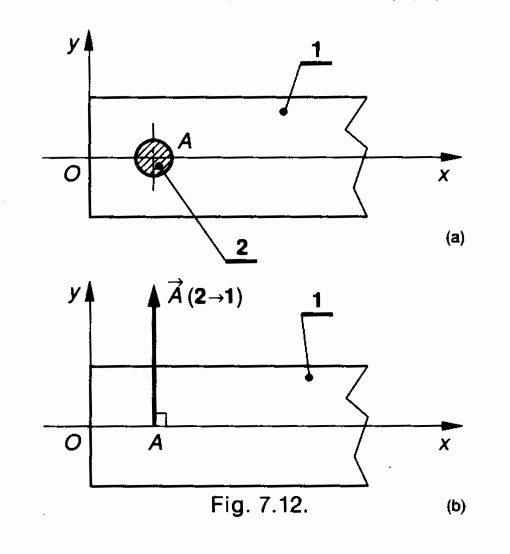


Fig. 7.12.

3.7. ACTION MÉCANIQUE DE LA PESANTEUR *(fig. 7.13)*

La poutre étant homogène et de section constante, l'action mécanique de la pesanteur est modélisable par une charge uniformément répartie telle que sur une longueur élémentaire dx de la ligne moyenne :

$$\overrightarrow{dp} = \vec{\delta}(\text{pes} \to 1)\, dx$$

avec $\|\vec{\delta}(\text{pes} \to 1)\| = \text{Cte}.$

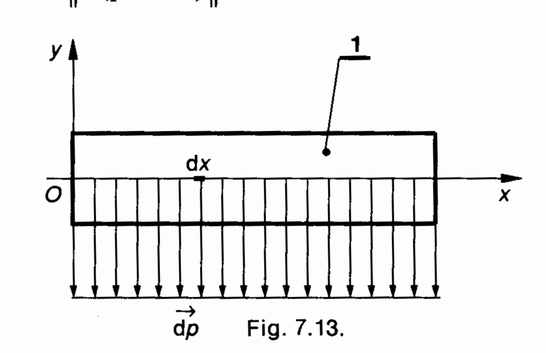


Fig. 7.13.

$\vec{\delta}(\text{pes} \to 1)$ est une densité linéique de force que les constructeurs de profilés indiquent dans leur catalogue sous la forme : « poids au mètre linéaire ».

Dans le repère on peut écrire que :

$$\vec{\delta}(\text{pes} \to 1) = -\left\| \vec{\delta}(\text{pes} \to 1) \right\| \vec{y}. \quad (1)$$

Notons qu'il serait faux de vouloir modéliser l'action mécanique de pesanteur par un glisseur appliqué au centre de gravité G de la poutre.

4. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

4.1. ESSAI DE FLEXION PLANE SIMPLE

Il consiste à mesurer les déformations de flexion. La loi de Hooke permet à partir des déformations d'en déduire la nature et la répartition des contraintes.
Considérons, *figure 7.14,* une poutre **1** reposant sur deux appuis sans adhérence **2** et **3**.

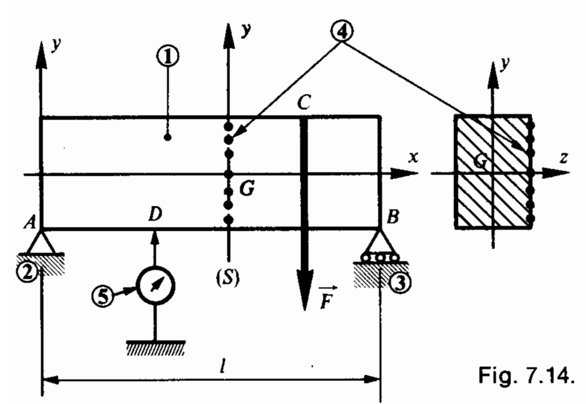


Fig. 7.14.

Sur le flanc d'une section droite (S) de la poutre plaçons des dispositifs extensométriques **4** ou jauges permettant de mesurer avec précision les variations de longueur relatives $\frac{\Delta l}{l}$ des portions de fibres sur lesquelles ils s'appliquent.
En D plaçons un comparateur **5** qui permet de mesurer la déformation de la ligne moyenne ou flèche en D.

4.2. ÉTUDE DES DÉFORMATIONS DE LA LIGNE MOYENNE

Au cours de l'essai de flexion on constate que :

— la flèche en D est proportionnelle à $\|\vec{F}\|$;

— la flèche en D augmente lorsque $\vec{F}$ s'éloigne des appuis A et B. Elle est maximale quand $\vec{F}$ est appliqué au milieu de la poutre ;

— la flèche en D diminue lorsqu'on remplace la charge concentrée $\vec{F}$ par une charge répartie telle que :

$$\Sigma\, \vec{\delta}\, \mathrm{d}l = \vec{\delta} l = \vec{F};$$

— la charge $\vec{F}$ étant constante et fixe, la flèche en D est inversement proportionnelle au moment quadratique $I(G, \vec{z})$ de la section.

4.3. ÉTUDE DES DÉFORMATIONS LONGITUDINALES

Le relevé des variations relatives de longueur $\frac{\Delta l}{l}$ des différentes fibres situées sur le flanc de la section (S) montre que :

— les fibres situées en dessous du plan $(G, \vec{x}, \vec{z})$ s'allongent ;
— les fibres appartenant au plan $(G, \vec{x}, \vec{z})$ ne changent pas de longueur ;
— les fibres situées au-dessus du plan $(G, \vec{x}, \vec{z})$ se raccourcissent ;
— les allongements et les raccourcissements relatifs $\frac{\Delta l}{l}$ sont proportionnels à la distance y de la fibre considérée au plan $(G, \vec{x}, \vec{z})$.

Nous noterons ce résultat sous la forme :

$$\boxed{\frac{\Delta l}{l} = \lambda y}. \quad (1)$$

Tous ces résultats sont schématisés sur la *figure 7.15*.

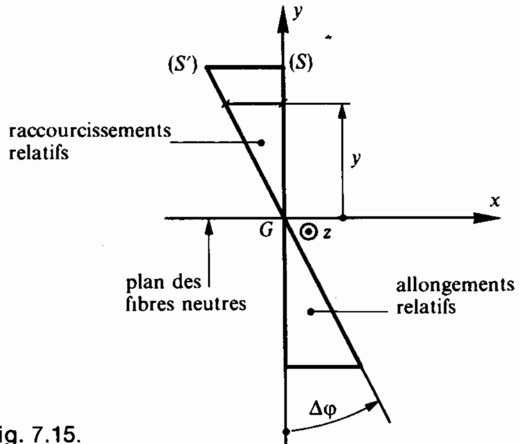


Fig. 7.15.

Tout se passe comme si la section (S) avait pivoté autour de l'axe $(G, \vec{z})$ d'un angle faible $\Delta\varphi$ pour venir en (S').
La déformation longitudinale peut être accentuée si nous considérons une poutre composée de plusieurs lames superposées *(fig. 7.16)*.

On observe que les lames glissent les unes sur les autres et que leurs extrémités subissent les unes par rapport aux autres un petit décalage. On dit que les lames constituant la poutre ont subi un glissement longitudinal.

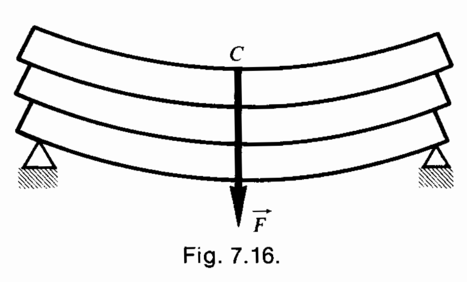


Fig. 7.16.

4.4. CONCLUSIONS DE L'ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

Au cours de la déformation élastique de flexion, les sections droites restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne.
En flexion plane simple, les fibres situées dans le plan contenant la ligne moyenne et perpendiculaire au plan des charges ne changent pas de longueur. Ce plan est appelé plan neutre.
Les fibres s'allongent ou se raccourcissent proportionnellement à leur distance au plan neutre.
La flexion plane simple engendre des contraintes normales aux sections droites et proportionnelles à leur distance au plan neutre.

5. ÉTUDE ET RÉPARTITION DES CONTRAINTES

5.1. NATURE DES CONTRAINTES

Soit une poutre 1 sollicitée en flexion plane simple *(fig. 7.17)*.

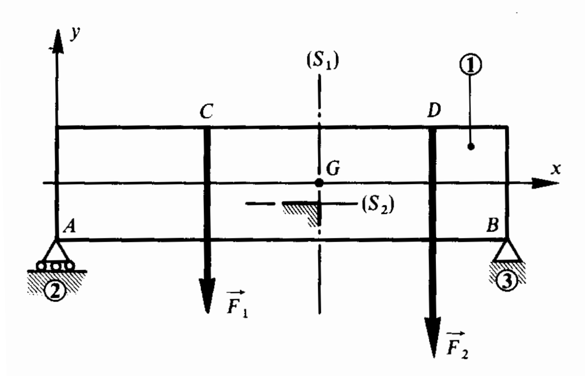


Fig. 7.17.

Considérons deux sections fictives dans la poutre : (S_1) perpendiculaire à la ligne moyenne et (S_2) parallèle au plan neutre $(G, \vec{x}, \vec{z})$. Désignons par *uu'* l'intersection de ces deux plans et représentons *(fig. 7.18)* les contraintes dans ces deux plans.

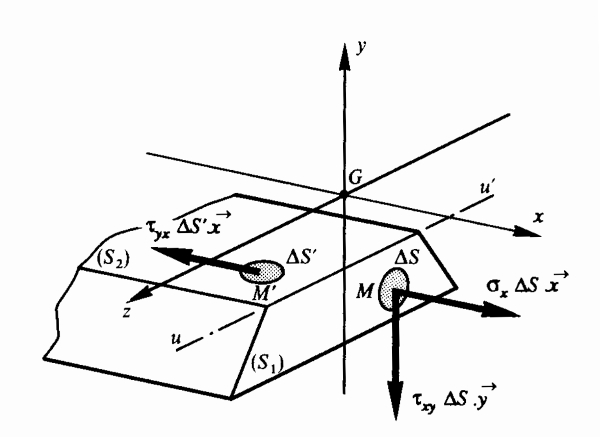


Fig. 7.18.

- σ_x : contrainte normale dans une section droite.

Le signe de σ_x dépend de la position du point *M* par rapport au plan neutre.

- τ_{xy} : contrainte tangentielle transversale dans une section droite.
- τ_{yx} : contrainte tangentielle longitudinale.

Le théorème de Cauchy vu au *chapitre 3, paragraphe 3.5* permet d'écrire :

$$\vec{C}(M, \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{C}(M, \vec{y}) \cdot \vec{x}$$

soit d'après la *figure 7.18*

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}} . \quad \mathbf{(1)}$$

Ce théorème démontre ce qu'il est convenu d'appeler la réciprocité des contraintes tangentielles.
Notons que τ_{xy} et τ_{yx} sont disposées de façon symétrique par rapport à l'arête d'intersection *uu'* *(fig. 7.19)*.

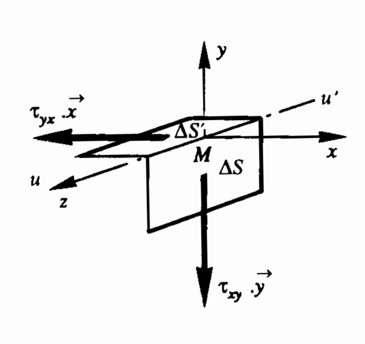


Fig. 7.19.

5.2. ÉTUDE DES CONTRAINTES NORMALES σ_x

5.2.1. Répartition des contraintes normales dans une section droite

La relation (1) du *paragraphe 4.3* définit la répartition des déformations relatives longitudinales :

$$\frac{\Delta l}{l} = \lambda y \quad (\Delta l, \lambda, y \text{ sont algébriques}) . \qquad (2)$$

La loi de Hooke $\sigma_x = E\varepsilon_x$ relative aux contraintes normales permet d'écrire que :

$$\sigma_x = E\frac{\Delta l}{l} \qquad (3)$$

de (2) et (3) on déduit que

$$\sigma_x = E\lambda y$$

soit

$$\boxed{\sigma_x = ky} \quad (\sigma_x, k, y \text{ sont algébriques}) . \qquad (4)$$

La figure 7.20 représente la répartition des contraintes normales dans la section droite (S_1).

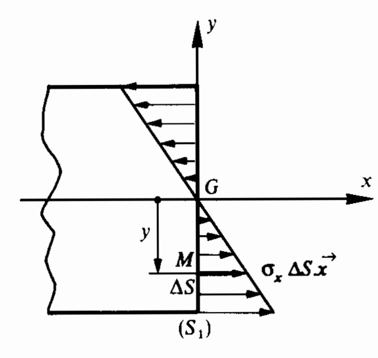


Fig. 7.20.

5.2.2. Relation entre σ_x et M_{f_z}

La réduction en G du torseur des forces de cohésion s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix} .$$

Nous avons vu au *paragraphe 1.3* que les composantes dans $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de $\vec{R}$ et $\vec{M}_G$ s'écrivent

$$\vec{R}\begin{vmatrix} 0 \\ T_y \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \vec{M}_G\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{f_z} \end{vmatrix} . \qquad (5)$$

Dans une section droite (S_1) de la poutre *(fig. 7.21)* on peut écrire :

$$\vec{R} = \Sigma_{(S_1)}\, \sigma_x \Delta S\vec{x} + \Sigma_{(S_1)}\, \tau_{xy} \Delta S\vec{y} . \qquad (6)$$

Compte tenu de (5) la projection sur $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ des vecteurs de la relation (6) permet d'écrire :

$$\text{sur } (G, \vec{x}) : \quad 0 = \Sigma_{(S_1)}\, \sigma_x \Delta S \qquad (7)$$

$$\text{sur } (G, \vec{y}) : \quad T_y = \Sigma_{(S_1)}\, \tau_{xy} \Delta S . \qquad (8)$$

Dans une section droite (S_1) de la poutre *(fig. 7.21)* on peut écrire :

$$\vec{M}_G = \Sigma_{(S_1)}(\overrightarrow{GM} \wedge \sigma_x \Delta S\vec{x}) + \Sigma_{(S_1)}(\overrightarrow{GM} \wedge \tau_{xy} \Delta S\vec{y}) . \qquad (9)$$

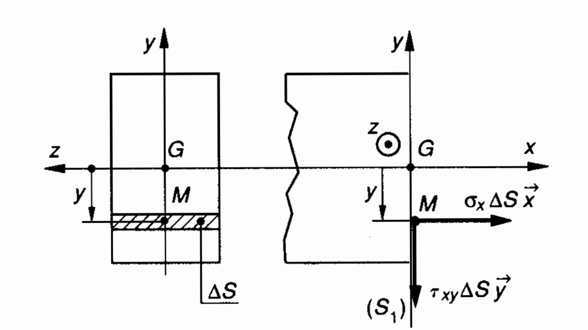


Fig. 7.21.

Dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on détermine les composantes : $\overrightarrow{GM}(0, y, 0)$.

Compte tenu de (5) la projection sur $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ des vecteurs de la relation (9) permet d'écrire :

$$M_{f_z} = -\Sigma_{(S_1)}\, \sigma_x \Delta S y . \qquad (10)$$

Compte tenu de (4), la relation (7) s'écrit :

$$0 = k\Sigma_{(S_1)}\, y\, \Delta S$$

$\Sigma_{(S_1)}\, y\, \Delta S = W_{Gz}$ est le moment statique de (S_1) par rapport à l'axe $(G, \vec{z})$, d'où $W_{Gz} = 0$, ce qui montre que G est nécessairement le centre de surface de la section droite (S_1).

Compte tenu de (4), la relation (10) s'écrit :

$$M_{f_z} = -k\Sigma_{(S_1)}\, y^2 \Delta S \qquad (11)$$

$\Sigma_{(S_1)}\, y^2 \Delta S = I(G, \vec{z})$ est le moment quadratique de la section droite (S_1) par rapport à l'axe $(G, \vec{z})$.

Avec $k = \dfrac{\sigma_x}{y}$, la relation (11) s'écrit :

$$M_{f_z} = -\frac{\sigma_x}{y} I(G, \vec{z})$$

soit

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_{f_z}}{I(G, \vec{z})} y} \quad (12)$$

avec :

- σ_x : valeur algébrique en MPa de la contrainte normale en M dans le plan de section droite ;
- y : ordonnée dans $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du point M, (en mm) ;
- M_{f_z} : valeur algébrique du moment de flexion par rapport à l'axe $(G, \vec{z})$, (en Nmm) ;
- $I(G, \vec{z})$: moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe principal $(G, \vec{z})$, (en mm^4).

5.2.3. Contrainte normale maximale

$I(G, \vec{z})$ est constant le long de la poutre. La contrainte maximale $|\sigma_x|_{max}$ est donc obtenue dans la section où $|M_{f_z}|$ est maximal et pour $|y|_{max} = v$, donc :

$$\boxed{|\sigma_x|_{max} = \frac{|M_{f_z}|_{max}}{\left(\dfrac{I(G, \vec{z})}{v}\right)}} . \quad (13)$$

5.2.4. Relation entre σ_x et M_{f_y}

Si le plan $(G, \vec{x}, \vec{z})$ est un plan de symétrie pour la poutre et pour les forces qui lui sont appliquées, les éléments de réduction en G du torseur des forces de cohésion :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}$$

ont pour composantes dans $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{f_y} \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

Dans une section droite (S_1) de la poutre on peut écrire :

$$\vec{M}_G = \Sigma_{(S_1)}(\overrightarrow{GM} \wedge \sigma_x \Delta S\vec{x}) + \Sigma_{(S_1)}(\overrightarrow{GM} \wedge \tau_{xz} \Delta S\vec{z}) .$$

Dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on détermine les composantes de $\overrightarrow{GM}(0, 0, z)$.

En projection sur $(G, \vec{y})$ l'équation ci-dessus s'écrit alors :

$$M_{f_y} = \Sigma_{(S_1)} z\sigma_x \Delta S$$

σ_x est proportionnel à la coordonnée z du point M

$$\sigma_x = kz$$

d'où :

$$M_{f_y} = k\Sigma_{(S_1)} z^2 \Delta S = kI(G, \vec{y}) = \frac{\sigma_x}{z} I(G, \vec{y})$$

soit

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_{f_y}}{I(G, \vec{y})} z} . \quad (12')$$

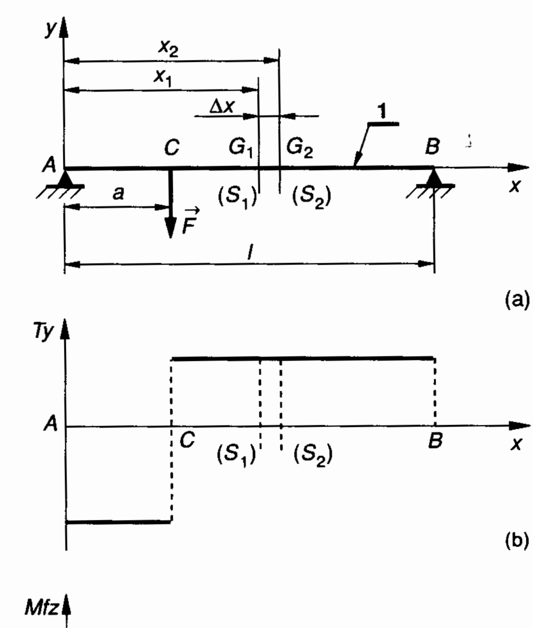
Nota : On comparera les relations (12) et (12′) et on notera la différence de signe.

5.3. RÉPARTITION DES CONTRAINTES TANGENTIELLES

Nous avons établi au *paragraphe 5.1* qu'en un point M de la poutre, la valeur algébrique de la contrainte tangentielle transversale τ_{xy} est égale à celle de la contrainte tangentielle longitudinale τ_{yx} *(fig. 7.19)*

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} .$$

La *figure 7.22 a* représente une poutre sollicitée en flexion plane simple. Soient (S_1) et (S_2) deux sections droites très voisines d'abscisses x_1 et x_2. Les diagrammes de l'effort tranchant T_y et du moment de flexion M_{f_z} sont donnés à la *figure 7.22 b et c*.



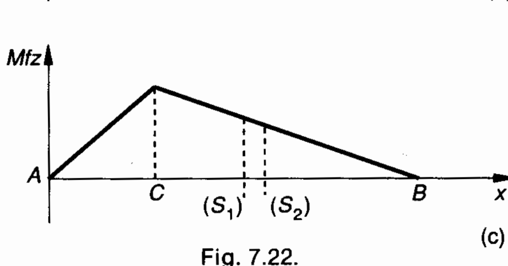


Fig. 7.22.

En G_1 et G_2 on obtient :

$$T_{y_1} = T_{y_2} > 0$$

$M_{f_{z1}} > 0$; $M_{f_{z2}} > 0$ et $M_{f_{z1}} > M_{f_{z2}}$.

Considérons le tronçon G_1G_2 *(fig. 7.23)* et soit (S) une section parallèle au plan neutre $(G, \vec{x}, \vec{z})$ passant par M d'ordonnée Y.

L'équilibre du tronçon G_1G_2 permet d'écrire :

$$\Sigma_v^Y(\sigma_{-x}\,\Delta S\vec{x} + \sigma_x\,\Delta S\vec{x} + \tau_{-xy}\,\Delta S\vec{y} + \tau_{xy}\,\Delta S\vec{y}) + \Sigma_{x_1}^{x_2}(\tau_{yx}\,\Delta S'\,\vec{x}) = \vec{0}\,. \quad (14)$$

Dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on peut écrire successivement :

$$\sigma_x = -y\,\frac{M_{f_{z2}}}{I(G, \vec{z})}$$

$$\sigma_{-x} = y\,\frac{M_{f_{z1}}}{I(G, \vec{z})}$$

Le changement de signe pour σ_{-x} est dû au fait que $(G_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ n'est pas le repère de définition des sollicitations pour (S_1).
Δx étant infiniment petit on peut supposer que la contrainte τ_{yx} est constante sur la facette supérieure de surface $\Sigma_{x_1}^{x_2}\Delta S' = b\,\Delta x$, donc dans la relation (14) :

$$\Sigma_{x_1}^{x_2}(\tau_{yx}\,\Delta S'\,\vec{x}) = \tau_{yx}\,b\,\Delta x\vec{x}\,.$$

En projection sur $(G_1, \vec{x})$ la relation (14) permet d'écrire :

$$\frac{1}{I(G, \vec{z})}\,(M_{f_{z1}} - M_{f_{z2}})\,\Sigma_v^Y y\,\Delta S + \tau_{yx}\,b\,\Delta x = 0\,.$$

On en déduit que :

$$\tau_{yx} = \frac{M_{f_{z2}} - M_{f_{z1}}}{\Delta x}\cdot\frac{\Sigma_v^Y y\,\Delta S}{bI(G, \vec{z})}$$

quand Δx tend vers zéro, on peut écrire :

$$\frac{M_{f_{z2}} - M_{f_{z1}}}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}M_{f_z}}{\mathrm{d}x} = -T_y$$

(chapitre 3, paragraphe 2.4).
$\Sigma_v^Y y\,\Delta S$ représente le moment statique par rapport à l'axe $(G, \vec{z})$ de la portion de section droite comprise entre v et Y, on note :

$$\Sigma_v^Y y\,\Delta S = W_{G_z}\,.$$

REMARQUE

Les bornes du moment statique doivent toujours être prises par valeur croissante. La relation précédente correspond au cas de la figure 7.23 pour laquelle :

$$Y < 0 \quad \textit{donc} \quad v < 0 \quad \textit{avec} \quad v < Y$$

si on considère $Y > 0$ donc $v > 0$, on obtient $Y < v$. Dans ce cas, on écrira donc :

$$\Sigma_Y^v\,y\,\Delta S = W_{Gz}\,.$$

Compte tenu du calcul et des conventions précédentes on peut écrire en M de coordonnée Y :

$$\boldsymbol{\tau_{yx} = -\frac{T_y\,W_{Gz}}{bI(G, \vec{z})}} \quad \textbf{(15)}$$

avec $\quad \boldsymbol{W_{Gz} = \Sigma_v^Y y\,\Delta S}$**.**

Dans la relation ci-dessus T_y, W_{Gz} et τ_{yx} sont algébriques.

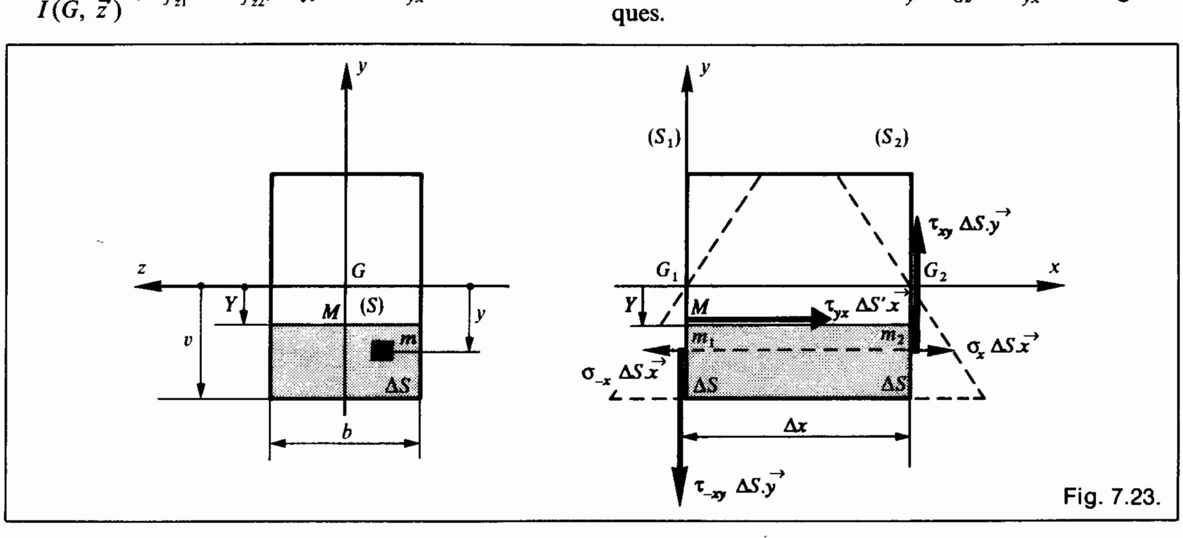


Fig. 7.23.

Rappel : $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ (théorème de Cauchy, *chapitre 3, paragraphe 3.5*).
Unités : τ_{yx} en MPa ; T_y en N ; W_{Gz} en mm^3 ; b en mm ; $I(G, z)$ en mm^4.

REMARQUE IMPORTANTE

b définit la largeur de la poutre dans la section $(M, \vec{x}, \vec{z})$ parallèle au plan neutre et d'ordonnée Y.
Dans le cas d'une section droite rectangulaire b est constant lorsque Y varie.
Dans les autres cas b est une fonction de Y.

Par exemple :
— pour des sections en T, I, H, U, ..., b est une fonction discontinue de Y ;
— pour une section circulaire de rayon R, b est une fonction continue de Y, dans ce cas : $b = 2\sqrt{R^2 - Y^2}$.

APPLICATION

Considérons une section rectangulaire de hauteur h et de largeur b. On peut écrire que :

$$I(G, \vec{z}) = \frac{bh^3}{12}.$$

En posant $\Delta S = b\,\Delta y$ on trouve

$$W_{Gz} = \frac{b}{2}\left(Y^2 - \frac{h^2}{4}\right)$$

d'où :

$$\tau_{yx} = -\frac{3\,T_y}{2\,bh^3}(4\,Y^2 - h^2).$$

Pour $Y = \pm\frac{h}{2}$ on obtient : $\tau_{yx} = 0$.
Pour $Y = 0$ on obtient :

$$|\tau_{yx}|_{\max} = \frac{3\,|T_y|}{2\,S}. \qquad (16)$$

Ecrivons que : $\tau_{\text{uniforme}} = \dfrac{|T_y|}{S}$.
Une telle valeur de τ_{uniforme} ne peut évidemment être utilisée qu'à titre tout à fait indicatif. Il serait faux de calculer la section d'une poutre d'après cette relation.
Notons que cette valeur τ_{uniforme} ne représente pas la contrainte tangentielle moyenne dans la section ; il existe en effet de nombreux cas (section évidée) pour lesquels τ_{uniforme} est supérieure à $\tau_{\max}$ calculée à partir de la relation (15), ce qui n'aurait aucun sens pour une valeur moyenne.
Dans le cas d'une section rectangulaire pleine, à partir de (16) on peut donc écrire que :

$$|\tau_{yx}|_{\max} = \frac{3}{2}\,\tau_{\text{uniforme}}.$$

Nous venons d'indiquer ci-dessus que cette dernière relation ne doit pas être utilisée dans le cas d'une section rectangulaire évidée.

5.4. CONDITIONS DE RÉSISTANCE

5.4.1. Condition de résistance aux contraintes normales

La contrainte normale σ_x doit rester inférieure à sa valeur limite élastique σ_e.
On définit la limite pratique σ_p de la contrainte normale admissible dans une section droite par :

$$\sigma_p = \frac{\sigma_e}{s}$$

s est appelé coefficient de sécurité.

La condition de résistance aux contraintes normales s'écrit :

$$|\sigma_x|_{\max} \leqslant \sigma_p.$$

5.4.2. Condition de résistance aux contraintes tangentielles

La contrainte tangentielle τ_{xy} doit rester inférieure à sa valeur limite élastique τ_e.
On définit la limite pratique τ_p de la contrainte tangentielle admissible dans une section droite par :

$$\tau_p = \frac{\tau_e}{s}.$$

s est appelé coefficient de sécurité.

La condition de résistance aux contraintes tangentielles s'écrit :

$$|\tau_{xy}|_{\max} \leqslant \tau_p.$$

6. ÉTUDE DE LA DÉFORMÉE

6.1. DÉFINITION DE LA DÉFORMÉE

On considère une poutre reposant sur deux appuis sans adhérence repérés **2** et **3** et situés respectivement en A et B *(fig. 7.24 a)*.

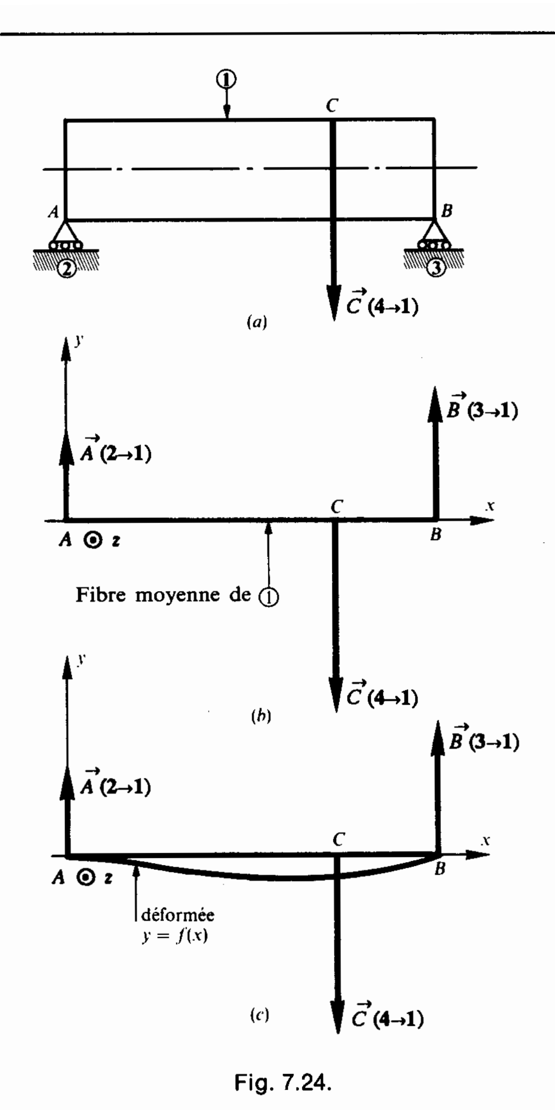


Fig. 7.24.

La poutre **1** est soumise à une action mécanique modélisable en C par le glisseur :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(4 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

Les actions mécaniques de liaison de **2 → 1** et de **3 → 1** sont modélisables respectivement en A et B par les glisseurs :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

et $$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

La *figure 7.24 b* représente la modélisation de la poutre **1** par sa ligne moyenne et la modélisation des actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées.

On choisit le repère $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que $(A, \vec{x})$ soit porté par la ligne moyenne et que le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ soit le plan de symétrie de la poutre. Les charges sont situées dans ce plan et sont perpendiculaires à $(A, \vec{x})$. Ces actions mécaniques extérieures provoquent la flexion de la poutre **1**. La ligne moyenne se déforme et la courbe ainsi obtenue est appelée **courbe déformée** *(fig. 7.24 c)*.

On se propose de déterminer l'équation $y = f(x)$ de la **courbe déformée** dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$.

6.2. ÉQUATION DE LA COURBE DÉFORMÉE

Entre A et C on considère deux sections droites (S_1) et (S_2) de centre de surface G_1 et G_2 distants de Δx très petit *(fig. 7.25)*.

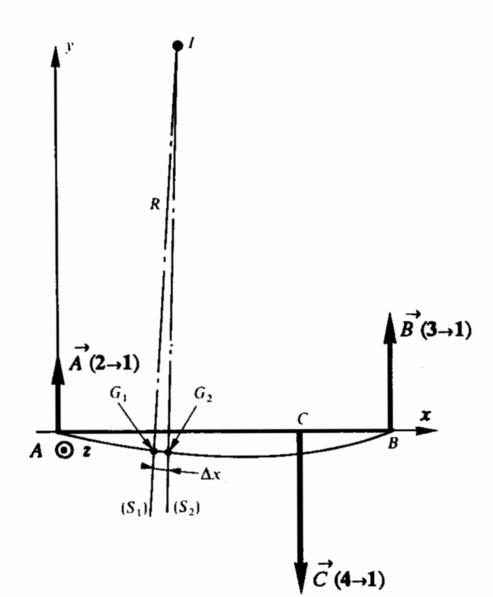


Fig. 7.25.

Soit I le centre de courbure de la ligne moyenne en G_1 et $R = \overline{G_1 I}$ le rayon de courbure algébrique correspondant.

En géométrie analytique on démontre que :

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

y' et y'' sont les valeurs en G_1 de la dérivée première et de la dérivée seconde de la fonction $y = f(x)$.

Les déformations élastiques sont toujours très faibles, on admettra donc que $(1 + y'^2)^{3/2} \approx 1$, d'où :

$$R \approx \frac{1}{y''}. \quad (1)$$

Nous avons admis dans le *paragraphe 2* qu'au cours de la déformation, les sections droites restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne *(fig. 7.26)*.

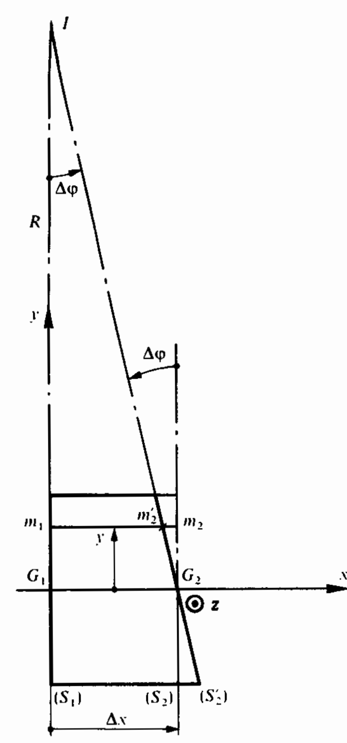


Fig. 7.26.

Tout ce passe comme si (S_2) avait tourné d'un angle très petit $\Delta\varphi$ autour de l'axe $(G_2, \vec{z})$.

Considérons la fibre m_1m_2 d'ordonnée y. Cette fibre s'est raccourcie et est devenue $m_1m'_2$, sa déformation unitaire s'exprime par :

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{m_2m'_2}}{\overline{m_1m_2}}.$$

La loi de Hooke $\sigma_x = E\varepsilon_x$ appliquée à la fibre m_1m_2 permet d'écrire :

$$\sigma_x = E\frac{\overline{m_2m'_2}}{\overline{m_1m_2}} \qquad (\text{ici } \sigma_x < 0)$$

avec $\overline{m_2m'_2} = -y\,\Delta\varphi$ et $\overline{m_1m_2} = \Delta x$, donc :

$$\boldsymbol{\sigma_x = -Ey\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}}. \qquad (2)$$

Nous avons établi au paragraphe 5.2 que

$$\sigma_x = -y\frac{M_{f_z}}{I(G, \vec{z})}. \qquad (3)$$

D'autre part *(fig. 7.26)* :

$$\Delta x \approx R\,\Delta\varphi. \qquad (4)$$

D'après (1) et (4) :

$$y'' = \frac{1}{R} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}. \qquad (5)$$

D'après (2), (5) et (3) :

$$\boxed{\boldsymbol{EI(G, \vec{z})\,y'' = M_{f_z}(x)}}. \qquad (6)$$

Nota :
— M_{f_z} est une fonction de l'abscisse x de G. On note $M_{f_z}(x)$.
— Dans (2) et (3), y désigne l'ordonnée de la fibre considérée.
— Dans (1) et (6) la primitive y de y'' désigne la fonction $y = f(x)$ définissant la courbe déformée. Avec un minimum d'attention, la confusion entre les deux y doit être évitée.

6.3. CONDITIONS AUX LIMITES DE ZONES

Pour chaque zone d'étude, la fonction $M_{f_z}(x)$ prend une forme différente, il existe donc autant d'équations de la déformée qu'il existe de zones d'étude dans la poutre.
S'il y a continuité de la fonction $M_{f_z}(x)$ en limite de zone, en C par exemple *(fig. 7.27)*, on peut écrire :

$$\begin{cases} y'_{c\text{ à gauche}} = y'_{c\text{ à droite}} \\ y_{c\text{ à gauche}} = y_{c\text{ à droite}}. \end{cases}$$

Ces deux équations permettent de compléter les conditions aux limites nécessaires pour intégrer le long de la poutre l'équation :

$$EI(G, \vec{z})\,y'' = M_{f_z}(x).$$

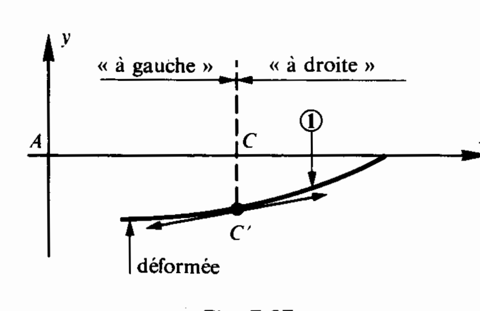


Fig. 7.27.

6.4. DÉFORMATION D'UNE POUTRE REPOSANT SUR DEUX APPUIS ET SUPPORTANT UNE CHARGE PERPENDICULAIRE A LA LIGNE MOYENNE

La *figure 7.28* représente la modélisation d'une poutre **1** reposant sur deux appuis sans adhérence repérés **2** et **3** et situés respectivement en A et B.

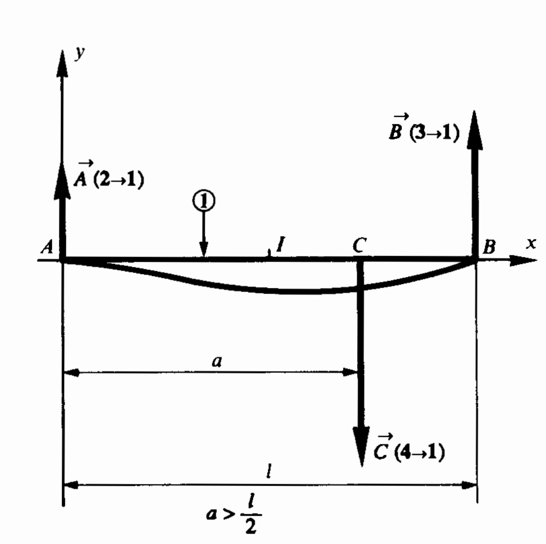


Fig. 7.28.

La poutre **1** est soumise à une action mécanique modélisable en C par un glisseur :

$$\{\mathcal{T}(4\to1)\} = {}_C\begin{Bmatrix}\vec{C}(4\to1)\\ \vec{0}\end{Bmatrix}.$$

Les actions mécaniques de liaison de $2\to1$ et de $3\to1$ sont modélisables respectivement en A et B par les glisseurs :

$$\{\mathcal{T}(2\to1)\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{A}(2\to1)\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

et $$\{\mathcal{T}(3\to1)\} = {}_B\begin{Bmatrix}\vec{B}(3\to1)\\ \vec{0}\end{Bmatrix}.$$

L'étude de l'équilibre de la poutre **1** permet de déterminer :

$$\|\vec{A}(2\to1)\| = \frac{\|\vec{C}(4\to1)\|(l-a)}{l};$$

$$\|\vec{B}(3\to1)\| = \frac{\|\vec{C}(4\to1)\|\,a}{l}.$$

Etude de la déformée dans la zone AC : $0 \leqslant x \leqslant a$

En un point M d'abscisse x :

$$M_{f_z}(x) = \|\vec{A}(2\to1)\|\,x.$$

La relation (6) *paragraphe 6.2* permet d'écrire :

$$EI(G,\vec{z})\,y'' = \|\vec{A}(2\to1)\|\,x = \frac{\|\vec{C}(4\to1)\|\,(l-a)}{l}\,x.$$

Intégrons une première fois :

$$\frac{EI(G,\vec{z})\,l}{\|\vec{C}(4\to1)\|\,(l-a)}\,y' = \frac{x^2}{2} + K_1. \quad (7)$$

Intégrons une deuxième fois :

$$\frac{EI(G,\vec{z})\,l}{\|\vec{C}(4\to1)\|\,(l-a)}\,y = \frac{x^3}{6} + K_1 x + K_2. \quad (8)$$

Etude de la déformée dans la zone CB : $a \leqslant x \leqslant l$

En un point M d'abscisse x :

$$M_{f_z}(x) = \|\vec{B}(3\to1)\|\,(l-x).$$

Soit en exprimant

$$\|\vec{B}(3\to1)\| = \frac{\|\vec{C}(4\to1)\|\,a}{l}$$

$$M_{f_z}(x) = \frac{\|\vec{C}(4\to1)\|\,a(l-x)}{l}.$$

La relation (6) *paragraphe 6.2* permet d'écrire :

$$EI(G,\vec{z})\,y'' = \frac{\|\vec{C}(4\to1)\|\,a(l-x)}{l}.$$

Intégrons une première fois :

$$\frac{EI(G,\vec{z})\,l}{\|\vec{C}(4\to1)\|\,a}\,y' = -\frac{x^2}{2} + lx + K_3. \quad (9)$$

Intégrons une deuxième fois :

$$\frac{EI(G,\vec{z})\,l}{\|\vec{C}(4\to1)\|\,a}\,y = -\frac{x^3}{6} + \frac{lx^2}{2} + K_3 x + K_4. \quad (10)$$

Calcul des quatre constantes K_1, K_2, K_3, K_4

Les quatre conditions aux limites de zones sont :
— en A : $x = 0$ et $y = 0$ dans l'équation (8) ;

— en C : $y'_{\text{à gauche}} = y'_{\text{à droite}}$ dans les équations (7) et (9) ;
— en C : $y_{\text{à gauche}} = y_{\text{à droite}}$ dans les équations (8) et (10) ;
— en B : $x = l$ et $y = 0$ dans l'équation (10).

Tous calculs faits, on trouve :

$$K_1 = \frac{a}{6}(a - 2l)\,; \quad K_2 = 0\,;$$

$$K_3 = -\frac{a^2}{6} - \frac{l^2}{3}\,; \quad K_4 = \frac{a^2 l}{6}.$$

Résultats

• Equation de la déformée dans la zone AC
D'après l'équation (8) :

$$y = \frac{\|\vec{C}(4 \to 1)\|\,(l - a)}{6\,EI(G, \vec{z})\,l}\,[x^3 - ax(2l - a)]. \qquad (11)$$

• Equation de la déformée dans la zone CB
D'après l'équation (10) :

$$y = \frac{\|\vec{C}(4 \to 1)\|\,a}{6\,EI(G, \vec{z})\,l} \times [-x^3 + 3lx^2 - x(a^2 + 2l^2) + a^2 l]. \qquad (12)$$

• Valeur de y au point C
Pour $x = a$ à partir de l'équation (11) ou de l'équation (12) on obtient :

$$y_C = -\frac{\|\vec{C}(4 \to 1)\|\,a^2(l - a)^2}{3\,EI(G, \vec{z})\,l}. \qquad (13)$$

• Valeur de y au milieu I de la poutre avec $a > \frac{l}{2}$:
Dans la zone AC pour $x = \frac{l}{2}$ à partir de l'équation (11) on obtient :

$$y_I = \frac{\|\vec{C}(4 \to 1)\|\,(l - a)(l^2 - 8al + 4a^2)}{48\,EI(G, \vec{z})}. \qquad (14)$$

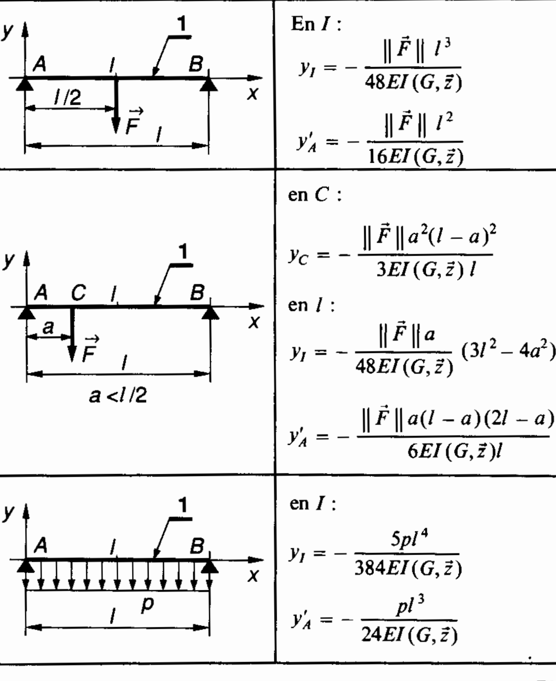
• Valeur de y au milieu I de la poutre avec $a < \frac{l}{2}$.
Dans la zone CB pour $x = \frac{l}{2}$ à partir de l'équation (12) on obtient :

$$y_I = -\frac{\|\vec{C}(4 \to 1)\|\,(3l^2 - 4a^2)\,a}{48\,EI(G, \vec{z})}. \qquad (15)$$

• Cas particulier important
Si la force $\vec{C}(4 \to 1)$ est appliquée au milieu I de la poutre, dans ce cas $a = \frac{l}{2}$ et à partir de l'équation (14) ou de l'équation (15) on obtient :

$$y_I = -\frac{\|\vec{C}(4 \to 1)\|\,l^3}{48\,EI(G, \vec{z})}. \qquad (16)$$

6.5. FORMULAIRE DES DÉFORMATIONS DE FLEXION PLANE SIMPLE



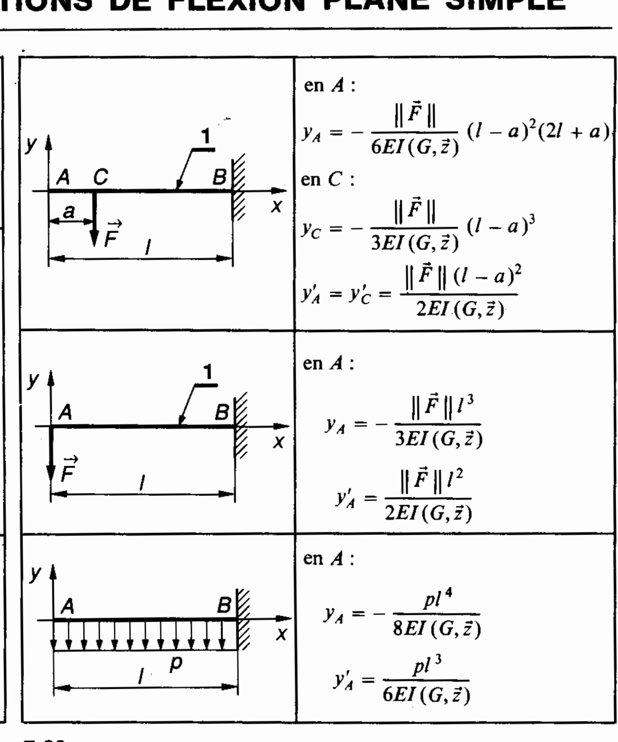


Fig. 7.29.

6.6. PRINCIPE DE SUPERPOSITION DES DÉFORMATIONS

Dans la limite des déformations élastiques, le vecteur déformation en un point, dû à un système de forces extérieures est égal à la somme géométrique des vecteurs déformation dûs à chacune des forces du système agissant séparément.

La *figure 7.30 a* représente une poutre **1** reposant sur deux appuis sans adhérence repérés **2** et **3** et situés respectivement en A et B. Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces qui lui sont appliquées *(fig. 7.30 b)*. $(A, \vec{x})$ est porté par la ligne moyenne de la poutre **1**.

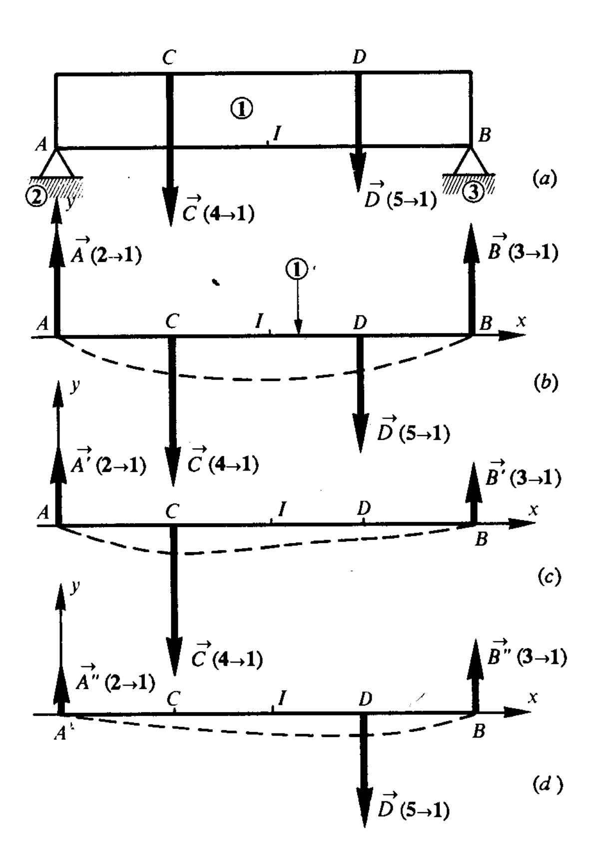


Fig. 7.30.

La poutre **1** est soumise à deux actions mécaniques modélisables :

— l'une en C par le glisseur :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(4 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ;$$

— l'autre en D par le glisseur :

$$\{\mathcal{T}(5 \to 1)\} = {}_D\begin{Bmatrix} \vec{D}(5 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} .$$

Les actions mécaniques de liaison de $\mathbf{2} \to \mathbf{1}$ et de $\mathbf{3} \to \mathbf{1}$ sont modélisables respectivement en A et B par les glisseurs :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

et $$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} .$$

L'étude de l'équilibre de la poutre **1** sous l'action de $\vec{C}(4 \to 1)$ et de $\vec{D}(5 \to 1)$ agissant séparément permet de déterminer *(fig. 7.30 c.d)* :

$$\vec{A}'(2 \to 1) \quad \text{et} \quad \vec{B}'(3 \to 1)$$
$$\vec{A}''(2 \to 1) \quad \text{et} \quad \vec{B}''(3 \to 1)$$

tels que :

$$\vec{A}(2 \to 1) = \vec{A}'(2 \to 1) + \vec{A}''(2 \to 1)$$
$$\vec{B}(3 \to 1) = \vec{B}'(3 \to 1) + \vec{B}''(3 \to 1) .$$

Notons $\vec{\delta}_C[\vec{C}(4 \to 1)]$ le vecteur déformation au point C dû à $\vec{C}(4 \to 1)$. Le principe de superposition permet d'écrire :

$$\vec{\delta}_C = \vec{\delta}_C[\vec{C}(4 \to 1)] + \vec{\delta}_C[\vec{D}(5 \to 1)]$$
$$\vec{\delta}_D = \vec{\delta}_D[\vec{C}(4 \to 1)] + \vec{\delta}_D[\vec{D}(5 \to 1)] .$$

En projection sur l'axe $(A, \vec{y})$ on obtient :

$$y_C = y_C[\vec{C}(4 \to 1)] + y_C[\vec{D}(5 \to 1)]$$
$$y_D = y_D[\vec{C}(4 \to 1)] + y_D[\vec{D}(5 \to 1)] .$$

La déformation au milieu I de la poutre **1** *(fig. 7.30)* a pour expression :

$$y_I = y_I[\vec{C}(4 \to 1)] + y_I[\vec{D}(5 \to 1)] .$$

Cette méthode permet de ramener l'étude d'une poutre supportant n forces perpendiculaires à la ligne moyenne au cas élémentaire où une seule force agit sur la poutre, en appliquant n fois la formule correspondant à chacune des n forces agissant séparément (voir *fig. 7.29*).

APPLICATION

On considère *figure 7.31* une poutre **1** reposant sur deux appuis sans adhérence repérés **2** et **3** et situés respectivement en A et B.

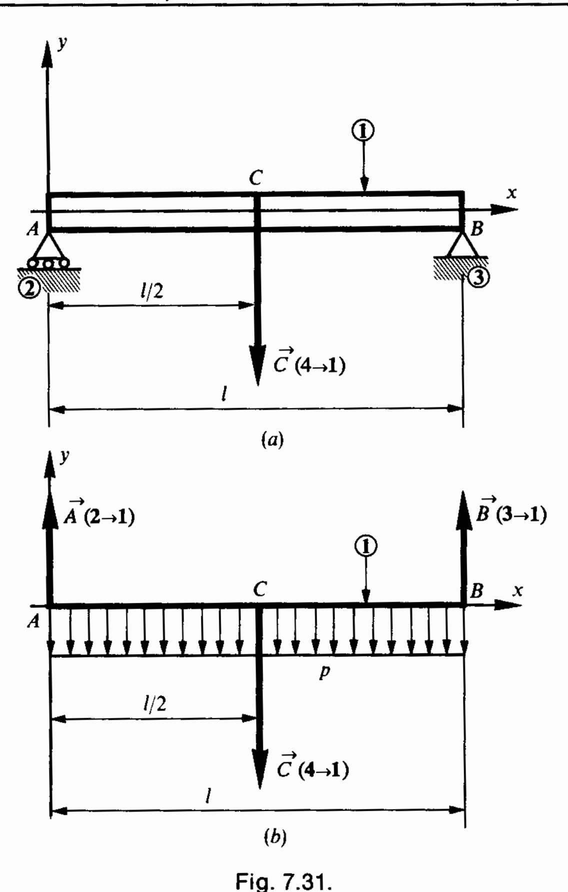


Fig. 7.31.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces qui lui sont appliquées. Le point B est situé sur $(A, \vec{x})$ et C est le milieu de AB.
Les actions mécaniques associées aux liaisons $\mathbf{2} \to \mathbf{1}$ et $\mathbf{3} \to \mathbf{1}$ sont modélisables respectivement en A et B par les glisseurs :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\quad \vec{A}(2 \to 1) = \|\vec{A}(2 \to 1)\| \, \vec{y}$

et

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\quad \vec{B}(3 \to 1) = \|\vec{B}(3 \to 1)\| \, \vec{y}$.

L'action de la pesanteur sur la poutre **1** est assimilée à une charge uniformément répartie tout le long de la poutre et modélisable par une densité linéique de force (voir relation (1) *paragraphe 3.7*)

$$\vec{\delta}(\text{pes} \to 1) = -\,\|\vec{\delta}(\text{pes} \to 1)\| \, \vec{y}.$$

Pour simplifier l'écriture on notera :

$$\|\vec{\delta}(\text{pes} \to 1)\| = p$$

d'où

$$\vec{\delta}(\text{pes} \to 1) = -\,p\vec{y}.$$

La poutre **1** est soumise à une action mécanique modélisable en C par le glisseur :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(4 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\quad \vec{C}(4 \to 1) = -\,\|\vec{C}(4 \to 1)\| \, \vec{y}$.

Etude de la déformation de 1 sous l'effet de la pesanteur

La *figure 7.32* représente la modélisation de la poutre **1** et de l'action de la pesanteur.
Les actions mécaniques de liaison en A et B sont modélisables par :

$$\{\mathcal{T}_1(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}_1(2 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\quad \vec{A}_1(2 \to 1) = \|\vec{A}_1(2 \to 1)\| \, \vec{y}$

$$\{\mathcal{T}_1(3 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}_1(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\quad \vec{B}_1(3 \to 1) = \|\vec{B}_1(3 \to 1)\| \, \vec{y}$.

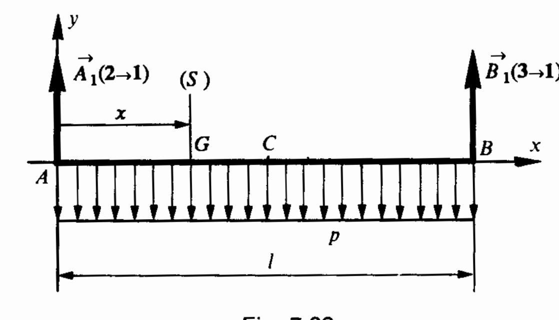


Fig. 7.32.

Par raison de symétrie on peut écrire que :

$$\|\vec{A}_1(2 \to 1)\| = \|\vec{B}_1(3 \to 1)\| = \frac{pl}{2}.$$

Entre A et B, au centre de surface G d'une section droite (S) de **1** nous pouvons écrire :

$${}_G\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = -\,{}_G\{\mathcal{T}_1(2 \to 1)\} - {}_G\{\mathcal{T}(\text{pes} \to 1)\}.$$

Soit :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{R} = -\vec{A}_1(2 \to 1) - \sum \vec{\delta}(\text{pes} \to 1)\,dx \\ \vec{M}_G = -\overrightarrow{GA} \wedge \vec{A}_1(2 \to 1) - \sum \vec{M}_G[\vec{\delta}(\text{pes} \to 1)] \end{array} \right.$$

avec $\vec{\delta}(\text{pes} \to 1) = -p\vec{y}$.
La composante M_{f_z} de $\vec{M}_G$ sur $(G, \vec{z})$ s'écrit :

$$M_{f_z} = \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2}.$$

L'équation de la dérivée seconde de la déformée s'écrit :

$$EI(G, \vec{z})\,y'' = M_{f_z}(x)$$

soit

$$\frac{2\,EI(G, \vec{z})}{p}\,y'' = -x^2 + lx.$$

L'équation primitive de y'' s'écrit :

$$\frac{2\,EI(G, \vec{z})}{p}\,y' = -\frac{x^3}{3} + \frac{lx^2}{2} + K_1.$$

Au point C : $x = \frac{l}{2}$ et $y'_c = 0$, on en déduit que :

$$K_1 = -\frac{l^3}{12}.$$

L'équation primitive de y' s'écrit alors :

$$\frac{2\,EI(G, \vec{z})}{p}\,y = -\frac{x^4}{12} + \frac{lx^3}{6} - \frac{l^3x}{12} + K_2.$$

Au point A : $x = 0$ et $y_A = 0$, donc $K_2 = 0$.
L'équation de la déformée entre A et B s'écrit :

$$y = \frac{p}{2\,EI(G, \vec{z})}\left(-\frac{x^4}{12} + \frac{lx^3}{6} - \frac{l^3x}{12}\right).$$

La déformation $y_{1\,C}$ en C pour $x = \frac{l}{2}$ a pour expression :

$$y_{1\,C} = -\frac{5\,pl^4}{384\,EI(G, \vec{z})}. \qquad (1)$$

Etude de la déformation de 1 sous l'effet de $\vec{C}(4 \to 1)$

La *figure 7.33* représente la modélisation de la poutre **1** et de l'action en C de **4 → 1** telle que

$$\vec{C}(4 \to 1) = -\|\vec{C}(4 \to 1)\|\,\vec{y}.$$

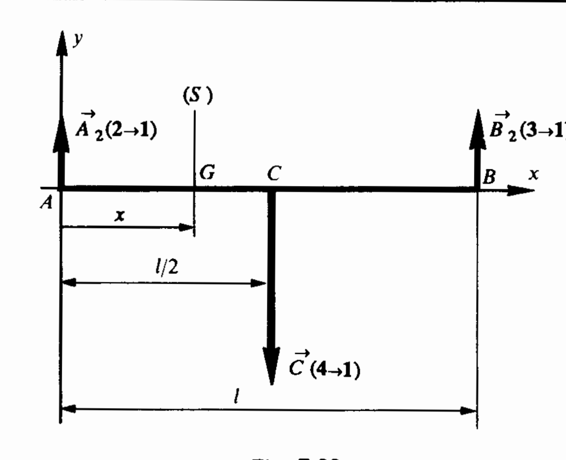


Fig. 7.33.

Les actions mécaniques de liaisons en A et B sont modélisables par :

$$\{\mathcal{T}_2(2 \to 1)\} = {}_A\left\{\begin{array}{l} \vec{A}_2(2 \to 1) \\ \vec{0} \end{array}\right\}$$

tel que $\vec{A}_2(2 \to 1) = \|\vec{A}_2(2 \to 1)\|\,\vec{y}$

$$\{\mathcal{T}_2(3 \to 1)\} = {}_B\left\{\begin{array}{l} \vec{B}_2(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{array}\right\}$$

tel que $\vec{B}_2(3 \to 1) = \|\vec{B}_2(3 \to 1)\|\,\vec{y}$.

Par raison de symétrie on peut écrire que :

$$\|\vec{A}_2(2 \to 1)\| = \|\vec{B}_2(3 \to 1)\| = \frac{\|\vec{C}(4 \to 1)\|}{2}.$$

Entre A et C, au centre de surface G d'une section droite (S) de **1** nous pouvons écrire :

$${}_G\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = -{}_G\{\mathcal{T}_2(2 \to 1)\}$$

soit

$$\left| \begin{array}{l} \vec{R} = -\vec{A}_2(2 \to 1) \\ \vec{M}_G = -\overrightarrow{GA} \wedge \vec{A}_2(2 \to 1). \end{array} \right.$$

La composante M_{f_z} de $\vec{M}_G$ sur $(G, \vec{z})$ s'écrit :

$$M_{f_z} = \frac{\|\vec{C}(4 \to 1)\|}{2}\,x.$$

L'équation de la dérivée seconde de la déformée s'écrit :

$$EI(G, \vec{z})\,y'' = M_{f_z}$$

soit

$$\frac{2\,EI(G, \vec{z})}{\|\vec{C}(4 \to 1)\|}\,y'' = x.$$

L'équation primitive de y'' s'écrit :

$$\frac{2\,EI(G,\vec{z})}{\|\vec{C}(4\to 1)\|}\,y' = \frac{x^2}{2} + K_3 .$$

Au point C : $x = \frac{l}{2}$ et $y'_C = 0$, on en déduit que :

$$K_3 = -\frac{l^2}{8} .$$

L'équation primitive de y' s'écrit alors :

$$\frac{2\,EI(G,\vec{z})}{\|\vec{C}(4\to 1)\|}\,y = \frac{x^3}{6} - \frac{l^2}{8}x + K_4 .$$

Au point A : $x = 0$ et $y_A = 0$, donc $K_4 = 0$.
L'équation de la déformée entre A et C s'écrit :

$$y = \frac{\|\vec{C}(4\to 1)\|}{2\,EI(G,\vec{z})}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2}{8}x\right) .$$

La déformation y_{2C} en C pour $x = \frac{l}{2}$ a pour expression :

$$y_{2C} = -\frac{\|\vec{C}(4\to 1)\|\, l^3}{48\,EI(G,\vec{z})} . \qquad (2)$$

Déformation au point C sous l'effet des deux charges

Le principe de superposition des déformations permet d'écrire au point C :

$$y_C = y_{1C} + y_{2C}$$

soit d'après (1) et (2)

$$y_C = -\frac{l^3}{48\,EI(G,\vec{z})}\left(\frac{5\,pl}{8} + \|\vec{C}(4\to 1)\|\right) . \qquad (3)$$

7. POUTRE D'ÉGALE RÉSISTANCE A LA FLEXION SIMPLE

7.1. DÉFINITION

On appelle poutre d'égale résistance à la flexion simple, une poutre pour laquelle la contrainte normale maximale dans une section droite de centre G a la même valeur quelle que soit la position de G.

Nous avons vu au *paragraphe 5.2* que dans une section droite la contrainte normale maximale est obtenue pour $|y|_{max} = v$.
On peut donc écrire :

$$|\sigma_x|_{max} = \frac{|M_{f_z}|}{\dfrac{I(G,\vec{z})}{v}} = \text{Cte} .$$

Il en résulte que le module de flexion $\frac{I(G,\vec{z})}{v}$ varie de la même façon que $|M_{f_z}(x)|$ le long de la poutre.
La section de la poutre est donc variable.
Dans une telle poutre, le matériau travaille dans toutes les sections au maximum de ses possibilités, d'où une construction plus légère. La déformation d'une telle poutre sera plus grande d'où son utilisation dans le cas des ressorts de flexion.

7.2. POUTRE REPOSANT SUR DEUX APPUIS ET SUPPORTANT UNE CHARGE CONCENTRÉE AU MILIEU

On considère *figure 7.34* une poutre **1** reposant sur deux appuis sans adhérence repérés **2** et **3** et situés respectivement en A et B.

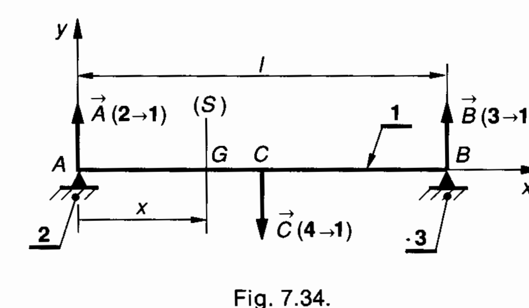


Fig. 7.34.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces qui lui sont appliquées. Le point B est situé sur $(A, \vec{x})$ et C est le milieu de AB.
Les actions mécaniques de liaison en A et B sont modélisables par :

$$\{\mathcal{T}(2\to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{A}(2\to 1)\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

tel que : $\vec{A}(2\to 1) = \|\vec{A}(2\to 1)\|\,\vec{y}$

$$\{\mathcal{T}(3\to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix}\vec{B}(3\to 1)\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

tel que : $\vec{B}(3\to 1) = \|\vec{B}(3\to 1)\|\,\vec{y}$.

Par raison de symétrie on peut écrire que :

$$\|\vec{A}(2 \to 1)\| = \|\vec{B}(3 \to 1)\| = \frac{\|\vec{C}(4 \to 1)\|}{2}.$$

Cette symétrie permet de limiter l'étude de la poutre 1 à la zone AC. Entre A et C, au centre de surface G d'une section droite (S) tel que $\overrightarrow{AG} = x\vec{x}$, on peut écrire :

$$_G\{\mathcal{T}_{coh}\} = -\,_G\{\mathcal{T}(2 \to 1)\}$$

soit
$$\left|\begin{array}{l}\vec{R} = -\vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{M}_G = -\overrightarrow{GA} \wedge \vec{A}(2 \to 1).\end{array}\right.$$

La composante M_{f_z} de $\vec{M}_G$ sur $(G, \vec{z})$ s'écrit :

$$M_{f_z} = \frac{\|\vec{C}(4 \to 2)\|}{2}\, x. \qquad (1)$$

D'après la relation (12) du *paragraphe 5.2.2* la contrainte normale dans une section droite (S) s'exprime par :

$$\sigma_x = \frac{-M_{f_z}(x)}{I(G, \vec{z})}\, y.$$

Sa valeur maximale est obtenue pour $|y|_{max} = v$

d'où $$|\sigma_x|_{max} = \frac{|M_{f_z}(x)|}{I(G, \vec{z})}\, v.$$

Soit avec $|\sigma_x|_{max} = \sigma_p$ (voir *paragraphe 5.4*)

$$\frac{I(G, \vec{z})}{v} = \frac{|M_{f_z}(x)|}{\sigma_p}.$$

Compte tenu de la relation (1) :

$$\frac{I(G, \vec{z})}{v} = \frac{\|\vec{C}(4 \to 1)\|}{2\,\sigma_p}\, x. \qquad (2)$$

Dans ce cas d'étude, le module de flexion est une fonction linéaire de x.

1er cas : section rectangulaire de hauteur *h* constante

La relation (2) s'écrit alors :

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{\|\vec{C}(4 \to 1)\|}{2\,\sigma_p}\, x$$

d'où : $$b = \frac{3\|\vec{C}(4 \to 1)\|}{h^2\,\sigma_p}\, x.$$

La largeur b est une fonction linéaire de x.

- **En *A*** : $x = 0$ d'où $b = 0$.

En A, le moment de flexion est nul et l'effort tranchant a pour valeur :

$$T_y = -\frac{\|\vec{C}(4 \to 1)\|}{2}. \qquad (3)$$

Aux extrémités A et B la section sera déterminée à partir d'un calcul de résistance relatif aux contraintes tangentielles (voir *paragraphe 5.4*).

$$|\tau_{xy}|_{max} \leq \tau_p. \qquad (4)$$

Dans le cas d'une section rectangulaire pleine, la relation (16) *paragraphe 5.3* permet d'écrire :

$$|\tau_{xy}|_{max} = \frac{3}{2}\,\frac{|T_y|}{bh}. \qquad (5)$$

A partir de (3), (4) et (5) on obtient :

$$b_{min} = \frac{3\|\vec{C}(4 \to 1)\|}{4\,h\tau_p}. \qquad (6)$$

- **En *C*** : $x = \frac{l}{2}$ d'où $b = \frac{3\|\vec{C}(4 \to 1)\|\, l}{2\,h^2\,\sigma_p}$.

Une forme possible de la poutre admettant $(A, \vec{x}, \vec{y})$ comme plan de symétrie est indiquée en vue de dessus *(fig. 7.35)*.

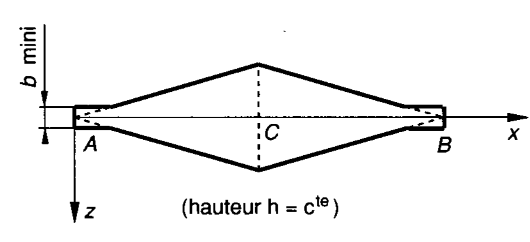


Fig. 7.35.

Ce type de poutre est très déformable, il peut être utilisé dans le cas des ressorts de flexion.

2e cas : section rectangulaire de largeur *b* constante

La relation (2) s'écrit alors :

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{\|\vec{C}(4 \to 1)\|}{2\,\sigma_p}\, x$$

d'où $$h^2 = \frac{3\|\vec{C}(4 \to 1)\|}{b\sigma_p}\, x.$$

Dans ce cas la hauteur h varie paraboliquement.

- **En *A*** : $x = 0$ d'où $h = 0$.

La condition de résistance aux contraintes tangentielles est déterminée par les relations (3), (4) et (5), d'où :

$$h_{\min} = \frac{3\|\vec{C}(4 \to 1)\|}{4\, b\tau_p}\,. \qquad (7)$$

• **En C :** $\quad x = \dfrac{l}{2}$

d'où : $$h_{\min} = \sqrt{\frac{3\|\vec{C}(4 \to 1)\|\, l}{2b\sigma_p}}\,.$$

Une forme possible de la poutre est indiquée *figure 7.36*.

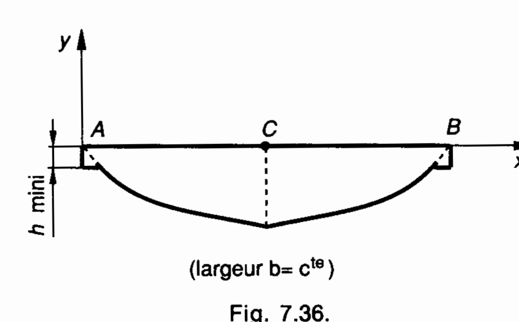


Fig. 7.36.

Ce type de poutre est peu déformable.

7.3. POUTRE ENCASTRÉE A UNE EXTRÉMITÉ ET SUPPORTANT UNE CHARGE CONCENTRÉE A L'AUTRE EXTRÉMITÉ

On considère *figure 7.37*, une poutre AB repérée **1**, encastrée en B par rapport à **2**.

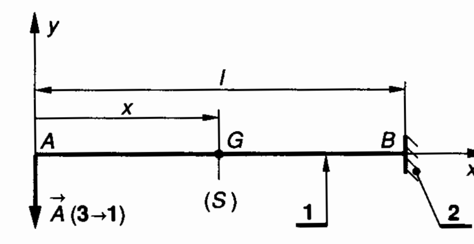


Fig. 7.37.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces qui lui sont appliquées. Par hypothèse l'action mécanique en A est modélisable par :

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que : $\quad \vec{A}(3 \to 1) = -\|\vec{A}(3 \to 1)\|\vec{y}\,.$

Entre A et B, au centre de surface G d'une section droite (S) on peut écrire :

$${}_G\{\mathcal{T}_{coh}\} = -\,{}_G\{\mathcal{T}(3 \to 1)\}$$

soit $$\left|\begin{aligned} \vec{R} &= -\vec{A}(3 \to 1) \\ \vec{M}_G &= -\overrightarrow{GA} \wedge \vec{A}(3 \to 1)\,. \end{aligned}\right.$$

La composante M_{f_z} de $\vec{M}_G$ sur $(G, \vec{z})$ s'écrit :

$$M_{f_z} = -\|\vec{A}(3 \to 1)\|\, x\,.$$

D'après la relation (12) du *paragraphe 5.2.2* la contrainte normale dans une section droite (S) s'exprime par :

$$\sigma_x = \frac{-M_{f_z}(x)}{I(G, \vec{z})}\, y$$

sa valeur maximale est obtenue par $|y|_{\max} = v$

d'où : $$|\sigma_x|_{\max} = \frac{|M_{f_z}(x)|}{I(G, \vec{z})}\, v$$

soit avec $|\sigma_x|_{\max} = \sigma_p$ (voir *paragraphe 5.4*),

$$\frac{I(G, \vec{z})}{v} = \frac{\|\vec{A}(3 \to 1)\|}{\sigma_p}\, x\,. \qquad (8)$$

Dans ce cas d'étude, le module de flexion est une fonction linéaire de x.

1er cas : section rectangulaire de largeur b constante

La relation (8) s'écrit alors :

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{\|\vec{A}(3 \to 1)\|}{\sigma_p}\, x\,,$$

d'où $$h^2 = \frac{6\|\vec{A}(3 \to 1)\|}{b\sigma_p}\, x\,.$$

La hauteur h varie paraboliquement

• **En A :** $\quad x = 0$ d'où $h = 0$.

En A l'effort tranchant s'exprime par :

$$T_y = \|\vec{A}(3 \to 1)\| \qquad (9)$$

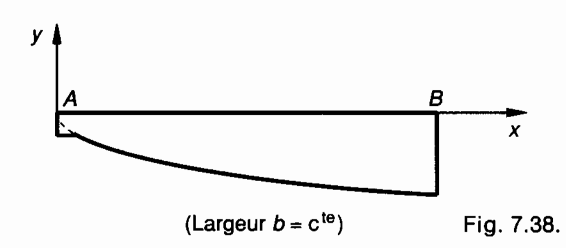
avec les relations (4), (5) et (9) on obtient en A :

$$h_{\min} = \frac{3\|\vec{A}(3 \to 1)\|}{2\, b\tau_p}\,. \qquad (10)$$

• **En B :** $\quad x = l$

d'où : $$h_{\min} = \sqrt{\frac{6\|\vec{A}(3 \to 1)\|\, l}{b\sigma_p}}\,.$$

Une forme possible de la poutre est indiquée *figure 7.38*.



(Largeur $b = c^{te}$) Fig. 7.38.

Ce type de poutre est peu déformable, il peut être utilisé dans le cas des consoles.

2e cas : section rectangulaire de hauteur *h* constante

La relation (8) s'écrit :

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{\|\vec{A}(3 \to 1)\|}{\sigma_p} x,$$

d'où $$b = \frac{6\|\vec{A}(3 \to 1)\|}{h^2 \sigma_p} x.$$

La largeur b est une fonction linéaire de x.

• **En** $\boldsymbol{A}$: $x = 0$ d'où $b = 0$.

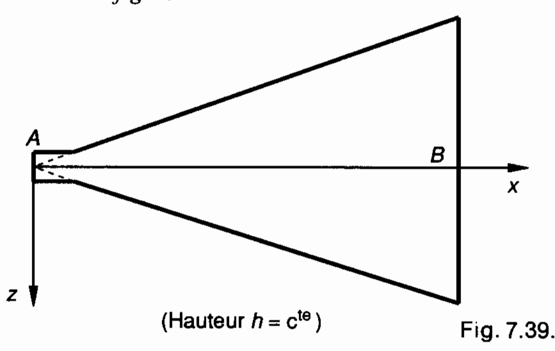
Avec les relations (4), (5) et (9) on obtient en A :

$$b_{\min} = \frac{3\|\vec{A}(3 \to 1)\|}{2\,h\tau_p}. \quad (11)$$

• **En** $\boldsymbol{B}$: $x = l$

d'où $$b = \frac{6\|\vec{A}(3 \to 1)\|\, l}{h^2 \sigma_p}.$$

Une forme possible de la poutre admettant $(A, \vec{x}, \vec{y})$ comme plan de symétrie est indiquée en vue de dessus à la *figure 7.39*.



(Hauteur $h = c^{te}$) Fig. 7.39.

Ce type de poutre est très déformable, il peut être utilisé dans le cas des ressorts de flexion.

8. SYSTÈMES HYPERSTATIQUES D'ORDRE 1

Considérons *figure 7.40* une poutre **1** de section constante reposant sur trois appuis sans adhérence

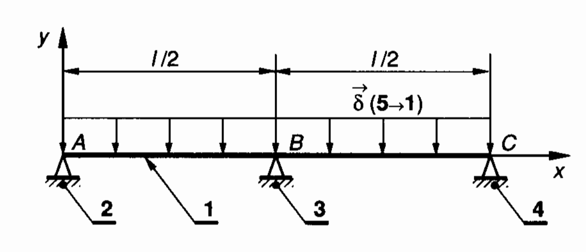


Fig. 7.40.

repérés **2**, **3** et **4** et situés respectivement en A, B et C tels que A, B et C soient alignés et B au milieu de AC.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces qui lui sont appliquées.

La poutre **1** est soumise à une action de **5→1** qui est assimilée à une charge uniformément répartie sur toute sa longueur et modélisable par une densité linéique de force (voir relation (1) *paragraphe 3.7*) :

$$\vec{\delta}(5 \to 1) = -\|\vec{\delta}(5 \to 1)\|\,\vec{y}.$$

Pour simplifier l'écriture, on notera :

$$\|\vec{\delta}(5 \to 1)\| = p,$$

d'où $$\vec{\delta}(5 \to 1) = -p\vec{y}.$$

Les actions mécaniques associées aux liaisons **2 → 1**, **3 → 1** et **4 → 1** sont modélisables respectivement en A, B et C par trois glisseurs :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que : $\vec{A}(2 \to 1) = \|\vec{A}(2 \to 1)\|\,\vec{y}$;

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que : $\vec{B}(3 \to 1) = \|\vec{B}(3 \to 1)\|\,\vec{y}$;

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(4 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que : $\vec{C}(4 \to 1) = \|\vec{C}(4 \to 1)\|\,\vec{y}$;

L'équilibre de la poutre **1** permet d'écrire

$$\{\mathcal{T}(\bar{1} \to 1)\} = \{\vec{0}\}.$$

Soit en B :

$$\left|\begin{array}{l} \vec{R}(\bar{1} \to 1) = \vec{0} \\ \vec{M}_B(\bar{1} \to 1) = \vec{0}. \end{array}\right.$$

En projection sur $\vec{y}$, la première équation permet d'écrire :

$$\|\vec{A}(2 \to 1)\| - \sum p \, dx + \|\vec{B}(3 \to 1)\| + \|\vec{C}(4 \to 1)\| = 0 . \quad (1)$$

En projection sur $\vec{z}$ la deuxième équation permet d'écrire :

$$- \|\vec{A}(2 \to 1)\| + \|\vec{C}(4 \to 1)\| = 0 . \quad (2)$$

On dispose de deux équations algébriques (1) et (2) qui comportent trois inconnues. Le système est donc hyperstatique d'ordre 1.
Pour résoudre ce système, il faut une autre équation qui peut être fournie par l'étude des déformations de la poutre **1**. Le principe de superposition des déformations permet de trouver rapidement cette troisième équation.

• Si on supprime l'appui au milieu B *(fig. 7.41)*, la poutre **1** est en équilibre isostatique sous les actions de **2 → 1**, **4 → 1** et **5 → 1**.

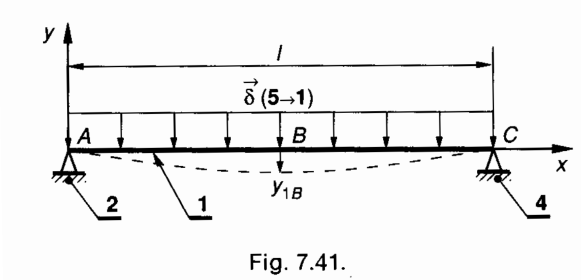


Fig. 7.41.

Ce cas a déja été étudié au *paragraphe 6.6*. La déformation au milieu B s'exprime par (relation (1) *paragraphe 6.6*) :

$$y_{1B} = - \frac{5 \, pl^4}{384 \, EI(G, \vec{z})} . \quad (3)$$

• Si on supprime la charge répartie *(fig. 7.42)*, la poutre **1** est en équilibre isostatique sous les actions de **2 → 1**, **3 → 1** et **4 → 1**.

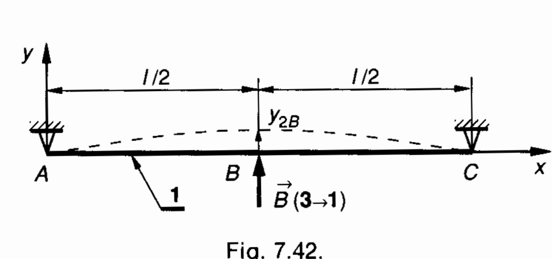


Fig. 7.42.

Ce cas a déja été étudié au *paragaphe 6.6*.

La déformation au milieu B s'exprime par (relation (2) *paragraphe 6.6*) :

$$y_{2B} = \frac{\|\vec{B}(3 \to 1)\| \, l^3}{48 \, EI(G, \vec{z})} . \quad (4)$$

Le principe de superposition des déformations permet d'écrire :

$$y_B = y_{1B} + y_{2B} . \quad (5)$$

Les appuis A, B et C étant de niveau : $y_B = 0$.
D'après (3), (4) et (5) on obtient :

$$- \frac{5 \, pl^4}{384 \, EI(G, \vec{z})} + \frac{\|\vec{B}(3 \to 1)\| \, l^3}{48 \, EI(G, \vec{z})} = 0$$

d'où :

$$\boldsymbol{\|\vec{B}(3 \to 1)\| = \frac{5 \, pl}{8}} . \quad \mathbf{(6)}$$

A partir de (1), (2) et (6) on obtient alors

$$\boldsymbol{\|\vec{A}(2 \to 1)\| = \|\vec{C}(4 \to 1)\| = \frac{3 \, pl}{16}} . \quad \mathbf{(7)}$$

Les actions extérieures étant connues on peut déterminer les équations du moment de flexion. La symétrie par rapport à $(B, \vec{y})$ permet de n'étudier que la zone AB.

Entre A et B : $\quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$,

$$M_{z_f}(x) = \frac{3 \, pl}{16} x - \frac{p}{2} x^2 .$$

La *figure 7.43* donne la variation de $M_{f_z}(x)$ entre A et C.

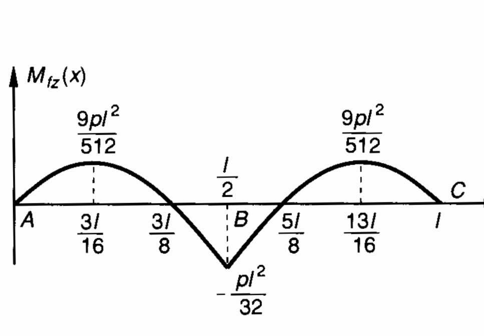


Fig. 7.43.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 On considère *figure 7.44* une poutre **1** de section constante reposant sur deux appuis sans adhérence repérés **2** et **3** et situés respectivement en A et B.

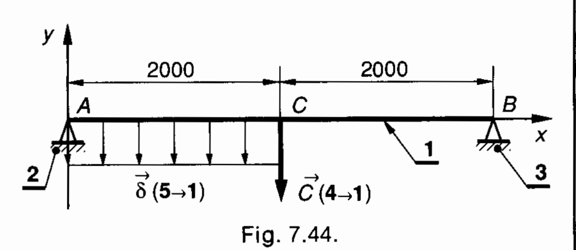


Fig. 7.44.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces qui lui sont appliquées.

Unités : forces en newton, longueur en millimètres.

1 a une section rectangulaire de largeur $b = 30$ mm et de hauteur $h = 60$ mm.
La poutre **1** est soumise aux actions mécaniques extérieures suivantes :

— l'action de $\mathbf{4 \rightarrow 1}$ qui est modélisable en C par :

$$\{\mathcal{T}(4 \rightarrow 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(4 \rightarrow 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que : $\vec{C}(4 \rightarrow 1) = -1\,200\,\vec{y}$;

— l'action de $\mathbf{5 \rightarrow 1}$ qui est assimilée à une charge uniformément répartie entre A et C et modélisable par une densité linéique de force :

$\vec{\delta}(5 \rightarrow 1) = -p\vec{y}$ tel que $p = 0{,}8$ N/mm .

QUESTIONS

1° Déterminer $\vec{A}(2 \rightarrow 1)$ et $\vec{B}(3 \rightarrow 1)$.

2° Déterminer les équations de l'effort tranchant T_y et du moment de flexion M_{f_z} le long de la poutre AB et construire les diagrammes correspondants.
Déterminer la valeur et la position de $|T_y|_{max}$ et de $|M_{f_z}|_{max}$.

3° Déterminer les contraintes $|\sigma_x|_{max}$ et $|\tau_{xy}|_{max}$.

RÉPONSES

1° $\vec{A}(2 \rightarrow 1) = 1\,800\,\vec{y}$; $\vec{B}(3 \rightarrow 1) = 1\,000\,\vec{y}$.

2° $|T_y|_{max} = 1\,800$ N en A ;

$|M_{f_z}|_{max} = 2 \times 10^6$ Nmm en C.

3° $|\sigma_x|_{max} \approx 111$ MPa.

$|\tau_{xy}|_{max} = 1{,}5$ MPa.

2 On considère, *figure 7.45*, une poutre **1** de section constante en liaison encastrement en C avec le bâti **2**.

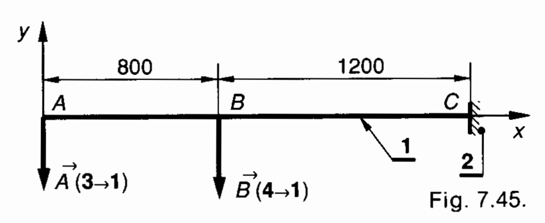


Fig. 7.45.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces qui lui sont appliquées.

Unités : forces en newtons, longueurs en millimètres.

La poutre **1** a une section rectangulaire de largeur $b = 25$ mm et de hauteur $h = 100$ mm.
Cette poutre est soumise aux actions mécaniques extérieures suivantes :

— l'action de $\mathbf{3 \rightarrow 1}$ est modélisable en A par :

$$\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(3 \rightarrow 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que : $\vec{A}(3 \rightarrow 1) = -800\,\vec{y}$;

— l'action de $\mathbf{4 \rightarrow 1}$ est modélisable en B par :

$$\{\mathcal{T}(4 \rightarrow 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(4 \rightarrow 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que : $\vec{B}(4 \rightarrow 1) = -1\,000\,\vec{y}$.

QUESTIONS

1° Déterminer les éléments de réduction en C de $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}$.

2° Déterminer les équations de l'effort tranchant T_y et du moment de flexion M_{f_z} le long de la poutre AC et construire les diagrammes correspondants.
Déterminer la valeur et la position de $|T_y|_{max}$ et de $|M_{f_z}|_{max}$.

3° Déterminer les contraintes $|\sigma_x|_{max}$ et $|\tau_{xy}|_{max}$.

RÉPONSES

1° $\vec{C}(2 \rightarrow 1) = 1\,800\,\vec{y}$;

$\vec{M}_C(2 \rightarrow 1) = -2{,}8 \times 10^6\,\vec{z}$.

2° $|T_y|_{max} = 1\,800$ N entre B et C ;

$|M_{f_z}|_{max} = 2{,}8 \times 10^6$ Nmm en C.

3° $|\sigma_x|_{max} = 67{,}2$ MPa ;

$|\tau_{xy}|_{max} = 1{,}08$ MPa.

3 On considère, *figure 7.46*, une poutre **1** de section constante reposant sur deux appuis sans adhérence repérés **2** et **3** et situés respectivement en A et D.

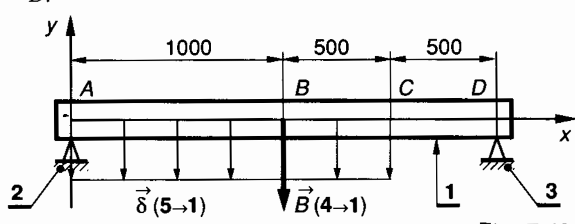


Fig. 7.46.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces qui lui sont appliquées.

Unités : forces en newton, longueurs en millimètres.

La poutre **1** est un profilé à section tubulaire rectangle d'épaisseur $e = 3$ mm, de longueur $b = 50$ mm et de hauteur $h = 125$ mm.
Cette poutre est soumise aux actions mécaniques extérieures suivantes :

— l'action de **4 → 1** est modélisable en B par :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(4 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que : $\vec{B}(4 \to 1) = -2100\,\vec{y}$;

— l'action de **5 → 1** est assimilée à une charge uniformément répartie entre A et C et modélisable par une densité linéique de force :

$\vec{\delta}(5 \to 1) = -p\vec{y}$ avec $p = 1{,}2$ N/mm .

QUESTIONS

1° Déterminer $\vec{A}(2 \to 1)$ et $\vec{D}(3 \to 1)$.
2° Déterminer les équations de l'effort tranchant T_y et du moment de flexion M_{f_z} le long de la poutre AD et construire les diagrammes correspondants.
Déterminer la valeur et la position de $|T_y|_{max}$ et de $|M_{f_z}|_{max}$.

Déterminer les contraintes $|\sigma_x|_{max}$ et $|\tau_{xy}|_{max}$.

RÉPONSES

1° $\vec{A}(2 \to 1) = 2\,175\,\vec{y}$; $\vec{D}(3 \to 1) = 1\,725\,\vec{y}$.
2° $|T_Y|_{max} = 2\,175$ N en A ;

$|M_{f_z}|_{max} = 1\,575 \times 10^3$ Nmm en B.

3° $|\sigma_x|_{max} \approx 50{,}25$ MPa ;

$|\tau_{xy}|_{max} \approx 3{,}65$ MPa.

4 On considère *figure 7.47* une poutre **1** de section constante en liaison encastrement en C avec le bâti **2**.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces qui lui sont appliquées. $(A, \vec{x})$ est porté par la ligne moyenne de la poutre.
Unités : forces en newtons, longueurs en millimètres.

Fig. 7.47.

Cette poutre est un profilé en T dont la section est définie *figure 7.47 ;* elle est soumise aux actions mécaniques extérieures suivantes :

— l'action de **3 → 1** modélisable en A par :

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\vec{A}(3 \to 1) = -500\,\vec{y}$;

— l'action de **4 → 1** modélisable en B par :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(4 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\vec{B}(4 \to 1) = -250\,\vec{y}$.

QUESTIONS

1° Déterminer les éléments de réduction en C de $\{\mathcal{T}(2 \to 1)\}$.

2° Déterminer les équations de l'effort tranchant T_y et du moment de flexion M_{f_z} le long de la poutre AC et construire les diagrammes correspondants.
Déterminer la valeur de la position de $|T_y|_{max}$ et de $|M_{f_z}|_{max}$.

3° Déterminer DG définissant la position du centre de surface G d'une section droite (S) et le moment quadratique $I(G, \vec{z})$ de cette section.

4° Déterminer les contraintes $|\sigma_x|_{max}$ dans la zone tendue, $|\sigma_x|_{max}$ dans la zone comprimée.

5° Déterminer le moment statique W_{Gz} de la partie de la section (S) située en dessous de $(G, \vec{z})$ et calculer au point G où elle est maximale $|\tau_{xy}|_{max}$.

RÉPONSES

1° $\vec{C}(2 \to 1) = 750\,\vec{y}$; $\vec{M}_C(2 \to 1) = -67 \times 10^3\,\vec{z}$.
2° $|T_y|_{max} = 750$ N en C ;

$|M_{f_z}|_{max} = 67 \times 10^3$ N mm en C.

3° $DG = 7{,}9$ mm ;

$I(G, \vec{z}) = 7\,284{,}65$ mm^4.

4° Dans la zone tendue, en D, $|\sigma_x|_{max} = 72{,}66$ MPa.
Dans la zone comprimée, en E, $|\sigma_x|_{max} = 138{,}88$ MPa.
5° $W_{Gz} = -456{,}02$ (mm^3) ;

$|\tau_{xy}|_{max} = 11{,}73$ MPa (en G).

5 On considère, *figure 7.48*, une poutre **1** à section constante reposant sur deux appuis sans adhérence repérés **2** et **3** et situés respectivement en A et B.

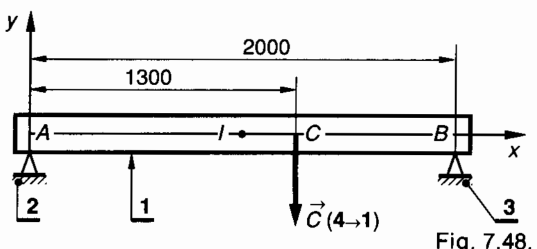


Fig. 7.48.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces qui lui sont appliquées.
Unités : Forces en Newtons, longueurs en millimètres.

La poutre **1** a une section rectangulaire tubulaire de largeur $b = 30$ mm, de hauteur $h = 60$ mm et d'épaisseur $e = 3$ mm, elle est en acier pour lequel $E = 2 \times 10^5$ MPa.
La poutre **1** est soumise à une action mécanique de **4 → 1** modélisable en C par :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(4 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\vec{C}(4 \to 1) = -1\,200\,\vec{y}$.

QUESTIONS

1° Déterminer le moment quadratique $I(G, \vec{z})$ de la section.

2° Déterminer la valeur de y' en A. En déduire l'angle φ_A de la déformée en A.

3° Déterminer la déformation y_I au milieu I de AB.

RÉPONSES

1° $I(G, \vec{z}) = 225\,072$ mm^4.
2° $y'_A = -5{,}46.10^{-3}$; $\varphi_A = -0{,}31$ degré.
3° $y_I = -3{,}9$ mm.

6 On considère, *figure 7.49*, une poutre **1** de section constante reposant sur deux appuis sans adhérence repérés **2** et **3** et situés respectivement en A et B.

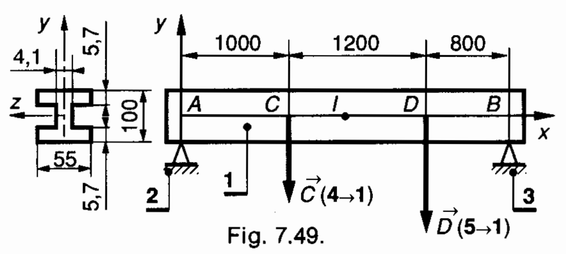


Fig. 7.49.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces qui lui sont appliquées.
Unités : forces en newtons, longueurs en millimètres.

La poutre **1** est constituée par un IPE 100, NF A 45-205 en acier pour lequel $E = 2 \times 10^5$ MPa.
La poutre **1** est soumise aux actions mécaniques extérieures suivantes :

— l'action de **4 → 1** modélisable en C par :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(4 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\vec{C}(4 \to 1) = -2\,000\,\vec{y}$;

— l'action de **5 → 1** modélisable en D par :

$$\{\mathcal{T}(5 \to 1)\} = {}_D\begin{Bmatrix} \vec{D}(5 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\vec{D}(5 \to 1) = -3\,000\,\vec{y}$.

QUESTIONS

1° Déterminer le moment quadratique $I(G, \vec{z})$ de la section.

2° Déterminer la valeur de y' en A. En déduire l'angle φ_A de la déformée en A.

3° Déterminer la déformation y_I au milieu I de AB.

RÉPONSES

1° $I(G, \vec{z}) = 1\,517\,309$ mm^4.
2° $y'_A = -5{,}14 \times 10^{-3}$; $\varphi_A = -0{,}29$ degré.
3° $y_I = -4$ (mm).

7 Un quai de chargement d'un magasin d'atelier est desservi par un palan électrique **3** qui se déplace sur un monorail **1**.
La *figure 7.50* représente le monorail **1** en liaison encastrement avec le mur **2** du bâtiment en B.

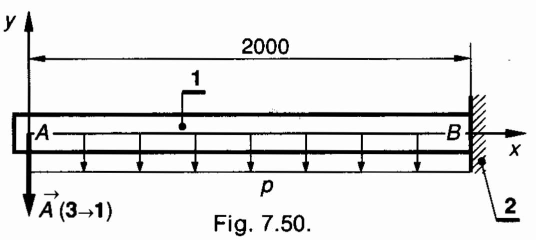


Fig. 7.50.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces qui lui sont appliquées. $(A, \vec{x})$ est porté par la ligne moyenne de la poutre **1**.
Unités : forces en newtons, longueurs en millimètres.

Cette poutre est soumise aux actions mécaniques extérieures suivantes :

— l'action du palan 3 et de sa charge modélisable en A par :

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\vec{A}(3 \to 1) = -10^4\,\vec{y}$;

— l'action de la pesanteur est assimilée à une charge uniformément répartie entre A et B et modélisable par une densité linéique de force :

$$\vec{\delta}(\text{pes} \to 1) = -p\vec{y} \quad \text{avec } p = 0{,}6 \text{ N/mm}.$$

La poutre **1** est constituée par un IPN en acier pour lequel $E = 2 \times 10^5$ MPa, $\sigma_e = 320$ MPa, $\tau_e = 160$ MPa.

Le tableau *figure 7.51,* extrait des normes, donne les caractéristiques des IPN compris entre 220 et 300.
Pour cette construction on adopte un coefficient de sécurité $s = 4$ et on limite la déformation de la poutre **1** à $|y_A| \leqslant \frac{l}{500}$.

Dimensions : E, H mm, B						
	H	220	240	260	280	300
	B	98	106	113	119	125
	E	8,1	8,7	9,4	10,1	10,8
Section (cm²)	S	39,6	46,1	53,4	61,1	69,1
Masse linéique : (kg/m)		31,1	36,2	41,9	48	54,2
Moment quadratique : (cm⁴)	I_{G_z}	3 060	4 250	5 740	7 590	9 800
Module de flexion : (cm³)	$\frac{I_{G_z}}{v}$	278	354	442	542	653

Fig. 7.51.

QUESTIONS

1° Déterminer les éléments de réduction en B de $\{\mathcal{T}(2 \to 1)\}$.

2° Déterminer les équations de l'effort tranchant T_y et du moment de flexion M_{f_z} le long de la poutre AB et construire les diagrammes correspondants.
Déterminer la valeur et la position de $|T_y|_{max}$ et de $|M_{f_z}|_{max}$.

3° A partir de la condition de résistance déterminer la valeur minimale du module de flexion $\frac{I(G, \vec{z})}{v}$.

4° A partir de la condition de déformation déterminer la valeur minimale du moment quadratique $I(G, \vec{z})$.

5° Choisir l'IPN qui convient dans le tableau extrait des normes *figure 7.51,* et préciser la condition qui a conduit à ce choix.

RÉPONSES

1° $\vec{B}(2 \to 1) = 11\,200\,\vec{y}$;

$\vec{M}_B(2 \to 1) = -21{,}2 \times 10^6\,\vec{z}$.

2° $|T_y|_{max} = 11\,200$ N en B ;

$|M_{f_z}|_{max} = 21{,}2 \times 10^6$ N mm en B.

3° $\frac{I(G, \vec{z})}{v} \geqslant 265 \times 10^3\ \text{mm}^3$.

4° $I(G, \vec{z}) \geqslant 3\,482{,}5 \times 10^4\ \text{mm}^4$.

5° IPN 240 pour vérifier la condition de déformation.

8 Un atelier est desservi par un palan électrique **5** qui se déplace sur un monorail **1**.
La *figure 7.52* représente le monorail **1** reposant sur trois appuis doubles sans adhérence repérés **2**, **3** et **4** et situés respectivement en A, B et C.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre et pour les forces qui lui sont appliquées. $(A, \vec{x})$ est

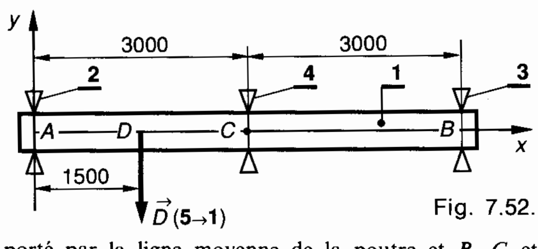


Fig. 7.52.

porté par la ligne moyenne de la poutre et B, C et D sont situés sur $(A, \vec{x})$.
Unités : forces en newtons, longueurs en millimètres.

L'action mécanique sur **1** du palan **5** et de sa charge est modélisable en D par :

$$\{\mathcal{T}(5 \to 1)\} = {}_D\begin{Bmatrix} \vec{D}(5 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\vec{D}(5 \to 1) = -5 \times 10^4\,\vec{y}$.

On néglige le poids de la poutre qui est constituée par un IPN en acier pour lequel $E = 2 \times 10^5$ MPa.
Le tableau *figure 7.51,* extrait des normes, donne les caractéristiques des IPN compris entre 220 et 300.
Pour cette construction on adopte les limites suivantes pour les contraintes et pour la déformation en D :

$$\sigma_p = 90\ \text{MPa}\ ; \quad \tau_p = 45\ \text{MPa}\ ; \quad |y_D| \leqslant \frac{AC}{750}.$$

QUESTIONS

1° En appliquant le principe de superposition et en utilisant les relations sur les déformations données dans le tableau *figure 7.29,* déterminer les actions mécaniques de liaison $\vec{A}(2 \to 1)$, $\vec{B}(3 \to 1)$ et $\vec{C}(4 \to 1)$.

2° Déterminer les équations de l'effort tranchant T_y et du moment de flexion M_{f_z} le long de la poutre AB et construire les diagrammes correspondants.
Déterminer la valeur et la position de $|T_y|_{max}$ et de $|M_{f_z}|_{max}$.

3° A partir de la condition de résistance déterminer la valeur minimale du module de flexion $\frac{I(G, \vec{z})}{v}$.

4° A partir de la condition de déformation limite en D déterminer la valeur minimale du moment quadratique $I(G, \vec{z})$.

5° Dans le tableau extrait des normes *(fig. 7.51),* choisir l'IPN qui convient et préciser la condition déterminante.

RÉPONSES

1 $\vec{A}(2 \to 1) = 20\,312{,}5\,\vec{y}$;

$\vec{B}(3 \to 1) = -4\,687{,}5\,\vec{y}$;

$\vec{C}(4 \to 1) = 34\,375\,\vec{y}$.

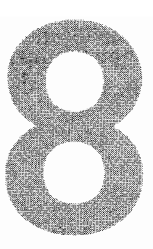
2° $|T_y|_{max} = 29\,687{,}5$ N en D ;

$|M_{f_z}|_{max} = 30\,468{,}75 \times 10^3$ N mm en D.

3° $\frac{I(G, \vec{z})}{v} \geqslant 338{,}541 \times 10^3\ \text{mm}^3$.

4° $I(G, \vec{z}) \geqslant 2\,525 \times 10^4\ \text{mm}^4$.

5° IPN 240 pour vérifier la condition de résistance.



sollicitations composées

Dans les *chapitres 4, 5, 6 et 7* nous avons étudié les contraintes et les déformations dans une poutre soumise à une sollicitation simple telle que l'extension, la compression, le cisaillement simple, la torsion, la flexion plane simple.
Nous avons observé que les conditions théoriques correspondant aux sollicitations simples ne se rencontrent qu'exceptionnellement. Pratiquement on admet qu'une poutre est soumise à une sollicitation simple lorsqu'on peut négliger les autres sollicitations.

1. GÉNÉRALITÉS. PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Si la poutre est soumise à plusieurs sollicitations simples qu'on ne peut pas négliger on se trouve dans le cas de sollicitations composées. Pour étudier les sollicitations composées on utilise le principe de superposition :

Si une poutre est soumise à plusieurs sollicitations simples telles que l'extension, la compression, le cisaillement simple, la torsion ou la flexion plane simple, les vecteurs contraintes et les vecteurs déformations qui en résultent sont respectivement les sommes géométriques des vecteurs contraintes et des vecteurs déformations dus à chaque sollicitation simple agissant séparément et telles que les contraintes maximales résultantes restent inférieures à la limite élastique.

REMARQUE IMPORTANTE

Les contraintes maximales ne se trouvent pas nécessairement dans les sections droites des sollicitations simples correspondantes.

Dans ce chapitre nous étudierons les trois cas de sollicitations composées que l'on rencontre le plus souvent :
flexion plane simple et torsion ;
flexion plane simple et extension (ou compression) ;
flexion déviée.

2. FLEXION ET TORSION

2.1. DÉFINITION

Une poutre de section circulaire constante dont la ligne moyenne est droite et portée par $(A, \vec{x})$ est sollicitée en flexion-torsion lorsque :
— la flexion prise séparément est plane simple ;
— la torsion prise séparément est simple et telle que $|M_t|$ est du même ordre de grandeur que $|M_f|_{maxi}$.

Soit $(A, \vec{x}, \vec{y})$ le plan de la flexion plane simple. Considérons une section droite (S). Les éléments de réduction en G, centre de surface de (S), du torseur des forces de cohésion :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}$$

ont pour composantes dans $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ *(fig. 8.1)* :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

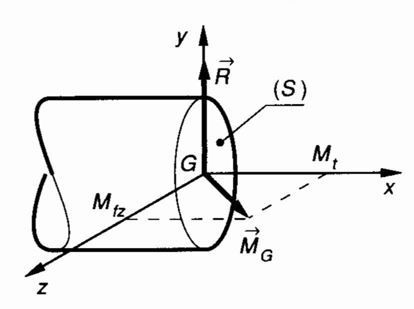


Fig. 8.1.

2.2. ANALYSE DES CONTRAINTES

Dans le but ultérieurement d'appliquer le principe de superposition, nous allons définir toutes les contraintes dues à T_y, M_{f_z}, M_t.

2.2.1. Contrainte tangentielle de flexion

Nous avons vu au *chapitre 7, paragraphe 5.3*, relation (15), qu'en un point M de (S) d'ordonnée Y *(fig. 8.2)* :

$$\boxed{\tau_{xy} = -\frac{T_y\, W_{Gz}}{b\, I(G, \vec{z})}} \quad \text{avec} \quad \boxed{W_{Gz} = \sum_v^Y y\, \Delta S}.$$

Dans une section circulaire de diamètre d, on sait que cette contrainte est nulle pour $Y = \pm \frac{d}{2}$ et qu'elle est maximale pour $Y = 0$ *(fig. 8.2)*.

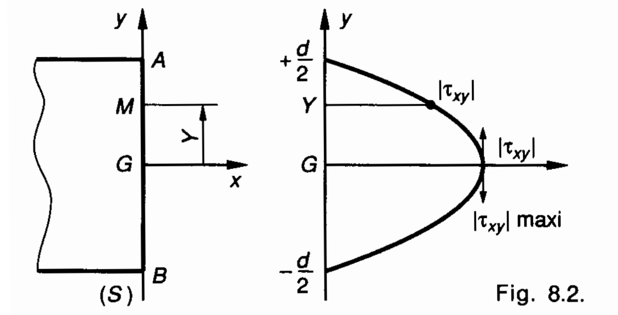


Fig. 8.2.

En général $|\tau_{xy}|_{max}$ est faible comparée aux deux autres contraintes que nous allons rencontrer. En A et B, là où les deux autres contraintes sont maximales $\tau_{xy} = 0$. Nous négligerons donc cette contrainte.

2.2.2. Contrainte normale de flexion

Nous avons vu au *chapitre 7, paragraphe 5.2.2*, relation (12), qu'en un point M de (S) de coordonnées $M(y, z)$:

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_{f_z}}{I(G, \vec{z})}\, y}.$$

Cette contrainte est à calculer dans la section droite (S) pour laquelle $|M_{f_z}|$ est maximal.

$|\sigma_x|$ est donc maximale pour :

$$|M_{f_z}|_{max} \quad \text{et} \quad |y|_{max} = v\,.$$

La *figure 8.3* représente la répartition de la contrainte σ_x dans le plan de section droite (S) pour lequel $|M_{f_z}|$ est maximal. La section est un cercle de diamètre d.

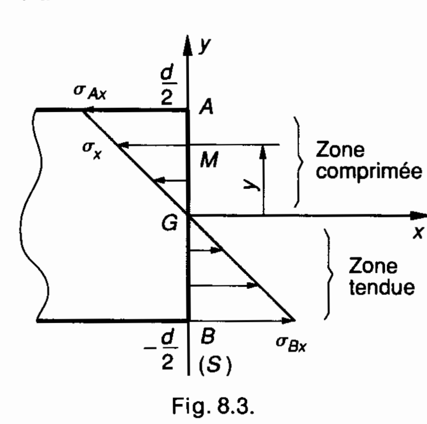


Fig. 8.3.

Les valeurs maximales de $|\sigma_x|$ sont obtenues en A et B d'ordonnées $\frac{d}{2}$ et $-\frac{d}{2}$.

$$\sigma_{Ax} = -\frac{M_{f_z}}{I(G, \vec{z})} \times \frac{d}{2},$$

$$\sigma_{Bx} = \frac{M_{f_z}}{I(G, \vec{z})} \times \frac{d}{2}.$$

2.2.3. Contrainte tangentielle de torsion simple

On considère une section droite (S) de centre de surface G et un point M de (S) situé à la distance ρ de G *(fig. 8.4)*. On note $(G, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère direct tel que :

$$\overrightarrow{GM} = \rho\, \vec{y}_1\,.$$

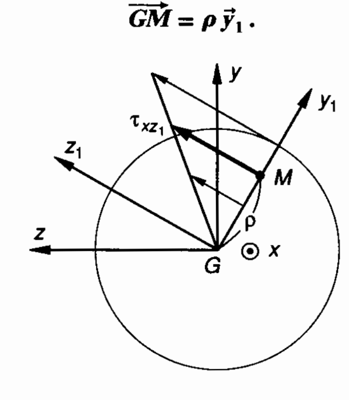


Fig. 8.4.

Nous avons vu au *chapitre 6, paragraphe 5.1* que la contrainte tangentielle de torsion au point M s'exprime par :

$$\boxed{\tau_{xz_1} = \frac{M_t}{I_G}\,\rho}$$

Cette contrainte est à calculer dans la section droite (S) pour laquelle $|M_t|$ est maximal.
$|\tau_{xz_1}|$ est donc maximal pour :

$$|M_t|_{\max} \quad \text{et} \quad \rho_{\max} = \frac{d}{2}.$$

2.2.4. Zones à contraintes maximales

Si on néglige la contrainte tangentielle τ_{xy} due à l'effort tranchant T_y, l'analyse des contraintes montre que les contraintes normales σ_x sont maximales en A et B sur l'axe $(G, \vec{y})$ de la section droite (S), pour laquelle $|M_{f_z}|$ est maximal. D'autre part, les contraintes tangentielles de torsion τ_{xz_1} sont maximales pour tous les points tels que $\rho = \dfrac{d}{2}$ et donc en A et B.
Nous ferons l'étude des contraintes en A et B.

2.3. ÉTUDE DES CONTRAINTES MAXIMALES

Si on considère en A un plan de section de la poutre perpendiculaire à $\vec{y}$ *(fig. 8.5)*, la contrainte normale σ_{Ay} due à la flexion et à la torsion est nulle. Cette situation correspond à un état plan de contrainte en A dans le plan $(A, \vec{z}, \vec{x})$.

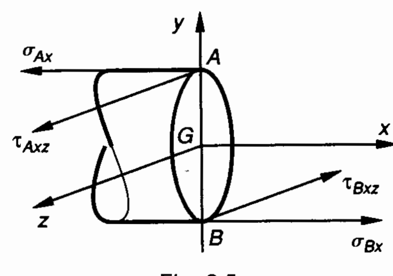


Fig. 8.5.

Considérons un élément de poutre en A compris entre deux sections très voisines normales à $\vec{y}$ et les trois facettes suivantes *(fig. 8.6)* :

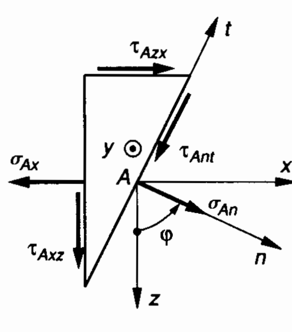


Fig. 8.6.

— la facette de normale $(A, \vec{x})$ est un plan de section droite pour lequel :

$$\vec{C}(A, \vec{x}) \begin{cases} \sigma_{Ax} = -\dfrac{M_{f_z}}{I(G, \vec{z})} \times \dfrac{d}{2} & \text{(due à la flexion)} \\ \tau_{Axz} = \dfrac{M_t}{I_G} \times \dfrac{d}{2} & \text{(due à la torsion)} \end{cases}$$

— la facette de normale $(A, \vec{z})$ est dans le plan de section longitudinal, qui est également plan de symétrie pour les forces extérieures appliquées en flexion et pour lequel :

$$\vec{C}(A, \vec{z}) \begin{cases} \sigma_{Az} = 0 \\ \tau_{Azx} = \tau_{Axz} & \text{(théorème de Cauchy, } \textit{chapitre } 3, \textit{paragraphe } 3.5) \end{cases}$$

— la facette de normale $(A, \vec{n})$ dans l'état plan $(A, \vec{z}, \vec{x})$ est telle que :

$$(\vec{z}, \vec{n}) = \varphi .$$

La relation (3) du *paragraphe 4.2* du *chapitre 3* permet d'écrire en A dans l'état plan $(A, \vec{z}, \vec{x})$ avec $\sigma_{Az} = 0$:

$$\vec{C}(A, \vec{n}) \begin{cases} \sigma_{An} = \dfrac{1}{2}\sigma_{Ax}(1 - \cos 2\varphi) + \tau_{Azx}\sin 2\varphi \\ \tau_{Ant} = \dfrac{1}{2}\sigma_{Ax}\sin 2\varphi + \tau_{Azx}\cos 2\varphi . \end{cases} \quad (1)$$

2.3.1. Contrainte normale maximale

Soient $\vec{Z}$ et $\vec{X}$ les directions principales dans le plan $(A, \vec{z}, \vec{x})$ des contraintes normales σ au point A. On note :

$$(\vec{z}, \vec{Z}) = (\vec{x}, \vec{X}) = \varphi .$$

La relation (4) du *paragraphe 4.2* du *chapitre 3* permet d'écrire avec $\sigma_{Az} = 0$:

$$\tan 2\varphi = \frac{-2\,\tau_{Azx}}{\sigma_{Ax}}. \quad (2)$$

Les relations (5) du *paragraphe 4.2* du *chapitre 3* permettent de déterminer les contraintes normales principales σ_{AZ} et σ_{AX} au point A. Avec $\sigma_{Az} = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{AZ} &= \frac{1}{2}\sigma_{Ax} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{Ax}^2 + 4\,\tau_{Azx}^2} \\ \sigma_{AX} &= \frac{1}{2}\sigma_{Ax} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{Ax}^2 + 4\,\tau_{Azx}^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

La construction graphique de Möhr *(fig. 8.7)* permet de déterminer rapidement les directions principales Z et X et les valeurs de σ_{AZ} et σ_{AX}.

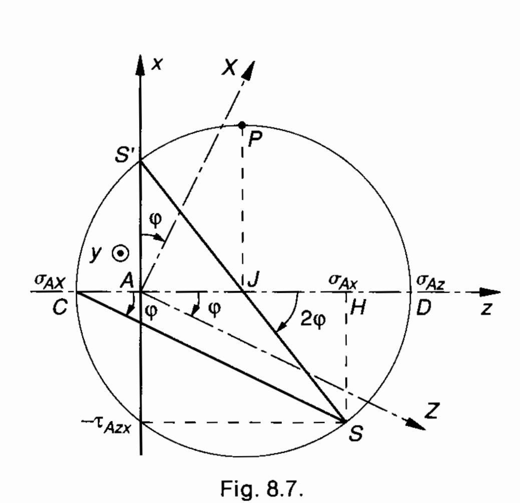


Fig. 8.7.

Dans le repère direct $(A, \vec{z}, \vec{x})$, sur l'axe $(A, \vec{z})$ on porte *(fig. 8.7)* :

$$\overline{AH} = \sigma_{Ax}\,\vec{z}$$
$$\overline{HS} = -\tau_{Azx}\,\vec{x}\,.$$

Soit J le milieu de AH.
Le cercle de Möhr des contraintes au point A est le cercle de centre J et de rayon $R = JS$. Ce cercle coupe $(A, \vec{z})$ en C et D ; on note C le point proche de A et D le point proche de H.
Sur le cercle de Möhr on observe que :

$$\tan(\overrightarrow{JH}, \overrightarrow{JS}) = \frac{\overline{HS}}{\overline{JH}} = \frac{-\tau_{Azx}}{\frac{\sigma_{Ax}}{2}}\,.$$

D'après la relation (2), on peut écrire :

$$\tan(\overrightarrow{JH}, \overrightarrow{JS}) = \tan 2\varphi$$

d'où $$\boxed{(\overrightarrow{JH}, \overrightarrow{JS}) = 2\varphi}\,.$$

Dans le cas de la *figure 8.7* qui correspond à $\sigma_{Ax} > 0$ et $\tau_{Azx} > 0$ on note que :

$$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CS}) = \varphi\,.$$

On trace $(A, \vec{Z})$ et $(A, \vec{X})$ tels que :

$$(\vec{z}, \vec{Z}) = (\vec{x}, \vec{X}) = \varphi\,.$$

La *figure 8.8* correspond au cas où $\sigma_{Ax} < 0$ et $\tau_{Azx} < 0$. Ce cas correspond à l'état de contrainte au point B opposé du point A *(fig. 8.5)*.

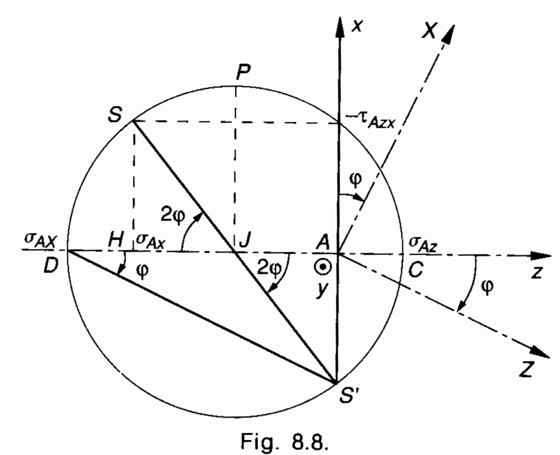


Fig. 8.8.

En effet, en B : $\sigma_{Bx} = -\sigma_{Ax}$

$$\tau_{Bzx} = -\tau_{Azx}\,.$$

La relation (2) du *paragraphe 2.3.1* montre que les directions principales en A et B sont identiques. Dans le cas de la *figure 8.8* on note que :

$$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DS'}) = \varphi\,.$$

On trace $(A, \vec{Z})$ et $(A, \vec{X})$ tels que :

$$(\vec{z}, \vec{Z}) = (\vec{x}, \vec{X}) = \varphi\,.$$

L'axe $(A, \vec{z})$ représente les variations de la contrainte normale σ_A au point A. Sur le cercle de Möhr *figure 8.7* ou *figure 8.8* on observe que $|\sigma_A|$ est maximale en D défini par :

$$\overline{AD} = \overline{AJ} + \overline{JD}$$
$$\overline{AJ} = \frac{1}{2}\overline{AH} = \frac{1}{2}\sigma_{Ax}\,;$$
$$JD = R = JS$$
$$JS^2 = \tau^2_{Azx} + \frac{1}{4}\sigma^2_{Ax} = \frac{1}{4}(\sigma^2_{Ax} + 4\tau^2_{Azx})$$
$$JD = R = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2_{Ax} + 4\tau^2_{Azx}}\,.$$

- Dans le cas où $\sigma_{Ax} > 0$, la *figure 8.7* montre que :

$$\overline{JD} = +R \quad \text{d'où,}$$
$$\overline{AD} = \overline{AJ} + \overline{JD} = \frac{1}{2}\sigma_{Ax} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2_{Ax} + 4\tau^2_{Azx}}.$$

D'après les relations (3) *paragraphe 2.3* on sait que :

$$\sigma_{AZ} = \frac{1}{2}\sigma_{Ax} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2_{Ax} + 4\tau^2_{Azx}}$$

donc $\overline{AD} = \sigma_{AZ}$ et $\sigma_{AZ} > 0$.

On en déduit que :

$$\boldsymbol{|\sigma_A|_{\max} = |\overline{AD}| = \frac{1}{2}\sigma_{Ax} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2_{Ax} + 4\tau^2_{Azx}}}\,.$$

• Dans le cas où $\sigma_{Ax} < 0$, la *figure 8.8* montre que :

$$\overline{JD} = -R$$

d'où, $\overline{AD} = \overline{AJ} + \overline{JD} = \frac{1}{2}\sigma_{Ax} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{Ax}^2 + 4\tau_{Azx}^2}$.

D'après les relations (3) *paragraphe 2.3* on sait que :

$$\sigma_{AX} = \frac{1}{2}\sigma_{Ax} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{Ax}^2 + 4\tau_{Azx}^2}$$

donc $\overline{AD} = \sigma_{AX}$ et $\sigma_{AX} < 0$.

On en déduit que (puisque $\sigma_{Ax} < 0$) :

$$|\boldsymbol{\sigma}_A|_{\max} = |\overline{AD}| = \frac{1}{2}|\boldsymbol{\sigma}_{Ax}| + \frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{Ax}^2 + 4\boldsymbol{\tau}_{Azx}^2}.$$

On retrouve donc la même valeur de $|\sigma_A|_{\max}$ pour $\sigma_{Ax} > 0$ *(fig. 8.7)* et pour $\sigma_{Ax} < 0$ *(fig. 8.8)* qui correspond nous l'avons vu à l'état de contrainte en B, d'où :

$$|\sigma_A|_{\max} = |\sigma_B|_{\max}.$$

Dans la zone tendue ou dans la zone comprimée on peut donc écrire :

$$\boxed{|\boldsymbol{\sigma}|_{\max} = \frac{1}{2}\left[|\boldsymbol{\sigma}_{Ax}| + \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{Ax}^2 + 4\boldsymbol{\tau}_{Azx}^2}\right]} \quad (4)$$

2.3.2. Contrainte tangentielle maximale

Méthode graphique

Sur le cercle de Möhr *figure 8.7* ou *figure 8.8* on observe que la contrainte tangentielle maximale est telle que :

$$|\tau_{Azx}|_{\max} = JP = R$$

d'où :

$$|\boldsymbol{\tau}_{Azx}|_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{Ax}^2 + 4\boldsymbol{\tau}_{Azx}^2}.$$

Méthode algébrique

Si nous nous référons aux relations (1) ci-dessus, nous observons que les extrémums des fonctions σ_{An} et τ_{Ant} ne sont pas obtenus pour les mêmes valeurs de φ. En effet :

- $\frac{d\sigma_{An}}{d\varphi} = 0$ est obtenu pour $\tan 2\varphi_1 = \frac{-2\tau_{Azx}}{\sigma_{Ax}}$;
- $\frac{d\tau_{Ant}}{d\varphi} = 0$ est obtenu pour $\tan 2\varphi_2 = \frac{\sigma_{Ax}}{2\tau_{Azx}}$.

D'autre part, on peut observer que

$$\tan 2\varphi_1 \times \tan 2\varphi_2 = -1$$

et donc que $|2\varphi_1 - 2\varphi_2| = \frac{\pi}{2}$

ou $|\varphi_1 - \varphi_2| = \frac{\pi}{4}$.

Nous avons rencontré cette particularité du maximum de la contrainte tangentielle au *chapitre 3, paragraphe 4.2.2*. Exprimons $|\tau_{Ant}|_{\max}$; pour cela on peut écrire que :

$$\cos^2 2\varphi = \frac{1}{1 + \tan^2 2\varphi} = \frac{4\tau_{Azx}^2}{\sigma_{Ax}^2 + 4\tau_{Azx}^2}$$

$$\sin^2 2\varphi = \frac{\tan^2 2\varphi}{1 + \tan^2 2\varphi} = \frac{\sigma_{Ax}^2}{\sigma_{Ax}^2 + 4\tau_{Azx}^2}.$$

En remplaçant $\sin 2\varphi$ et $\cos 2\varphi$ par leur valeur dans la relation (1) on peut écrire :

$$|\tau_{Ant}|_{\max} = \frac{\sigma_{Ax}^2}{2\sqrt{\sigma_{Ax}^2 + 4\tau_{Azx}^2}} + \frac{4\tau_{Azx}^2}{2\sqrt{\sigma_{Ax}^2 + 4\tau_{Azx}^2}}$$

$$|\tau_{Ant}|_{\max} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma_{Ax}^2 + 4\tau_{Azx}^2}{\sqrt{\sigma_{Ax}^2 + 4\tau_{Azx}^2}}$$

$$|\boldsymbol{\tau}_{Ant}|_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{Ax}^2 + 4\boldsymbol{\tau}_{Azx}^2}.$$

On en déduit que la contrainte tangentielle maximale en A ou en B a pour expression :

$$\boxed{|\boldsymbol{\tau}|_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{Ax}^2 + 4\boldsymbol{\tau}_{Azx}^2}} \quad \textbf{(5)}$$

2.4. DÉFINITION DES MOMENTS IDÉAUX DE FLEXION ET DE TORSION

2.4.1. Moment idéal de flexion

On a vu que la contrainte normale maximale a pour expression (relation (4) *paragraphe 2.3.1*) :

$$|\sigma|_{\max} = \frac{1}{2}\left[|\sigma_{Ax}| + \sqrt{\sigma_{Ax}^2 + 4\tau_{Azx}^2}\right].$$

En fonction de M_{f_z} et de M_t on obtient :

$$|\sigma|_{\max} =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{|M_{f_z}|}{I(G, \vec{z})} \times |R| + \sqrt{\frac{M_{f_z}^2}{I(G, \vec{z})^2}R^2 + 4\frac{M_t^2}{I_G^2}R^2}\right]$$

or pour une section circulaire : $I_G = 2\,I(G, \vec{z})$

d'où :

$$|\sigma|_{max} = \frac{1}{2}\left[|M_{f_z}| + \sqrt{M_{f_z}^2 + M_t^2}\right] \times \frac{|R|}{I(G, \vec{z})}.$$

On note :

$$\boxed{M_{if} = \frac{1}{2}\left[|M_{f_z}| + \sqrt{M_{f_z}^2 + M_t^2}\right]}. \quad (6)$$

On obtient alors :

$$\boxed{|\sigma|_{max} = \frac{M_{if}}{I(G, \vec{z})} \times |R|}. \quad (7)$$

Cette relation correspond à l'expression de la contrainte normale maximale en flexion plane simple, dans laquelle M_{f_z} est remplacé par M_{if}.

Définition

$$M_{if} = \frac{1}{2}\left[|M_{f_z}| + \sqrt{M_{f_z}^2 + M_t^2}\right]$$
est appelé moment idéal de flexion.

2.4.2. Moment idéal de torsion

On a vu que la contrainte tangentielle maximale a pour expression (relation (5) *paragraphe 2.3.2*) :

$$|\tau|_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{Ax}^2 + 4\,\tau_{Azx}^2}.$$

En fonction de M_{f_z} et de M_t on obtient :

$$|\tau|_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_{f_z}^2}{I(G, \vec{z})^2}R^2 + 4\frac{M_t^2}{I_G^2}R^2}$$

$I_G = 2\,I(G, \vec{z})$ d'où :

$$|\tau|_{max} = \sqrt{M_{f_z}^2 + M_t^2} \times \frac{|R|}{I_G}.$$

On note :

$$\boxed{M_{it} = \sqrt{M_{f_z}^2 + M_t^2}}. \quad (8)$$

On obtient alors :

$$\boxed{|\tau|_{max} = \frac{M_{it}}{I_G} \times |R|}. \quad (9)$$

Cette relation correspond à l'expression de la contrainte tangentielle maximale en torsion simple, dans laquelle M_t est remplacé par M_{it}.

Définition

$$M_{it} = \sqrt{M_{f_z}^2 + M_t^2}$$
est appelé moment idéal de torsion.

2.5. CONDITION DE RÉSISTANCE

2.5.1. Condition limite pour les contraintes normales

On note : $\sigma_p = \frac{\sigma_e}{s}$

avec :

σ_e : contrainte normale limite élastique ;
s : coefficient de sécurité ;
σ_p : contrainte normale limite pratique.

La condition limite pour les contraintes normales s'écrit alors :

$$|\sigma|_{max} \leq \sigma_p.$$

La relation (7) *paragraphe 2.4.1* permet d'écrire

$$\frac{M_{if}}{I(G, \vec{z})} \times |R| \leq \sigma_p$$

d'où :

$$\boxed{\frac{I(G, \vec{z})}{|R|} \geq \frac{M_{if}}{\sigma_p}} \quad (10)$$

2.5.2. Condition limite pour les contraintes tangentielles

On note : $\tau_p = \frac{\tau_e}{s}$

avec

τ_e : contrainte tangentielle limite élastique ;
s : coefficient de sécurité ;
τ_p : contrainte tangentielle limite pratique.

La condition limite pour les contraintes tangentielles s'écrit alors :

$$|\tau|_{max} \leq \tau_p.$$

La relation (9) *paragraphe 2.4.2* permet d'écrire

$$\frac{M_{it}}{I_G} \times |R| \leq \tau_p$$

d'où

$$\boxed{\frac{I_G}{|R|} \geq \frac{M_{it}}{\tau_p}}. \quad (11)$$

2.5.3. Condition de résistance

La condition de résistance est la condition (10) ou la condition (11) la plus contraignante, c'est-à-dire celle qui conduit à adopter l'arbre de diamètre maximal.

2.6. APPLICATION

La *figure 8.9* représente la modélisation d'un arbre cylindrique de révolution **1**. Cet arbre est guidé en rotation dans les paliers **2** et **3** et il permet de transmettre un couple entre les roues à denture droite **4** et **5**. Le repère $\mathcal{R} = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est tel que $(A, \vec{x})$ est porté par la ligne moyenne de l'arbre **1**.

Unités : les longueurs en millimètres, les forces en newtons.

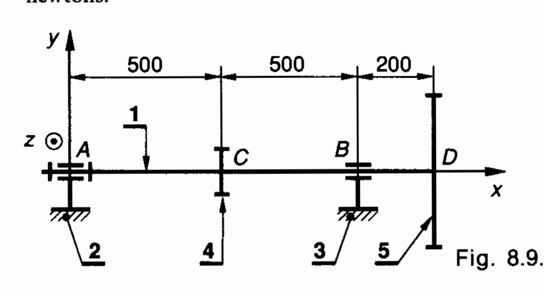


Fig. 8.9.

— L'action mécanique de la roue **4** sur l'arbre **1** est modélisable en C par :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(4 \to 1) \\ \vec{M}_C(4 \to 1) \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{C}(4 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ 4\,000 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{M}_C(4 \to 1)\begin{vmatrix} 36 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

— L'action mécanique de la roue **5** sur l'arbre **1** est modélisable en D par :

$$\{\mathcal{T}(5 \to 1)\} = {}_D\begin{Bmatrix} \vec{D}(5 \to 1) \\ \vec{M}_D(5 \to 1) \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{D}(5 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ -1\,200 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{M}_D(5 \to 1)\begin{vmatrix} -36 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

— La liaison **2-1** est une liaison pivot courte d'axe $(A, \vec{x})$ admettant un léger rotulage. L'action mécanique de **2** sur **1** est modélisable en A par :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{A}(2 \to 1)\begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix} \qquad \vec{M}_A(2 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ 0. \\ 0 \end{vmatrix}$$

— La liaison **3-1** est une liaison pivot glissant courte d'axe $(B, \vec{x})$ admettant un léger rotulage. L'action mécanique de **3** sur **1** est modélisable en B par :

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{B}(3 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ Y_B \\ Z_B \end{vmatrix} \qquad \vec{M}_B(3 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ 0. \\ 0 \end{vmatrix}$$

Cet arbre est en acier XC18 pour lequel :

$$\sigma_e = 260 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \tau_e = 130 \text{ Mpa}.$$

On adopte pour cette construction un coefficient de sécurité $s = 2{,}6$.

QUESTION 1

Déterminer les actions mécaniques en A et B.

RÉPONSE

L'étude de l'équilibre de l'arbre **1** permet d'établir sans difficulté que :

$$X_A = 0\,; \quad Y_A = -2\,240\,; \quad Z_A = 0\,;$$
$$Y_B = -560\,; \quad Z_B = 0\,.$$

QUESTION 2

Déterminer les équations de l'effort tranchant T_y, du moment de flexion M_{f_z} et du moment de torsion M_t le long de l'arbre $ABCD$ et construire les diagrammes correspondants. En déduire la valeur de $|T_y|_{max}$, de $|M_{f_z}|_{max}$, de $|M_t|_{max}$ et la position des sections droites correspondantes.

RÉPONSE

— Entre A et C : $0 \leq x < 500$

$$\begin{vmatrix} T_y = 2\,240 \\ M_{f_z} = -2\,240\,x \\ M_t = 0\,. \end{vmatrix}$$

En A : $x = 0$; $M_{f_z} = 0$
en C : $x = 500$; $M_{f_z} = -112 \times 10^4$.

— Entre C et B : $500 \leq x < 1\,000$.

$$\begin{vmatrix} T_y = 2\,240 - 4\,000 = -1\,760\,; \\ M_{f_z} = 1\,760\,x - 2 \times 10^6\,; \\ M_t = -36 \times 10^4. \end{vmatrix}$$

En B : $x = 1\,000$; $M_{f_z} = -24 \times 10^4$.

— Entre B et D : $1\,000 \leq x < 1\,200$.

$$\begin{vmatrix} T_y = -1\,200\,; \\ M_{f_z} = 1\,200\,x - 144 \times 10^4\,; \\ M_t = -36 \times 10^4. \end{vmatrix}$$

En D : $x = 1\,200$; $M_{f_z} = 0$.

La *figure 8.10* représente les diagrammes de T_y, M_{f_z} et M_t le long de la poutre AD. Sur ces diagrammes on observe que :

$$|T_y|_{max} = 2\,240 \quad \text{entre } A \text{ et } C$$
$$|M_{f_z}|_{max} = 112 \times 10^4 \quad \text{en } C$$
$$|M_t|_{max} = 36 \times 10^4 \quad \text{entre } C \text{ et } D.$$

La section la plus sollicitée est donc située en C.

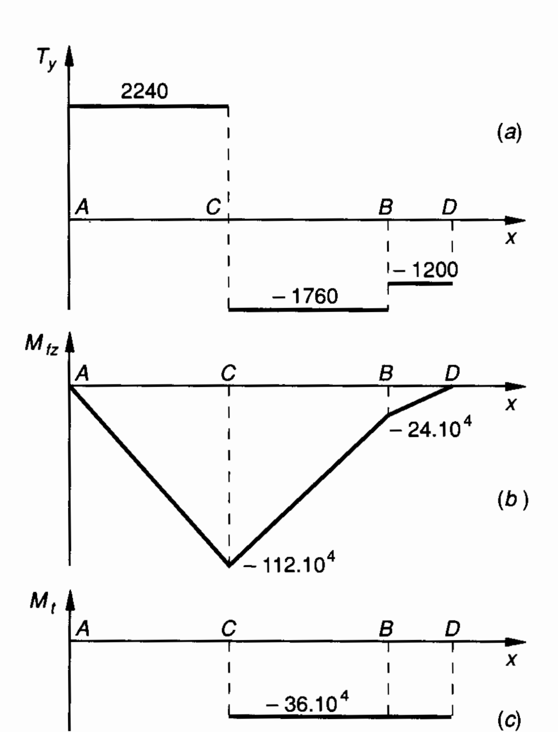


Fig. 8.10.

QUESTION 3

Dans la section la plus sollicitée, déterminer le diamètre minimal de l'arbre pour que la condition limite relative aux contraintes normales soit vérifiée.

RÉPONSE

La condition limite pour les contraintes normales (relation (10) *paragraphe 2.5.1*) s'écrit :

$$\frac{I(G, \vec{z})}{|R|} \geqslant \frac{M_{if}}{\sigma_p}.$$

La relation (6) *paragraphe 2.4.1* s'écrit

$$M_{if} = \frac{1}{2}\left[|M_{f_z}| + \sqrt{M_{f_z}^2 + M_t^2}\right].$$

D'autre part :

$$\frac{I(G, \vec{z})}{|R|} = \frac{\pi d^3}{32} \quad \text{et} \quad \sigma_p = \frac{\sigma_e}{s}$$

d'où $$d^3 \geqslant \frac{16\,s}{\pi \sigma_e}\left[|M_{f_z}| + \sqrt{M_{f_z}^2 + M_t^2}\right].$$

Dans la section C on peut écrire :

$$d^3 \geqslant \frac{16 \times 2{,}6}{\pi \times 260}\left[112 \times 10^4 + 10^4\sqrt{112^2 + 36^2}\right]$$

d'où $\boldsymbol{d \geqslant 49}$ **mm .**

QUESTION 4

Dans la section la plus sollicitée, déterminer le diamètre minimal de l'arbre pour que la condition limite relative aux contraintes tangentielles soit vérifiée. Compte tenu de la question 3 en déduire le diamètre minimal de l'arbre 1 pour que celui-ci résiste en toute sécurité aux sollicitations qui lui sont appliquées.

RÉPONSE

La condition limite pour les contraintes tangentielles (relation (11) *paragraphe 2.5.2*) s'écrit :

$$\frac{I_G}{|R|} \geqslant \frac{M_{it}}{\tau_p}.$$

La relation (8) *paragraphe 2.4.2* s'écrit

$$M_{it} = \sqrt{M_{f_z}^2 + M_t^2}.$$

D'autre part :

$$\frac{I_G}{|R|} = \frac{\pi d^3}{16} \quad \text{et} \quad \tau_p = \frac{\tau_e}{s}$$

d'où $$d^3 \geqslant \frac{16\,s}{\pi \tau_e}\sqrt{M_{f_z}^2 + M_t^2}.$$

Dans la section C on peut écrire :

$$d^3 \geqslant \frac{16 \times 2{,}6 \times 10^4}{\pi \times 130}\sqrt{112^2 + 36^2}$$

d'où $\boldsymbol{d \geqslant 49{,}2}$ **mm .**

Compte tenu de la question 3 la condition de résistance de l'arbre **1** est donc :

$$\boldsymbol{d_{mini} \geqslant 49{,}2 \text{ mm.}}$$

3. FLEXION PLANE SIMPLE ET EXTENSION OU COMPRESSION

3.1. ÉTUDE DE LA RÉPARTITION DES CONTRAINTES NORMALES

Soit une poutre **1** telle que si l'on considère une section droite (S) de centre de surface G et de normale extérieure $\vec{x}$, le plan $(G, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre et pour les forces qui lui sont appliquées.

La réduction en G du torseur des forces de cohésion

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \vec{M}_G\end{Bmatrix}$$

a donc les composantes suivantes dans le repère $G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de définition des sollicitations *(fig. 8.11)* :

$$\vec{R}\left|\begin{array}{l}N \neq 0\\ T_y \neq 0\\ T_z = 0\end{array}\right. ; \qquad \vec{M}_G\left|\begin{array}{l}M_t = 0\\ M_{f_y} = 0\\ M_{f_z} \neq 0\end{array}\right. .$$

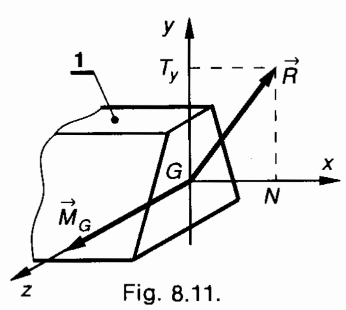


Fig. 8.11.

La composante $N \neq 0$ provoque une sollicitation d'extension si $N > 0$, ou de compression si $N < 0$. Nous avons vu dans le *chapitre 4* que chacune de ces sollicitations fait intervenir des contraintes normales $\vec{\sigma}_1$ uniformément réparties dans la section droite (S) et telles que *(fig. 8.12 a)* :

$$\sigma_1 = \frac{N}{S}.$$

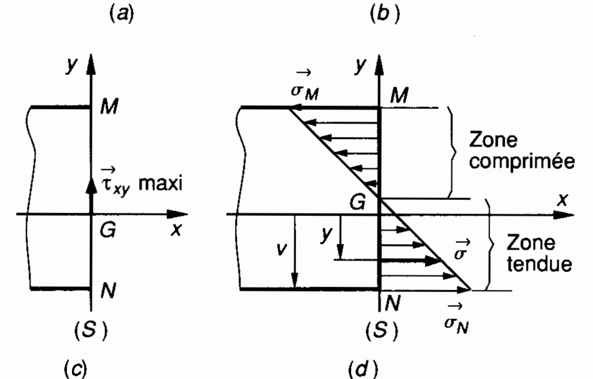


Fig. 8.12.

La composante $M_{f_z} \neq 0$ provoque une sollicitation de flexion plane simple. Nous avons vu dans le *chapitre 7* que cette sollicitation fait intervenir des contraintes normales $\vec{\sigma}_2$ dont la norme est proportionnelle à l'ordonnée y du point considéré et telles que *(fig. 8.12 b)* :

$$\sigma_2 = -\frac{M_{f_z}}{I(G, \vec{z})}\,y.$$

La composante $T_y \neq 0$ provoque dans la section droite (S) une contrainte tangentielle τ_{xy} dont la valeur en un point M s'exprime par la relation (15) du § 5.3 du *chapitre 7* :

$$\tau_{xy} = \tau_M = -\frac{T_y W_{Gz}}{bI(G, \vec{z})}.$$

Dans le *chapitre 7* nous avons vu que τ_{xy} est nul pour les points tels que M et N *(fig. 8.12 c)* les plus éloignés du plan $(G, \vec{z}, \vec{x})$ et que τ_{xy} est maximal pour les points situés sur $(G, \vec{z})$. Si on considère le plan de section droite (S), l'application du principe de superposition pour les contraintes normales σ_x montre que *(fig. 8.12 d)* σ_x est maximal respectivement en M et N dans la zone comprimée ou dans la zone tendue. On note ces valeurs de σ_x en M et N : σ_{Mx} et σ_{Nx}. Nous venons de voir qu'en M et N, $\tau_{xy} = 0$ donc σ_{Mx} et σ_{Nx} sont les contraintes principales en M et N.

Dans le cas de la *figure 8.12 d* :

- dans la zone comprimée, au point M :

$$\sigma_{Mx} = \sigma_{1M} + \sigma_{2M}$$
$$\tau_{Mxy} = 0$$

d'où :
$$|\sigma|_{max} = \left|\frac{N}{S} - \frac{M_{f_z}}{I(G, \vec{z})}\,y_M\right| \qquad (1)$$

- dans la zone tendue, en N :

$$\sigma_{Nx} = \sigma_{1N} + \sigma_{2N}$$
$$\tau_{Nxy} = 0$$

d'où :
$$|\sigma|_{max} = \left|\frac{N}{S} - \frac{M_{f_z}}{I(G, \vec{z})}\,y_N\right|. \qquad (2)$$

Entre M et N, τ_{xy} varie et sa valeur maximale reste faible comparée à $\sigma_{x\,max}$, on peut donc négliger τ_{xy} dans le calcul de la contrainte normale principale σ (voir relation (4) *paragraphe 2.3.1*). Il en résulte que la répartition des contraintes normales σ entre M et N est déterminée avec une bonne approximation à partir de la relation de superposition des contraintes normales σ_x dans le plan de section droite (S) *(fig. 8.12 d)*

$$\sigma_x = \sigma_1 + \sigma_2$$

soit :
$$\sigma_x = \frac{N}{S} - \frac{M_{f_z}}{I(G, \vec{z})}\,y. \qquad (3)$$

Cette relation (3) permet de déterminer l'ordonnée y de la fibre neutre pour laquelle $\sigma_x = 0$.

3.2. APPLICATION

La *figure 8.13* représente une poutre **1** en liaison encastrement en B avec le support **2**.

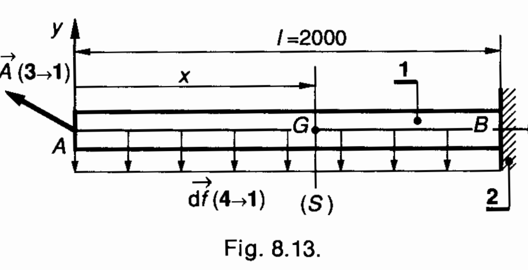


Fig. 8.13.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces qui lui sont appliquées. $(A, \vec{x})$ est porté par la ligne moyenne de **1**.

Unités : forces en newton, longueurs en millimètres.
La poutre **1** est soumise aux actions mécaniques suivantes :

— l'action de **3 → 1** est modélisable en A par :

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\vec{A}(3 \to 1) = -5\,000\,\vec{x} + 2\,000\,\vec{y}$

— l'action de **4 → 1** est modélisable par une densité linéïque de force constante entre A et B et telle que :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}f}(4 \to 1) = -p\,\mathrm{d}x\vec{y} \qquad \text{avec } p = 3 \text{ N/mm}.$$

La poutre a une section rectangulaire de largeur $b = 30$ mm et de hauteur $h = 60$ mm. Elle est en acier pour lequel $E = 2.10^5$ MPa et $\sigma_e = 380$ MPa.
On considère une section droite (S) de centre de surface G tel que $\overrightarrow{AG} = x\vec{x}$.

QUESTION 1

Déterminer les éléments de réduction en B de l'action mécanique de 2 → 1.

RÉPONSE

L'équilibre de **1** entraîne que : $\{\mathcal{T}(\bar{1} \to 1)\} = \{\vec{0}\}$.
La réduction en B permet d'écrire :

$$\vec{R}(\bar{1} \to 1) = \vec{A}(3 \to 1) + \sum_0^l \overrightarrow{\mathrm{d}f}(4 \to 1) + \vec{B}(2 \to 1) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_B(\bar{1} \to 1) = \vec{M}_B[\vec{A}(3 \to 1)] + \sum_0^l \vec{M}_B[\overrightarrow{\mathrm{d}f}(4 \to 1)] + \vec{M}_B(2 \to 1) = \vec{0}.$$

Dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on obtient :

$$\boldsymbol{\vec{B}(2 \to 1) = 5\,000\,\vec{x} + 4\,000\,\vec{y}}$$
$$\boldsymbol{\vec{M}_B(2 \to 1) = -2 \times 10^6\,\vec{z}}.$$

QUESTION 2

Déterminer les composantes dans $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ des éléments de réduction en G du torseur des forces de cohésion. En déduire le type de sollicitation auquel est soumis la poutre 1.

RÉPONSE

Dans la zone AB pour laquelle $0 \leqslant x \leqslant 2\,000$, on considère la section droite (S) de centre de surface G telle que $\overrightarrow{AG} = x\vec{x}$ *(fig. 8.13)*.
Si on considère le tronçon à gauche de (S), on peut écrire que :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}$$

avec

$$\left|\begin{aligned} \vec{R} &= -\vec{A}(3 \to 1) - \sum_0^x \overrightarrow{\mathrm{d}f}(4 \to 1) \\ \vec{M}_G &= -\vec{M}_G[\vec{A}(3 \to 1)] - \sum_0^x \vec{M}_G[\overrightarrow{\mathrm{d}f}(4 \to 1)]. \end{aligned}\right.$$

La première relation s'écrit :

$$\vec{R} = -\vec{A}(3 \to 1) - \sum_0^x \mathrm{d}\vec{f}(4 \to 1)$$

soit $\quad \vec{R} = 5\,000\,\vec{x} - 2\,000\,\vec{y} + 3\,x\vec{y}$

d'où : $\quad \boldsymbol{\vec{R}} \left| \begin{aligned} &\boldsymbol{N = 5\,000} \\ &\boldsymbol{T_y = -2\,000 + 3\,x} \\ &\boldsymbol{T_z = 0}. \end{aligned}\right.$

La deuxième relation s'écrit :

$$\vec{M}_G = -[\overrightarrow{GA} \wedge \vec{A}(3 \to 1)] - \left[\frac{\overrightarrow{GA}}{2} \wedge -px\vec{y}\right]$$

soit $\quad \vec{M}_G = 2\,000\,x\vec{z} - 1{,}5\,x^2\,\vec{z}$

d'où : $\quad \boldsymbol{\vec{M}_G} \left| \begin{aligned} &\boldsymbol{M_t = 0} \\ &\boldsymbol{M_{f_y} = 0} \\ &\boldsymbol{M_{f_z} = 2\,000\,x - 1{,}5\,x^2}. \end{aligned}\right.$

Il en résulte que la poutre **1** est soumise entre A et B à une sollicitation composée de flexion plane simple et d'extension.

QUESTION 3

Déterminer les équations et les diagrammes de l'effort normal N, de l'effort tranchant T_y et du moment de flexion M_{f_z} le long de la poutre AB.

RÉPONSE

Entre A et B pour $0 \leqslant x < 2\,000$, les résultats de la question 2 permettent d'écrire :

Unités : forces en newton, longueurs en millimètres.

Effort normal :

$$\boldsymbol{N(x) = 5\,000}$$

d'où le diagramme *figure 8.14 a*.

Effort tranchant :

$$T_y(x) = -2\,000 + 3\,x\,.$$

En A : $x = 0$; $T_y = -2\,000$.
En B : $x = l = 2\,000$; $T_y = 4\,000$.
En C : $x = \frac{l}{3}$; $T_y = 0$.

D'où le diagramme *figure 8.14 b.*

Moment de flexion :

$$M_{f_z}(x) = 2\,000\,x - 1{,}5\,x^2\,.$$

En A : $x = 0$; $M_{f_z} = 0$.
En B : $x = l = 2\,000$; $M_{f_z} = -2 \times 10^6$.
En C : $x = \frac{l}{3}$; $M_{f_z} = \frac{2}{3} \times 10^6$.
En D : $x = \frac{2\,l}{3}$; $M_{f_z} = 0$.

D'où le diagramme *figure 8.14 c.*

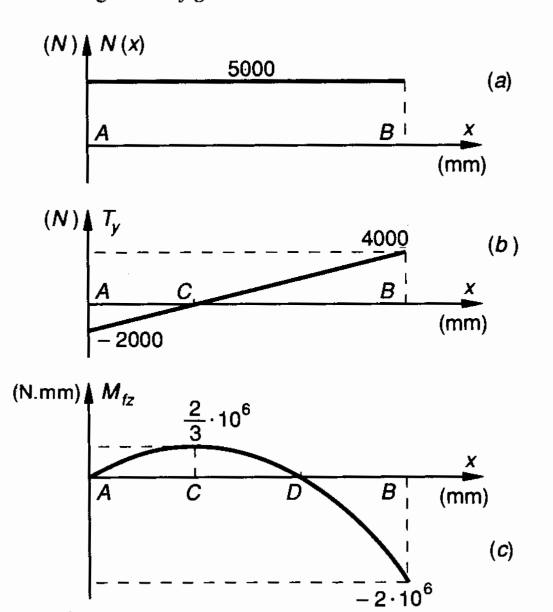


Fig. 8.14.

QUESTION 4

Déterminer la répartition des contraintes normales dans la section la plus sollicitée et en déduire la contrainte normale maximale dans la zone tendue et dans la zone comprimée. Déterminer l'ordonnée *y* de la fibre neutre.

RÉPONSE

L'étude des diagrammes de la *figure 8.14* nous montre que la section la plus sollicitée est en B.
Cette section est sollicitée à la flexion plane simple et à l'extension, d'où :

— Contrainte normale due à N :

$$\sigma_1 = \frac{N}{S}\,;$$

— contrainte normale due à M_{f_z} :

$$\sigma_2 = -\frac{M_{f_z}}{I(G, \vec{z})}\,y\,;$$

— contrainte normale due à la flexion et l'extension :

$$\sigma_x = \frac{N}{S} - \frac{M_{f_z}}{I(G, \vec{z})}\,y\,.$$

Dans la section droite en B :

$$N = 5\,000\ (\text{N})$$
$$S = bh = 1\,800\ (\text{mm}^2)$$
$$M_{f_z} = -2 \times 10^6\ (\text{N mm})$$
$$I(G, \vec{z}) = \frac{bh^3}{12} = 54 \times 10^4\ (\text{mm}^4)$$

d'où : $$\sigma_x = \frac{5\,000}{1\,800} + \frac{2 \times 10^6}{54 \times 10^4}\,y$$

$$\boldsymbol{\sigma_x = 2{,}78 + 3{,}7\,y}\,. \qquad \textbf{(1)}$$

Pour $y = 30$ $\sigma_M = 113{,}78$
Pour $y = -30$ $\sigma_N = -108{,}22$.

Dans la zone tendue : $|\sigma_M|_{max}$ **= 113,78 MPa.**
Dans la zone comprimée : $|\sigma_N|_{max}$ **= 108,22 MPa.**
La *figure 8.15* donne les diagrammes de répartition des contraintes normales $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$ et $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2$.

Dans la relation (1) ci-dessus pour $\sigma_x = 0$ on obtient l'ordonnée y du plan neutre :

$$\boldsymbol{y = -0{,}75\ (\text{mm})}\,.$$

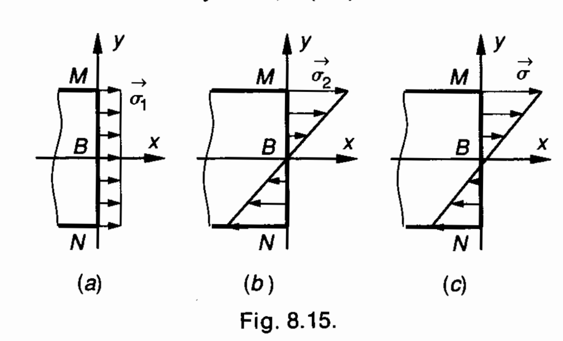


Fig. 8.15.

4. FLEXION DÉVIÉE

4.1. DÉFINITION

Une poutre de section constante dont la ligne moyenne est droite et portée par $(A, \vec{x})$ est sollicitée à la flexion déviée lorsque :

1° Cette poutre supporte des forces concentrées ou réparties perpendiculaires à $(A, \vec{x})$ et disposées symétriquement par rapport à $(A, \vec{x}, \vec{y})$.

2° Dans le plan de section droite (S) de centre de surface G les axes $(G, \vec{y})$ et $(G, \vec{z})$ ne sont pas des axes principaux de la section.

Exemples

— Poutre droite de section rectangulaire dont le plan des charges $(G, \vec{x}, \vec{y})$ n'est pas un plan de symétrie de la section *(fig. 8.16 a)*.
— Poutre droite constituée par une cornière à ailes inégales *(fig. 8.16 b)*.

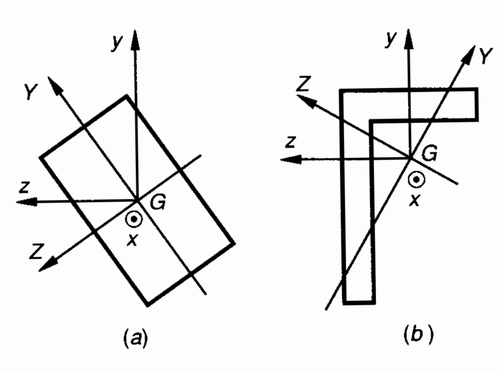


Fig. 8.16.

4.2. CALCUL DES CONTRAINTES NORMALES

4.2.1. Expression de σ dans le repère principal $(G, \vec{Y}, \vec{Z})$

Soit (S) une section droite de la poutre et G son centre de surface *(fig. 8.17)*.

$(G, \vec{x}, \vec{y})$ est le plan des charges.
Soit $(G, \vec{Y})$ et $(G, \vec{Z})$ les axes principaux de la section (S). Nous noterons *(fig. 8.17) :*
$(\vec{y}, \vec{Y}) = (\vec{z}, \vec{Z}) = \varphi$ (voir *chapitre 2, paragraphe 7*).
Les éléments de réduction en G du torseur des forces de cohésion

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}$$

ont pour composantes dans $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} .$$

Le moment de flexion $\vec{M}_f$ est donc porté par $(G, \vec{z})$

$$\vec{M}_f = M_{f_z} \vec{z} .$$

Notons M_{f_Y} et M_{f_Z} les composantes de $\vec{M}_f$ suivant les axes principaux $(G, \vec{Y})$ et $(G, \vec{Z})$. On peut écrire *(fig. 8.17) :*

$$M_{f_Y} = M_{f_z} \sin \varphi$$
$$M_{f_Z} = M_{f_z} \cos \varphi .$$

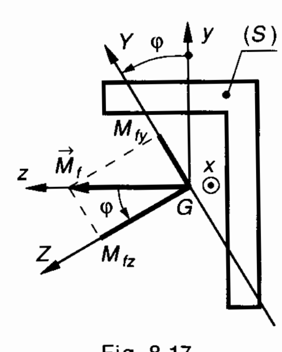


Fig. 8.17.

Considérons les sollicitations correspondant aux moments M_{f_Y} et M_{f_Z} pris séparément :
— à M_{f_Z} correspond une sollicitation de flexion plane simple dans le plan $(G, \vec{x}, \vec{Y})$;
— à M_{f_Y} correspond une sollicitation de flexion plane simple dans le plan $(G, \vec{x}, \vec{Z})$.

On peut considérer la flexion déviée comme étant la superposition de ces deux flexions planes simples.
Soit M un point quelconque de la section droite (S) et y et z ses coordonnées dans $(G, \vec{y}, \vec{z})$. Soient Y et Z les coordonnées de M dans $(G, \vec{Y}, \vec{Z})$.
Considérons chacune des sollicitations prise séparément :
— la relation (12) *paragraphe 5.2.2* du *chapitre 7* permet d'écrire :

$$\sigma_{1x} = -\frac{M_{f_Z}}{I(G, \vec{Z})} Y$$

— la relation (12′) *paragraphe 5.2.4* du *chapitre 7* permet d'écrire

$$\sigma_{2x} = \frac{M_{f_Y}}{I(G, \vec{Y})} Z .$$

Le principe de superposition permet alors de déterminer dans la section droite (S) la contrainte normale σ_x en M

$$\sigma_x = \sigma_{1x} + \sigma_{2x} = -\frac{M_{f_z} \cos \varphi}{I(G, \vec{Z})} Y + \frac{M_{f_z} \sin \varphi}{I(G, \vec{Y})} Z$$

$$\sigma_x = -M_{f_z}\left[\frac{Y \cos \varphi}{I(G, \vec{Z})} - \frac{Z \sin \varphi}{I(G, \vec{Y})}\right]$$

soit

$$\boldsymbol{\sigma_x = -\frac{M_{f_z}}{I(G, \vec{Y})\, I(G, \vec{Z})}\,[I(G, \vec{Y})\, Y \cos \varphi - I(G, \vec{Z})\, Z \sin \varphi\,]} . \quad \textbf{(1)}$$

4.2.2. Expression de l'axe neutre dans le repère principal $(G, \vec{Y}, \vec{Z})$

La relation (1) montre que dans le plan de section droite (S) la contrainte normale σ_x est nulle pour les points M tels que :

$$\boldsymbol{I(G, \vec{Y})\, Y \cos\varphi - I(G, \vec{Z})\, Z \sin\varphi = 0\,.} \quad \textbf{(2)}$$

Ces points sont donc situés sur une droite de (S) passant par G. **Cette droite est appelée l'axe neutre de la section (S)**; on le désignera par $(G, \vec{n})$.
On note : $(\vec{Y}, \vec{n}) = \psi$ *(fig. 8.18)*.

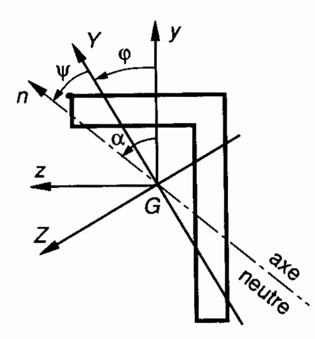


Fig. 8.18.

La relation (2) permet de déterminer $\tan\psi$:

$$\boxed{\tan\psi = \frac{Z}{Y} = \frac{I(G, \vec{Y})}{I(G, \vec{Z})\tan\varphi}}\,. \quad (3)$$

D'après l'hypothèse de Bernoulli la section droite (S) reste plane après déformation ; celle-ci est donc une rotation de (S) autour de l'axe neutre $(G, \vec{n})$. Les déformations ε_x et les contraintes σ_x seront donc maximales pour les points M les plus éloignés de l'axe neutre $(G, \vec{n})$.

Pour calculer $\sigma_{x\,\max}$ on détermine les coordonnées Y et Z des points M les plus éloignés de l'axe neutre $(G, \vec{n})$ et on applique la relation (1).

4.2.3. Expression de l'axe neutre dans le repère $(G, \vec{y}, \vec{z})$

Les formules de changement d'axes entre $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $(G, \vec{x}, \vec{Y}, \vec{Z})$ s'écrivent :

$$\begin{cases} y = Y\cos\varphi - Z\sin\varphi \\ z = Y\sin\varphi + Z\cos\varphi \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} Y = y\cos\varphi + z\sin\varphi \\ Z = -y\sin\varphi + z\cos\varphi\,. \end{cases} \quad (5)$$

Les relations (4) permettent d'exprimer les moments quadratiques et le moment produit relatifs aux axes $(G, \vec{y}, \vec{z})$ en fonction des moments quadratiques relatifs à $(G, \vec{Y}, \vec{Z})$ car $I(G, \vec{Y}, \vec{Z}) = 0$ (voir *chapitre 2, paragraphe 7.2*)

$$I(G, \vec{y}) = \sum_{(S)} z^2 \Delta S$$

$$= I(G, \vec{Z})\sin^2\varphi + I(G, \vec{Y})\cos^2\varphi \quad \textbf{(6)}$$

$$I(G, \vec{z}) = \sum_{(S)} y^2 \Delta S$$

$$= I(G, \vec{Z})\cos^2\varphi + I(G, \vec{Y})\sin^2\varphi \quad \textbf{(7)}$$

$$I(G, \vec{y}, \vec{z}) = \sum_{(S)} yz\, \Delta S$$

$$= [I(G, \vec{Z}) - I(G, \vec{Y})]\sin\varphi\cos\varphi \quad \textbf{(8)}$$

En fonction de (5) l'équation (2) s'écrit :

$$I(G, \vec{Y})\cos\varphi\,(y\cos\varphi + z\sin\varphi)$$
$$- I(G, \vec{Z})\sin\varphi\,(-y\sin\varphi + z\cos\varphi) = 0$$
$$y[I(G, \vec{Z})\sin^2\varphi + I(G, \vec{Y})\cos^2\varphi]$$
$$- z[I(G, \vec{Z}) - I(G, \vec{Y})]\sin\varphi\cos\varphi = 0\,.$$

En tenant compte de (6) et (8) on obtient :

$$\boldsymbol{yI(G, \vec{y}) - zI(G, \vec{y}, \vec{z}) = 0\,.} \quad \textbf{(9)}$$

L'équation (9) définit l'axe neutre $(G, \vec{n})$ dans le repère $(G, \vec{y}, \vec{z})$.
On note : $(\vec{y}, \vec{n}) = \alpha$ *(fig. 8.18)*.
La relation (9) permet de déterminer $\tan\alpha$:

$$\boxed{\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{z}{y} = \frac{I(G, \vec{y})}{I(G, \vec{y}, \vec{z})}}}\,. \quad \textbf{(10)}$$

En remplaçant (2) par (9) la relation (1) s'écrit :

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_{f_z}}{I(G, \vec{Y})\, I(G, \vec{Z})}\,[yI(G, \vec{y}) - zI(G, \vec{y}, \vec{z})]}\,. \quad (11)$$

Pour calculer $\sigma_{x\,\max}$ on détermine les coordonnées y et z des points M les plus éloignés de l'axe neutre $(G, \vec{n})$ et on applique la relation (11).

4.2.4. Détermination graphique de l'axe neutre

Soit $(G, \vec{y}, \vec{z})$ un système d'axes de la section (S) tels que $(\vec{y}, \vec{z}) = \frac{\pi}{2}$. Désignons par $(G, \vec{Y}, \vec{Z})$

les axes principaux de la section (S) tels que $(\vec{Y}, \vec{Z}) = \frac{\pi}{2}$. On note :

$$(\vec{y}, \vec{Y}) = (\vec{z}, \vec{Z}) = \varphi \,.$$

D'après la relation (1) du *paragraphe 7* du *chapitre 2* on peut écrire :

$$\tan 2\varphi = \frac{-2 I(G, \vec{y}, \vec{z})}{I(G, \vec{y}) - I(G, \vec{z})}. \qquad (12)$$

Dans l'hypothèse où $I(G, \vec{y})$, $I(G, \vec{z})$ et $I(G, \vec{y}, \vec{z})$ sont connus, la méthode graphique de Möhr *(chapitre 2, paragraphe 9)* permet de déterminer les axes principaux $(G, \vec{Y})$ et $(G, \vec{Z})$ ainsi que les valeurs de $I(G, \vec{Y})$ et $I(G, \vec{Z})$ *(fig. 8.19)*.

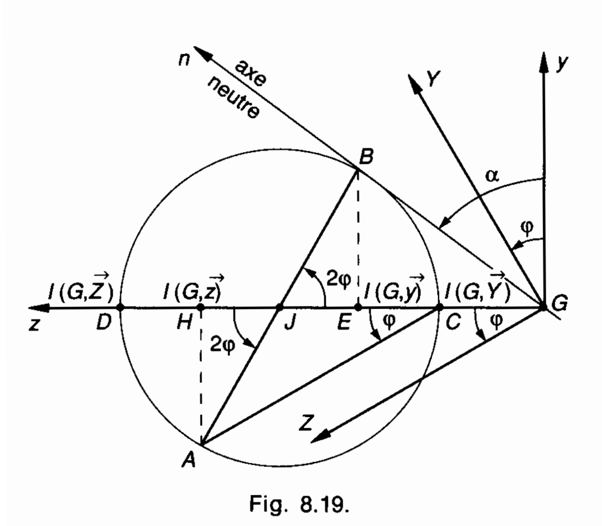


Fig. 8.19.

Sur l'axe $(G, \vec{z})$, on porte à l'échelle choisie :

$$\overrightarrow{GH} = I(G, \vec{z})\,\vec{z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GE} = I(G, \vec{y})\,\vec{z}\,.$$

Parallèlement à $(G, \vec{y})$, on porte avec la même échelle :

$$\overrightarrow{HA} = -I(G, \vec{y}, \vec{z})\,\vec{y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EB} = I(G, \vec{y}, \vec{z})\,\vec{y}\,.$$

Il en résulte que dans $(G, \vec{y}, \vec{z})$ les points A et B sont tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} = I(G, \vec{z})\,\vec{z} - I(G, \vec{y}, \vec{z})\,\vec{y} \\ \overrightarrow{GB} = I(G, \vec{y})\,\vec{z} + I(G, \vec{y}, \vec{z})\,\vec{y} \end{cases}.$$

Le cercle de Möhr est le cercle de diamètre AB, son centre J est le milieu de HE, son rayon est $R = JA = JB$. Ce cercle coupe l'axe $(G, \vec{z})$ en deux points C et D. On note D le point proche de H et C le point proche de E.
Au *chapitre 2, paragraphe 9* nous avons établi que :

$$\overrightarrow{GD} = I(G, \vec{Z}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GC} = I(G, \vec{Y})\,.$$

L'angle $(\vec{y}, \vec{Y}) = (\vec{z}, \vec{Z}) = \varphi$ est déterminé graphiquement à partir de :

$$(\overrightarrow{JH}, \overrightarrow{JA}) = (\overrightarrow{JE}, \overrightarrow{JB}) = 2\varphi\,.$$

Dans le repère $(G, \vec{y}, \vec{z})$ le point B a pour coordonnées y et z telles que *(fig. 8.19)* :

$$z = I(G, \vec{y})$$
$$y = I(G, \vec{y}, \vec{z})$$

d'où : $$\frac{z}{y} = \frac{I(G, \vec{y})}{I(G, \vec{y}, \vec{z})} = \tan\alpha\,.$$

Les coordonnées du point B vérifient donc la relation (10) du *paragraphe 3.2.3*, il en résulte que le point B est un point de l'axe neutre $(G, \vec{n})$. **GB est donc l'axe neutre de la section (S).** L'angle $(\vec{y}, \vec{n}) = \alpha$ est déterminé par l'angle $(\vec{y}, \overrightarrow{GB})$.

4.3. APPLICATION

On considère *figure 8.20* une poutre droite **1** de section constante reposant sur deux appuis sans adhérence repérés **2** et **3** et situés respectivement en A et B.

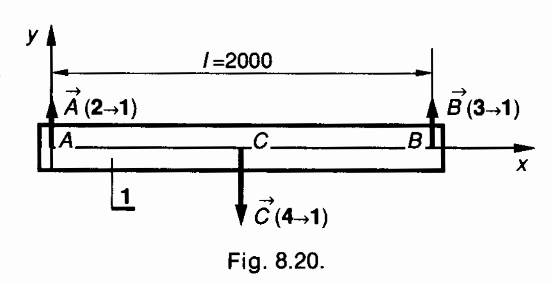


Fig. 8.20.

L'axe $(A, \vec{x})$ est porté par la ligne moyenne de la poutre **1** et B et C sont situés sur $(A, \vec{x})$.
Les forces appliquées à la poutre **1** sont perpendiculaires à $(A, \vec{x})$ et admettent $(A, \vec{x}, \vec{y})$ comme plan de symétrie. La poutre **1** est une cornière à aile inégale $90 \times 70 \times 8$ NF A 45-009 dont la section droite (S) est définie *figure 8.21*. Les axes $(G, \vec{y})$ et $(G, \vec{z})$ ne sont pas les axes principaux de la section droite (S).

Unités : les longueurs en millimètres, les forces en newtons.

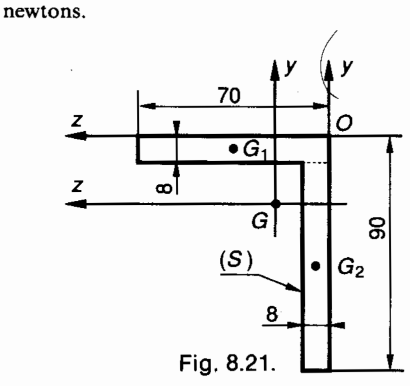


Fig. 8.21.

L'action mécanique de **4 → 1** est modélisable en C milieu de AB par :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(4 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que $\vec{C}(4 \to 1) = -2\,000\,\vec{y}$.

QUESTION 1

Déterminer les équations et les diagrammes de l'effort tranchant T_y et du moment de flexion M_{f_z}.
Quelle est le type de sollicitation auquel est soumise la poutre 1 ?

RÉPONSE

Par raison de symétrie

$$\vec{A}(2 \to 1) = \vec{B}(3 \to 1) = 1\,000\,\vec{y}.$$

Soit G le centre de surface d'une section droite (S) située entre A et C. Les éléments de réduction en G du torseur des forces de cohésion

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}$$

sont tels que $\left| \begin{array}{l} \vec{R} = -\vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{M}_G = -\overrightarrow{GA} \wedge \vec{A}(2 \to 1). \end{array} \right.$

Les composantes de $\vec{R}$ et $\vec{M}_G$ dans $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont :

$$\vec{R}\left| \begin{array}{l} N = 0 \\ T_y = -1\,000 \\ T_z = 0 \end{array} \right. ; \qquad \vec{M}_G \left| \begin{array}{l} M_t = 0 \\ M_{f_y} = 0 \\ M_{f_z} = 1\,000\,x \end{array} \right. .$$

En A : $x = 0$; $M_{f_z} = 0$.

En C : $x = 1\,000$; $M_{f_z} = 10^6$ (N mm).

Entre C et B les éléments de réduction en G du torseur des forces de cohésion peuvent s'écrire :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{B}(3 \to 1) \\ \vec{M}_G = \overrightarrow{GB} \wedge \vec{B}(3 \to 1). \end{array} \right.$$

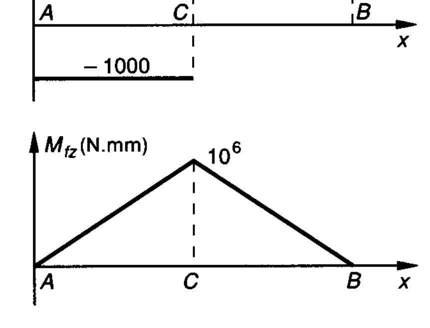


Fig. 8.22.

Les composantes de $\vec{R}$ et $\vec{M}_G$ dans $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont :

$$\vec{R}\left| \begin{array}{l} N = 0 \\ T_y = 1\,000 \\ T_z = 0 \end{array} \right. ; \qquad \vec{M}_G \left| \begin{array}{l} M_t = 0 \\ M_{f_y} = 0 \\ M_{f_z} = -1\,000\,x + 2 \times 10^6 \end{array} \right.$$

La *figure 8.22* donne les diagrammes de T_y et M_{f_z}. Il en résulte que la poutre **1** est soumise à une sollicitation de flexion mais, $(G, \vec{y})$ n'étant pas un axe principal de la section droite (S), cette sollicitation est une flexion déviée.

QUESTION 2

Déterminer le centre de surface G de la section droite (S).

RÉPONSE

On peut décomposer la section (S) en deux surfaces S_1 et S_2 de centre de surface G_1 et G_2 *(fig. 8.21)*

$$S_1 = 70 \times 8 = 560 \text{ mm}^2$$
$$S_2 = 82 \times 8 = 656 \text{ mm}^2$$
$$S = S_1 + S_2 = 1\,216 \text{ mm}^2.$$

Les centres de surface G_1 et G_2 sont définis dans $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par :

$$\overrightarrow{OG}_1 = -4\,\vec{y} + 35\,\vec{z}$$
$$\overrightarrow{OG}_2 = -49\,\vec{y} + 4\,\vec{z}.$$

Les coordonnées du centre de surface G de (S) dans $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ s'expriment alors par :

$$y_G = \frac{y_{G_1} S_1 + y_{G_2} S_2}{S} = \frac{-4 \times 560 - 49 \times 656}{1\,216},$$

$$\mathbf{y_G = -28,276\ (mm).}$$

$$z_G = \frac{z_{G_1} S_1 + z_{G_2} S_2}{S} = \frac{35 \times 560 + 4 \times 656}{1\,216},$$

$$\mathbf{z_G = 18,276\ (mm).}$$

QUESTION 3

Déterminer les moments quadratiques $I(G, \vec{y})$, $I(G, \vec{z})$ et le moment produit $I(G, \vec{y}, \vec{z})$ de la section droite (S). Déterminer l'angle $\varphi = (\vec{y}, \vec{Y}) = (\vec{z}, \vec{Z})$ des directions principales de la section.

RÉPONSE

On désigne par $I_1(G, \vec{y})$ et $I_2(G, \vec{y})$ les moments quadratiques de S_1 et S_2 par rapport à l'axe $(G, \vec{y})$. On peut écrire :

$$I(G, \vec{y}) = I_1(G, \vec{y}) + I_2(G, \vec{y}).$$

La relation (2) *paragraphe 2* du *chapitre 2* permet d'écrire :

$$I_1(G, \vec{y}) = I_1(G_1, \vec{y}) + S_1 d_1^2 \quad \text{avec } |d_1| = |z_G - z_{G_1}|$$

$$I_1(G, \vec{y}) = \frac{8 \times 70^3}{12} + 560 \times 16,724^2 = 385\,294,29 \text{ mm}^4$$

$$I_2(G, \vec{y}) = I_2(G_2, \vec{y}) + S_2 d_2^2 \quad \text{avec } |d_2| = |z_G - z_{G_2}|$$

$$I_2(G, \vec{y}) = \frac{82 \times 8^3}{12} + 656 \times 14,276^2 = 137\,194,21 \text{ mm}^4$$

d'où $I(G, \vec{y}) = 385\,294{,}29 + 137\,194{,}21$

$\boldsymbol{I(G, \vec{y}) = 522\,488{,}5\ \mathbf{mm}^4}$.

De la même façon on définit :

$I(G, \vec{z}) = I_1(G, \vec{z}) + I_2(G, \vec{z})$

$I_1(G, \vec{z}) = I_1(G_1, \vec{z}) + S_1\, d_1'^2$ avec $|d_1'| = |y_G - y_{G_1}|$

$I_1(G, \vec{z}) = \dfrac{70 \times 8^3}{12} + 560 \times 24{,}276^2$

$= 333\,008{,}21\ \text{mm}^4$

$I_2(G, \vec{z}) = I_2(G_2, \vec{z}) + s_2\, d_2'^2$ avec $|d_2'| = |y_G - y_{G_2}|$

$I_2(G, \vec{z}) = \dfrac{8 \times 82^3}{12} + 656 \times 20{,}724^2$

$= 649\,320{,}29\ \text{mm}^4$.

d'où $I(G, \vec{z}) = 333\,008{,}21 + 649\,320{,}29$

$\boldsymbol{I(G, \vec{z}) = 982\,328{,}5\ \mathbf{mm}^4}$.

Soient $I_1(G, \vec{y}, \vec{z})$ et $I_2(G, \vec{y}, \vec{z})$ les moments produits de S_1 et S_2 par rapport aux axes $(G, \vec{y}, \vec{z})$. On peut écrire :

$$I(G, \vec{y}, \vec{z}) = I_1(G, \vec{y}, \vec{z}) + I_2(G, \vec{y}, \vec{z})\,.$$

La relation (2) *paragraphe 5* du *chapitre 2* permet d'écrire :

$I_1(G, \vec{y}, \vec{z}) = I_1(G_1, \vec{y}, \vec{z}) + S_1\, y_{G_1} z_{G_1}$,

$I_1(G, \vec{y}, \vec{z}) = 0 + 560[-4 - (-28{,}276)][35 - 18{,}276]$,

$I_1(G, \vec{y}, \vec{z}) = 227\,355{,}42\ \text{mm}^4$.

$I_2(G, \vec{y}, \vec{z}) = I_2(G_2, \vec{y}, \vec{z}) + S_2\, y_{G_2} z_{G_2}$,

$I_2(G, \vec{y}, \vec{z}) = 0 + 656[-49 - (-28{,}276)][4 - 18{,}276]$,

$I_2(G, \vec{y}, \vec{z}) = 194\,081{,}42\ \text{mm}^4$.

D'où : $I(G, \vec{y}, \vec{z}) = 227\,355{,}42 + 194\,081{,}42$

$\boldsymbol{I(G, \vec{y}, \vec{z}) = 421\,436{,}84\ \mathbf{mm}^4}$.

QUESTION 4

Déterminer par la méthode graphique de Möhr la position des axes principaux au centre de surface *G* de la section droite (*S*) et la valeur des moments quadratiques maximal et minimal correspondants.

RÉPONSE

Dans le repère $(G, \vec{y}, \vec{z})$ et en fonction de l'échelle choisie sur l'axe $(G, \vec{z})$ on porte *(fig. 8.23)* :

$\overline{GE} = I(G, \vec{y}) = 522\,488\ \text{mm}^4$,

$\overline{GH} = I(G, \vec{z}) = 982\,328\ \text{mm}^4$.

On note J le milieu de EH.
Parallèlement à $(G, \vec{y})$ on porte :

$\overline{HA} = -I(G, \vec{y}, \vec{z}) = -421\,436\ \text{mm}^4$,

$\overline{EB} = I(G, \vec{y}, \vec{z}) = 421\,436\ \text{mm}^4$.

On trace le cercle de Möhr de centre J et de rayon JA.
Ce cercle coupe l'axe $(G, \vec{z})$ en C et D. On note C le point proche de E et D le point proche de H.
On désigne par $(G, \vec{Y})$ et $(G, \vec{Z})$ les axes principaux en G tels que $(\vec{Y}, \vec{Z}) = \dfrac{\pi}{2}$.
On note : $\varphi = (\vec{y}, \vec{Y}) = (\vec{z}, \vec{Z})$.

Sur le cercle de Möhr on obtient :

$$(\overrightarrow{JH}, \overrightarrow{JA}) = (\overrightarrow{JE}, \overrightarrow{JB}) = 2\,\varphi\,.$$

Sur la figure 8.23 on observe que : $\varphi = (\vec{z}, \overrightarrow{CA})$.
On mesure : $\boldsymbol{\varphi \approx 30{,}5°}$.
On construit $(G, \vec{Z})$ parallèle à CA et $(G, \vec{Y})$ parallèle à CB et orientés de telle façon que

$$(\vec{y}, \vec{Y}) = (\vec{z}, \vec{Z}) = \varphi\,.$$

Sur l'axe $(G, \vec{z})$ on obtient :

$$\boldsymbol{I(G, \vec{Y}) = \overline{GC} \approx 27 \times 10^4\ \mathbf{mm}^4}$$
$$\boldsymbol{I(G, \vec{Z}) = \overline{GD} \approx 123 \times 10^4\ \mathbf{mm}^4}.$$

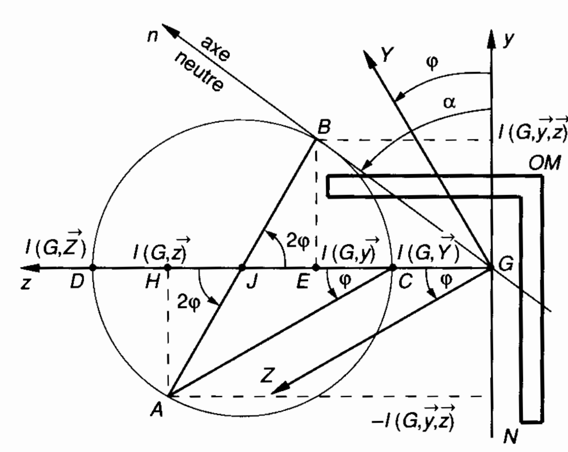


Fig. 8.23.

QUESTION 5

Déterminer par la méthode graphique l'axe neutre $(G, \vec{n})$ de la section droite (*S*) et en déduire les coordonnées *y* et *z* des points *M* et *N* de la section (*S*) les plus éloignés de l'axe neutre.

RÉPONSE

On a vu au *paragraphe 4.2.4* que dans le repère $(G, \vec{y}, \vec{z})$ l'axe neutre $(G, \vec{n})$ a pour support $\overrightarrow{GB}$, le point B étant défini par :

$$\overrightarrow{GB} = I(G, \vec{y})\,\vec{z} + I(G, \vec{y}, \vec{z})\,\vec{y}\,.$$

Sur la *figure 8.23*, par construction, le point B vérifie cette condition. L'axe neutre est donc défini par $\overrightarrow{GB}$. Sur cette figure on mesure :

$$\boldsymbol{(\vec{y}, \vec{n}) = \alpha \approx 51°}\,.$$

La *figure 8.23* montre que les points les plus éloignés de l'axe neutre $(G, \vec{n})$ sont les points repérés M et N. Dans le repère $(G, \vec{y}, \vec{z})$ on détermine (graphiquement ou géométriquement) les coordonnées des points M et N :

$$\boldsymbol{M} \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{y_M = 28{,}27} \\ \boldsymbol{z_M = -18{,}27} \end{array} \right.$$

$$\boldsymbol{N} \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{y_N = -61{,}73} \\ \boldsymbol{z_N = -10{,}27} \end{array} \right.$$

QUESTION 6

Dans la section droite (S) la plus sollicitée, déterminer les contraintes normales maximales σ_x dans la zone tendue et dans la zone comprimée.

RÉPONSE

Les diagrammes de la *figure 8.22* montrent que la section droite la plus sollicitée est située en C pour laquelle : $M_{f_z} = 10^6$ (N mm).

Dans le repère $(G, \vec{y}, \vec{z})$ la relation (11) du *paragraphe 4.2.3* permet alors d'écrire :

— pour le point M :

$$\sigma_{Mx} = -\frac{10^6}{27.10^4 \times 123.10^4}[28{,}27 \times 522\,488 + 18{,}27 \times 421\,436]$$

$\boldsymbol{\sigma_{Mx} = -67{,}66}$ **(MPa)** (zone comprimée) ;

— pour le point N :

$$\sigma_{Nx} = -\frac{10^6}{27.10^4 \times 123.10^4}[-61{,}73 \times 522\,488 + 10{,}27 \times 421\,436]$$

$\boldsymbol{\sigma_{Nx} = 84{,}08}$ **(MPa)** (zone tendue).

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 La *figure 8.24* représente la modélisation d'un arbre intermédiaire de réducteur. Cet arbre **1** de section constante et circulaire est guidé en rotation dans les paliers **2** et **3** et il transmet un moment entre les roues à denture droite **4** et **5**. Le repère $\mathcal{R} = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est tel que $(A, \vec{x})$ est porté par la ligne moyenne de l'arbre **1**.

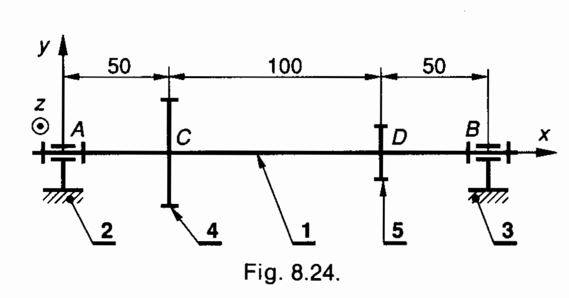


Fig. 8.24.

Unités : les longueurs en millimètres, les forces en newton.

— L'action mécanique de la roue **4** sur l'arbre **1** est modélisable en C par :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(4 \to 1) \\ \vec{M}_C(4 \to 1) \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{C}(4 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ -1\,000 \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \vec{M}_C(4 \to 1)\begin{vmatrix} 6 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} .$$

— L'action mécanique de la roue **5** sur l'arbre **1** est modélisable en D par :

$$\{\mathcal{T}(5 \to 1)\} = {}_D\begin{Bmatrix} \vec{D}(5 \to 1) \\ \vec{M}_D(5 \to 1) \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{D}(5 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ -2\,000 \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \vec{M}_D(5 \to 1)\begin{vmatrix} -6 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} .$$

— La liaison **2-1** est une liaison pivot courte d'axe $(A, \vec{x})$ admettant un léger rotulage. L'action mécanique de $\mathbf{2} \to \mathbf{1}$ est modélisable en A par :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{A}(2 \to 1)\begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix} ; \quad \vec{M}_A(2 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} .$$

— La liaison **3-1** est une liaison pivot glissant courte d'axe $(B, \vec{x})$ admettant un léger rotulage. L'action mécanique de $\mathbf{3} \to \mathbf{1}$ est modélisable en B par :

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{B}(3 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ Y_B \\ Z_B \end{vmatrix} ; \quad \vec{M}_B(3 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} .$$

Cet arbre est en acier XC 38 pour lequel :

$$\sigma_e = 335 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \tau_e = 235 \text{ MPa} .$$

On adopte pour cette construction un coefficient de sécurité $s = 3$.

QUESTIONS

1° Déterminer les actions mécaniques en A et B.
2° Déterminer les équations de l'effort tranchant T_y, du moment de flexion M_{f_z} et du moment de torsion M_t le long de l'arbre AB et construire les diagrammes correspondants.
En déduire la valeur de $|T_y|_{max}$, de $|M_{f_z}|_{max}$, de $|M_t|_{max}$ et la position des sections droites correspondantes.
3° Dans la section droite la plus sollicitée, déterminer le diamètre minimal de l'arbre pour que la condition limite relative aux contraintes normales soit vérifiée.
4° Dans la section droite la plus sollicitée, déterminer le diamètre minimal de l'arbre pour que la condition limite relative aux contraintes tangentielles soit vérifiée.
5° A partir des résultats du 3° et du 4°, en déduire le diamètre minimal de l'arbre 1 pour que celui-ci résiste en toute sécurité aux sollicitations qui lui sont appliquées.

RÉPONSES

1° $X_A = 0$; $Y_A = 1\,250$ (N) ; $Z_A = 0$.

$Y_B = 1\,750$ (N) ; $Z_B = 0$.

2° $|T_y|_{max} = 1\,750$ N entre D et B ;

$|M_{f_z}|_{max} = 87\,500$ N mm en D ;

$|M_t|_{max} = 6 \times 10^4$ N mm entre C et D.

3° $d \geq 20{,}6$ mm.

4° $d \geq 19$ mm.

5° $d \geq 20{,}6$ mm.

2 La *figure 8.25* représente la modélisation d'un arbre **1** de section constante et circulaire. Cet arbre est guidé en rotation dans les paliers **3** et **5** et il transmet un moment entre les roues à denture droite **2** et **4**. Le repère $\mathcal{R} = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est tel que $(A, \vec{x})$ est porté par la ligne moyenne de l'arbre **1**.

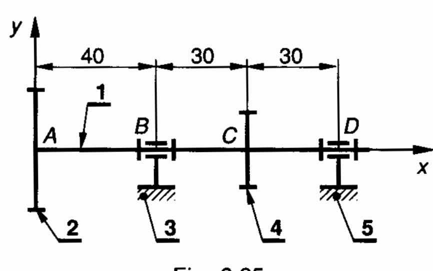


Fig. 8.25.

Unités : les longueurs en millimètres, les forces en newtons.

— L'action mécanique de la roue **2** sur l'arbre **1** est modélisable en A par :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{M}_A(2 \to 1) \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$

$$\vec{A}(2 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ 1\,500 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \vec{M}_A(2 \to 1)\begin{vmatrix} 25 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

— L'action mécanique de la roue **4** sur l'arbre **1** est modélisable en C par :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(4 \to 1) \\ \vec{M}_C(4 \to 1) \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$

$$\vec{C}(4 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ -4\,500 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \vec{M}_C(4 \to 1)\begin{vmatrix} -25 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

— La liaison **3-1** est une liaison pivot glissant courte d'axe $(B, \vec{x})$ admettant un léger rotulage. L'action mécanique de **3 → 1** est modélisable en B par :

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$

$$\vec{B}(3 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ Y_B \\ Z_B \end{vmatrix}; \quad \vec{M}_B(3 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

— La liaison **5-1** est une liaison pivot courte d'axe $(D, \vec{x})$ admettant un léger rotulage. L'action mécanique de **5 → 1** est modélisable en D par :

$$\{\mathcal{T}(5 \to 1)\} = {}_D\begin{Bmatrix} \vec{D}(5 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$

$$\vec{D}(5 \to 1)\begin{vmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{vmatrix}; \quad \vec{M}_D(5 \to 1)\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Cet arbre est en acier 18 CD 4 pour lequel :

$$\sigma_e = 880 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \tau_e = 680 \text{ MPa}.$$

On adopte pour cette construction un coefficient de sécurité $s = 2{,}5$.

QUESTIONS

1° Déterminer les actions mécaniques en B et D.
2° Déterminer les équations de l'effort tranchant T_y, du moment de flexion M_{f_z} et du moment de torsion M_t le long de l'arbre AD et construire les diagrammes correspondants.
En déduire la valeur de $|T_y|_{max}$, de $|M_{f_z}|_{max}$, de $|M_t|_{max}$ et la position des sections droites correspondantes.

3° Dans la section droite la plus sollicitée, déterminer le diamètre minimal de l'arbre pour que la condition limite relative aux contraintes normales soit vérifiée.
4° Dans la section droite la plus sollicitée, déterminer le diamètre minimal de l'arbre pour que la condition limite relative aux contraintes tangentielles soit vérifiée.
5° A partir des résultats du 3° et du 4°, en déduire le diamètre minimal de l'arbre 1 pour que celui-ci résiste en toute sécurité aux sollicitations qui lui sont appliquées.

RÉPONSES

1° $Y_B = -250$ (N)

$Y_D = 3\,250$ (N).

2° $|T_y|_{max} = 3\,250$ (N) entre C et D ;

$|M_{f_z}|_{max} = 97{,}5 \times 10^3$ (N mm) en C ;

$|M_t|_{max} = 25 \times 10^4$ (N mm) entre B et C .

3° $d \geqslant 17{,}4$ mm.

4° $d \geqslant 17{,}1$ mm.

5° $d \geqslant 17{,}4$ mm.

3 La *figure 8.26* représente la modélisation d'un levier **1** de section rectangulaire. On note $\mathcal{R} = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. L'axe $(A, \vec{x})$ est porté par la ligne moyenne du levier **1**. Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour le levier **1** et pour les forces extérieures qui lui sont appliquées.

Unités : les longueurs en millimètres, les forces en newtons.

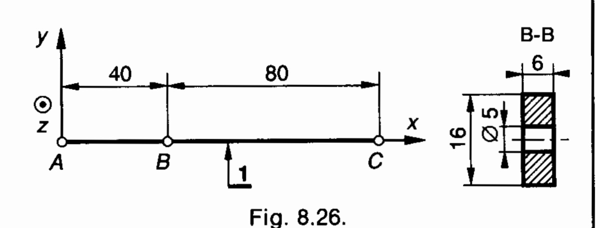


Fig. 8.26.

Le levier **1** est soumis aux actions mécaniques extérieures suivantes :

— L'action de **2 → 1** est modélisable en A par :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$: $\vec{A}(2 \to 1) = -990\,\vec{x} - 800\,\vec{y}$.

— L'action de **3 → 1** est modélisable en B par :

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$: $\vec{B}(3 \to 1) = 1\,200\,\vec{y}$.

— L'action de **4 → 1** est modélisable en C par :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C}(4 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$: $\vec{C}(4 \to 1) = 990\,\vec{x} - 400\,\vec{y}$.

QUESTIONS

1° Déterminer les équations de l'effort normal N, de l'effort tranchant T_y, du moment de flexion M_{f_z} le long du levier 1 et construire les diagrammes correspondants.
En déduire la valeur de $|N|_{max}$, de $|T_y|_{max}$, de $|M_{f_z}|_{max}$ et la position des sections droites correspondantes.
2° Déterminer la répartition des contraintes normales dans la section droite (S) la plus sollicitée et construire les diagrammes correspondants.
En déduire la contrainte normale maximale dans la zone tendue et dans la zone comprimée.
3° Déterminer la contrainte tangentielle maximale dans la section droite *B-B*.

RÉPONSES

1° $|N|_{max} = 990$ (N) entre A et C ;

$|T_y|_{max} = 800$ (N) entre A et B ;

$|M_{f_z}|_{max} = 32 \times 10^3$ (N mm) en B .

2° La section *B-B* est la plus sollicitée

$$\sigma = 15 + 16{,}117\,y$$

pour $y = 8$ $\sigma = 144$ (MPa), zone tendue ;
pour $y = -8$ $\sigma = -114$ (MPa), zone comprimée.

3° $|\tau_{xy}|_{max} = 11{,}63$ MPa.

4 La *figure 8.27* représente une poutre **1** en liaison encastrement en C avec le support **2**. On note $\mathcal{R} = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. L'axe $(A, \vec{x})$ est porté par la ligne moyenne de la poutre **1**.

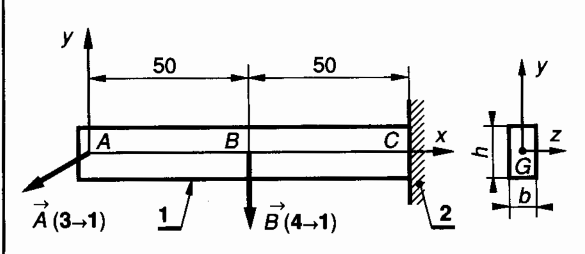


Fig. 8.27.

Le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la poutre **1** et pour les forces extérieures qui lui sont appliquées. La poutre **1** a une section rectangulaire constante et elle est en acier E28 pour lequel :

$$\sigma_e = 255 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \tau_e = 130 \text{ MPa} .$$

On adopte pour cette construction un coefficient de sécurité $s = 2{,}5$.

Unités : les longueurs en millimètres, les forces en newtons.

La poutre **1** est soumise aux actions mécaniques extérieures suivantes :

— l'action de **3 → 1** est modélisable en A par :

$$\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(3 \rightarrow 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$: $\vec{A}(3 \rightarrow 1) = -1\,200\,\vec{x} - 400\,\vec{y}$;

— l'action de **4 → 1** est modélisable en B par :

$$\{\mathcal{T}(4 \rightarrow 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(4 \rightarrow 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

tel que dans $\mathcal{R}$: $\vec{B}(4 \rightarrow 1) = -200\,\vec{y}$.

QUESTIONS

1° Déterminer les composantes dans $\mathcal{R}$ des éléments de réduction en C du torseur des actions mécaniques de liaison de 2 → 1.
2° Déterminer les équations de l'effort normal N, de l'effort tranchant T_y, du moment de flexion M_{f_z} le long de la poutre 1 et construire les diagrammes correspondants.
En déduire la valeur de $|N|_{max}$, de $|T_y|_{max}$, de $|M_{f_z}|_{max}$ et la position des sections droites correspondantes.
3° Dans la section droite la plus sollicitée et à partir de la condition de résistance relative aux contraintes normales, déterminer les valeurs minimales de b et h dans le cas où $h = 2\,b$.
4° Déterminer la contrainte tangentielle maximale dans la section droite la plus sollicitée.

RÉPONSES

1° $\vec{C}(2 \rightarrow 1) = 1\,200\,\vec{x} + 600\,\vec{y}$
$\vec{M}_C(2 \rightarrow 1) = -5 \times 10^4\,\vec{z}$

2° $|N|_{max} = 1\,200$ (N) entre A et C ;
$|T_y|_{max} = 600$ (N) entre B et C ;
$|M_{f_z}|_{max} = 5 \times 10^4$ (N mm) en C.

3° $b = 9{,}25$; $h = 18{,}5$.

4° $|\tau_{xy}|_{max} = 5{,}26$ MPa.

5 La *figure 8.28* représente la section droite (S) d'un profilé en alliage d'aluminium utilisé dans la construction des voitures du métro.

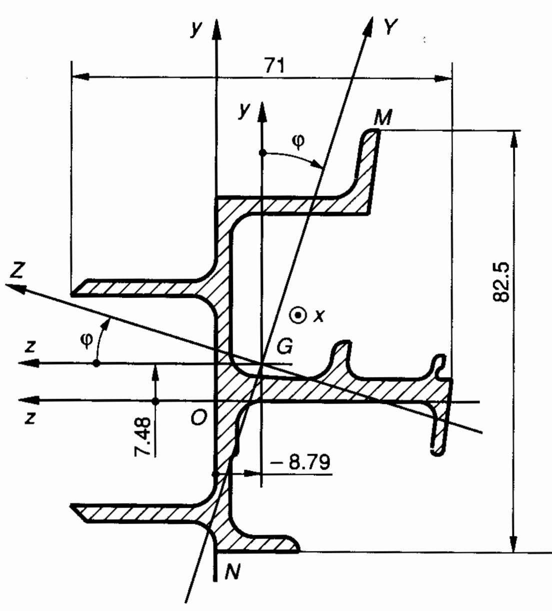


Fig. 8.28.

La section droite (S) a les caractéristiques suivantes :
— surface : $S = 833{,}5 \text{ mm}^2$;
— centre de surface G : $\overrightarrow{OG} = 7{,}48\,\vec{y} - 8{,}79\,\vec{z}$ (en mm dans $(O, \vec{y}, \vec{z})$);
— axes principaux d'inertie en G : $(G, \vec{Y})$ et $(G, \vec{Z})$ tels que :

$$\varphi = (\vec{y}, \vec{Y}) = (\vec{z}, \vec{Z}) = -18{,}42° ;$$

— moments quadratiques $I(G, \vec{Y})$ et $I(G, \vec{Z})$:

$$I(G, \vec{Y}) = 42{,}13 \times 10^4 \text{ mm}^4 ;$$
$$I(G, \vec{Z}) = 21{,}46 \times 10^4 \text{ mm}^4 .$$

On désigne par $(G, \vec{n})$ l'axe neutre de la section (S). La position de l'axe neutre $(G, \vec{n})$ par rapport à l'axe $(G, \vec{Y})$ est déterminée par l'angle :

$$(\vec{Y}, \vec{n}) = \psi .$$

Unités : les longueurs en millimètres, les forces en newtons.

On donne les composantes dans $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ des éléments de réduction en G des forces de cohésion dans la section droite (S) :

$$\vec{R}\left|\begin{array}{l} N = 0 \\ T_y = 2\,000 \\ T_z = 0 \end{array}\right. ; \qquad \vec{M}_G\left|\begin{array}{l} M_t = 0 \\ M_{f_y} = 0 \\ M_{f_z} = 4 \times 10^5 \end{array}\right. .$$

Ce profilé est en alliage d'aluminium corroyé 7020 pour lequel :
$E = 72\,000$ MPa ; $\sigma_r = 380$ MPa ; $\sigma_e = 240$ MPa.

QUESTIONS

1° Déterminer algébriquement la position de l'axe neutre $(G, \vec{n})$ de la section droite (*S*) en calculant tan ψ (relation (3) *paragraphe 4.2.2*).

2° Déterminer graphiquement la position de l'axe neutre $(G, \vec{n})$ et comparer avec le résultat du 1°.

3° Déterminer graphiquement sur la *figure 8.28* les coordonnées *Y* et *Z* dans $(G, \vec{Y}, \vec{Z})$ des points *M* et *N* de la section droite (*S*) les plus éloignés de l'axe neutre $(G, \vec{n})$. *M* est situé au dessus de l'axe $(G, \vec{n})$.

4° Dans la section droite (*S*) déterminer les contraintes normales maximales σ_x dans la zone tendue et dans la zone comprimée. En déduire la valeur du coefficient de sécurité dont on dispose.

RÉPONSES

1° tan $\psi = -5{,}8946$; $\psi = (\vec{Y}, \vec{n}) = -80{,}37°$.
3° $Y_M \approx 52$ mm ; $Z_M \approx -8{,}5$ mm ;
$Y_N \approx -37$ mm ; $Z_N \approx -3$ mm.
4° En M : $\sigma_x = -89{,}4$ (MPa), zone comprimée.
En N : $\sigma_x = 64{,}5$ (MPa), zone tendue.
$s = 2{,}68$.

6 La *figure 8.29* représente la section droite (*S*) d'un profilé.
Unités : les longueurs en millimètres, les forces en newtons.

La section droite (*S*) a les caractéristiques suivantes :

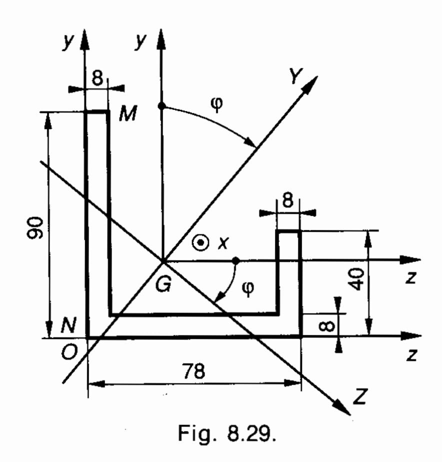


Fig. 8.29.

— centre de surface G :

$\overrightarrow{OG} = 26{,}55\,\vec{y} + 29{,}88\,\vec{z}$

dans $(O, \vec{y}, \vec{z})$;

— axes principaux d'inertie en G :
$(G, \vec{Y})$ et $(G, \vec{Z})$
tels que :

$$\varphi = (\vec{y}, \vec{Y}) = (\vec{z}, \vec{Z}) = 38°$$

— moments quadratiques $I(G, \vec{Y})$ et $I(G, \vec{Z})$:

$$I(G, \vec{Y}) = 173{,}13 \times 10^4\ \text{mm}^4\ ;$$
$$I(G, \vec{Z}) = 62{,}18 \times 10^4\ \text{mm}^4.$$

On désigne par $(G, \vec{n})$ l'axe neutre de la section droite (*S*). La position de l'axe neutre $(G, \vec{n})$ par rapport à l'axe $(G, \vec{Y})$ est déterminée par l'angle : $(\vec{Y}, \vec{n}) = \psi$.
On donne les composantes dans $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ des éléments de réduction en G des forces de cohésion dans la section droite (*S*) :

$$\vec{R}\begin{vmatrix} N = 0 \\ T_y = 3\,200 \\ T_z = 0 \end{vmatrix} ; \qquad \vec{M}_G\begin{vmatrix} M_t = 0 \\ M_{f_y} = 0 \\ M_{f_z} = 10^6 \end{vmatrix} .$$

Ce profilé est en alliage d'aluminium corroyé 5086 pour lequel : $E = 72\,000$ MPa ; $\sigma_r = 310$ MPa ; $\sigma_e = 230$ MPa.

QUESTIONS

1° Déterminer algébriquement la position de l'axe neutre $(G, \vec{n})$ de la section droite (*S*) en calculant tan ψ (relation (3) *paragraphe 4.2.2*).

2° Déterminer graphiquement la position de l'axe neutre $(G, \vec{n})$ et comparer avec le résultat du 1°.

3° Déterminer graphiquement sur la *figure 8.29* les coordonnées *Y* et *Z* dans $(G, \vec{Y}, \vec{Z})$ des points *M* et *N* de la section droite (*S*) les plus éloignés de l'axe neutre $(G, \vec{n})$. *M* est situé au dessus de l'axe $(G, \vec{n})$.

4° Dans la section droite (*S*) déterminer les contraintes normales maximales σ_x dans la zone tendue et dans la zone comprimée. En déduire la valeur du coefficient de sécurité dont on dispose.

RÉPONSES

1° tan $\psi = 3{,}5638$; $\psi = (\vec{Y}, \vec{n}) = 74{,}3°$.
3° $Y_M \approx 37$; $Z_M \approx -55$;
$Y_N \approx -40$; $Z_N \approx -8$.
4° En M : $\sigma_x = -66{,}4$ (MPa), zone comprimée.
En N : $\sigma_x = 47{,}8$ (MPa), zone tendue.
$s = 3{,}46$.



le flambage

Le flambage est en fait une sollicitation composée de compression et de flexion. Comme telle, elle aurait pu être traitée au chapitre précédent. Nous avons choisi d'en faire un chapitre à part, non pas pour y apporter plus d'attention mais simplement parce que les méthodes de son étude sont un peu particulières.

Lorsqu'une pièce en forme de poutre rectiligne suffisamment longue subit un effort axial croissant tendant à la raccourcir, on observe successivement deux types de sollicitation.

— Pour une charge axiale F inférieure à une limite notée F_c (charge critique), la poutre est comprimée, elle reste rectiligne et se raccourcit.

— Lorsque la charge axiale F atteint F_c, la poutre fléchit brusquement et se rompt très vite. On observe que la flexion se produit dans le plan perpendiculaire à la direction principale de plus faible moment quadratique de la section droite de la poutre. *Figure 9.1* par exemple, la flexion se produit dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ perpendiculaire à $(G, \vec{z})$.

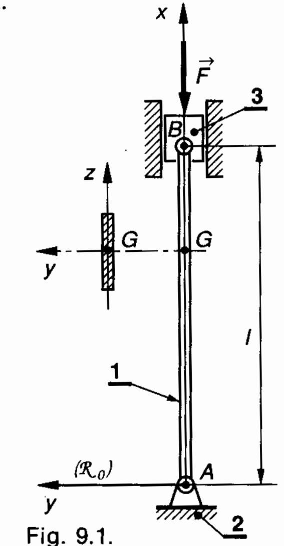


Fig. 9.1.

1. ÉTUDE DU FLAMBAGE THÉORIQUE D'EULER

1.1. HYPOTHÈSES DE L'ÉTUDE

- La poutre a une section constante et une ligne moyenne rigoureusement droite avant déformation.
- Les liaisons de la poutre avec le milieu extérieur sont des liaisons sphériques sans adhérence. Pratiquement, et sur le plan expérimental, comme la flexion se produit dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$, les liaisons sphériques en A et B sont remplacées par des liaisons pivot d'axe parallèle à $\vec{z}$, plus faciles à réaliser.
- Considérons le repère $\mathcal{R}_0 = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, il est tel que, *(fig. 9.1)* : $(A, \vec{x})$ est porté par la ligne moyenne de la poutre avant déformation.
- Dans un plan $(G, \vec{y}, \vec{z})$ de section droite, $(G, \vec{y})$ et $(G, \vec{z})$ sont axes principaux et $I(G, \vec{z}) < I(G, \vec{y})$ alors, la déformation aura lieu dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$.
- La liaison **1-2** en A est une liaison pivot sans adhérence d'axe $(A, \vec{z})$.
- La liaison **1-3** en B est une liaison pivot sans adhérence d'axe $(B, \vec{z})$.
- Les actions de liaison se réduisent respectivement en A et B à deux glisseurs dont les résultantes sont directement opposées.

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix},$$

avec $\vec{A}(2 \to 1) = \|\vec{F}\|\vec{x}$.

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(3 \to 1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

avec $\vec{B}(3 \to 1) = -\|\vec{F}\|\,\vec{x}$.

- Le poids de la poutre peut être négligé.
- Toutes ces conditions ne peuvent pas être remplies rigoureusement même dans des essais de laboratoire. En fait, dès que l'on soumet la poutre à un effort de compression F, une déformation de flexion apparaît et peut être détectée dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ avec des comparateurs suffisamment sensibles.

1.2. ÉTUDE DE LA DÉFORMATION DE FLAMBAGE. CHARGE CRITIQUE D'EULER

Modélisons la poutre par sa ligne moyenne AB et supposons que sous l'influence des efforts en A et B, cette ligne moyenne prenne une très légère courbure. Sur la *figure 9.2*, cette courbure est évidemment très accentuée pour la rendre visible.

Soit G le centre de surface d'une section droite d'abscisse x. Dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ les coordonnées de G sont $G(x, y)$.

Considérons le repère de définition des sollicitations en G : $\mathcal{R} = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Compte tenu de la très faible déformation, $\mathcal{R}$ est parallèle à $\mathcal{R}_0$.

Déterminons le torseur des forces de cohésion en G.

$$\{\mathcal{C}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}.$$

avec :

$$\left[\begin{array}{l} \vec{R} = -\vec{F} \\ \vec{M}_G = \overrightarrow{GB} \wedge (-\vec{F}) \end{array}\right.$$

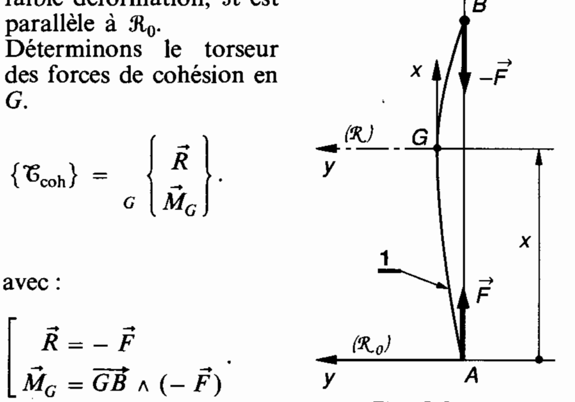


Fig. 9.2.

Dans le repère $\mathcal{R} = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on obtient en écrivant pour simplifier les écritures : $F = \|\vec{F}\|$.

$$\left|\begin{array}{l} \vec{R} = -F\vec{x} \\ \vec{M}_G = -Fy \,.\, \vec{z}. \end{array}\right.$$

Etudions la déformation élastique de la poutre sous l'effet du moment de flexion $M_{f_z} = -Fy$.
On sait que : $EI(G, \vec{z})\, y'' = Mf_z$.

Soit : $$EI(G, \vec{z})\, y'' + Fy = 0\,. \qquad (1)$$

(1) est une équation différentielle du second ordre, linéaire à coefficients constants, sans second membre, dont la solution générale est :

$$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

$$\text{avec} \quad \omega^2 = \frac{F}{EI(G, \vec{z})}. \qquad (2)$$

Notons que l'unité de ω^2 est le mm^{-2}.

Les constantes A et B peuvent se calculer par les conditions aux limites *(fig. 9.2)* :

- **En A** : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ce qui entraîne $\boldsymbol{A = 0}$.
- **En B** : $\begin{cases} x = l \\ y = 0 \end{cases}$ ce qui entraîne $B\sin\omega l = 0$.

A étant nul, il est évident que $B \neq 0$;
$B\sin\omega l = 0$ entraîne donc que $\sin\omega l = 0$

et par conséquent : $$\omega l = k\pi\,. \qquad (3)$$

D'après (2) : $$\sqrt{\frac{F}{EI(G, \vec{z})}} = \frac{k\pi}{l}.$$

La plus faible valeur de F qui satisfait à cette relation est obtenue pour $k = 1$; on désigne cette valeur de F par F_c, ou **charge critique d'Euler :**

$$\boxed{F_c = \frac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{l^2}}. \qquad (4)$$

Notons que le coefficient $B \neq 0$ reste indéfini. B est indéterminé tant que l'équilibre élastique est réalisé, c'est-à-dire tant que $F \leqslant F_c$.

Que représente B ?

Reprenons l'équation générale de la déformée (2) pour $A = 0$.

$$y = B\sin\omega x\,.$$

Le maximum de la flèche y est obtenu pour $\sin\omega x = 1$ c'est-à-dire pour $\omega x = \frac{\pi}{2}$.

Comme par ailleurs dans (3) avec $k = 1$: $\omega = \frac{\pi}{l}$,

$$x = \frac{l}{2}.$$

B est donc en fait la flèche maximale au milieu de la poutre.

L'équation de la déformée est alors :

$$\boxed{y = B\sin\frac{\pi x}{l}}. \qquad (5)$$

Utilisation pratique de la charge critique F_c

Si $F < F_c$: la poutre est et reste rectiligne, elle peut être calculée en compression simple.
Si $F = F_c$: la poutre fléchit et prend une position d'équilibre élastique.
Si $F > F_c$: la flèche augmente jusqu'à la rupture.

1.3. CAS D'UNE POUTRE DONT LES EXTRÉMITÉS *A* ET *B* SONT PARFAITEMENT ENCASTRÉES *(fig. 9.3)*

Nous étudierons ce cas qui est en fait beaucoup plus proche des cas réels et qui permet de définir la notion de « longueur libre de flambage ».
Modélisons les actions des deux liaisons encastrement aux extrémités *A* et *B*. La réalisation expérimentale introduit un plan de symétrie des charges, $(A, \vec{x}, \vec{y})$.
La liaison **3-1** est telle que la résultante du torseur de liaison est parallèle à $(B, \vec{x})$.

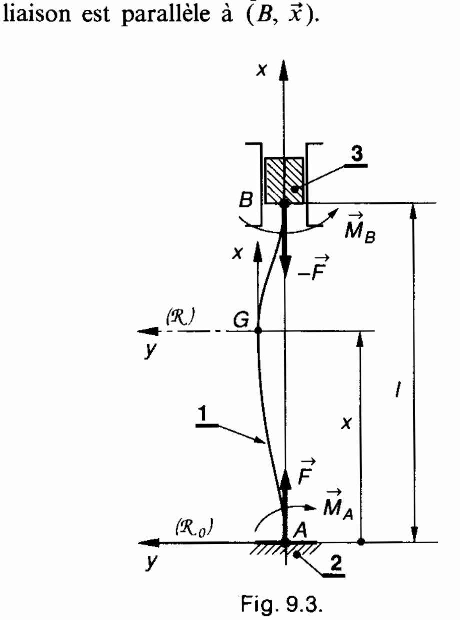


Fig. 9.3.

- Liaison encastrement **3-1**

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}(3 \to 1) \\ \vec{M}_B(3 \to 1) \end{Bmatrix}$$

que nous exprimerons plus simplement par :

$$\begin{cases} \vec{B}(3 \to 1) = -F\vec{x} \\ \vec{M}_B(3 \to 1) = \vec{M}_B = M_B\,\vec{z}\,. \end{cases}$$

L'équilibre de la poutre **1** et la symétrie des liaisons implique que :
Liaison encastrement **2-1** :

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}(2 \to 1) \\ \vec{M}_A(2 \to 1) \end{Bmatrix}$$

que nous exprimerons plus simplement par :

$$\begin{cases} \vec{A}(2 \to 1) = F\vec{x} \\ \vec{M}_A(2 \to 1) = \vec{M}_A = -M_A\,\vec{z}\,. \end{cases}$$

L'étude de l'équilibre de la poutre **1** conduit à écrire que :

$$M_A = M_B = \mu \qquad \text{(inconnu)}\,.$$

Exprimons en G centre de surface d'une section droite telle que $G(x, y)$, le torseur des forces de cohésion :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}.$$

Avec :

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{B}(3 \to 1) = -F\vec{x} \\ \vec{M}_G = \vec{M}_B(3 \to 1) + \overrightarrow{GB} \wedge \vec{B}(3 \to 1) \end{cases}$$

soit : $\vec{M}_G = (-Fy + \mu)\,\vec{z}$.
$\vec{M}_G$ est donc un moment de flexion suivant $\vec{z}$. On connaît l'expression de la « déformée » dans une sollicitation de flexion :

$$EI(G, \vec{z})\,y'' = M_{f_z}\,.$$

Donc ici : $EI(G, \vec{z})\,y'' = -Fy + \mu$
que l'on peut écrire :

$$\frac{EI(G, \vec{z})}{F}\,y'' + y = \frac{\mu}{F}\,. \tag{6}$$

L'équation (6) est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, avec second membre, dont la solution générale est :

$$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x + \frac{\mu}{F}$$

$$\text{avec} \quad \omega^2 = \frac{F}{EI(G, \vec{z})}\,. \tag{7}$$

Notons que l'unité de ω^2 est le mm^{-2}.
Les trois inconnues A, B, μ peuvent se calculer avec les conditions aux limites :

- **en** ***A*** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$
- **en** ***B*** $\begin{cases} x = l \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = l \\ y' = 0\,. \end{cases}$

Notons que compte tenu de la symétrie de la figure, ces quatre conditions ne sont pas indépendantes.
Ecrivons que :

$$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x + \frac{\mu}{F}$$

$$y' = -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x$$

$$\text{pour} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = A + \frac{\mu}{F} \tag{8}$$

$$\text{pour} \begin{cases} x = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = B \tag{9}$$

pour $\begin{cases} x = l \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ avec $B = 0$;

$$0 = A \cos \omega l + \frac{\mu}{F} \qquad (10)$$

pour $\begin{cases} x = l \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow$ avec $B = 0$; $0 = -A\omega \sin \omega l$. (11)

En comparant (8) et (10) il vient que $\cos \omega l = 1$ et donc que : $\omega l = 2\,k\pi$.
La valeur choisie pour k doit satisfaire (11).
Notons que (11) est vérifiée $\forall k$.
Pour $k = 1$: $\omega l = 2\,\pi$, comme $\omega^2 = \dfrac{F}{EI(G, \vec{z})}$.

On obtient : $F_c = \dfrac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{\left(\dfrac{l}{2}\right)^2}$.

On peut garder la même relation (4) pour définir la charge critique d'Euler, à condition toutefois d'écrire celle-ci :

$$\boxed{F_c = \frac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{L^2}}. \qquad (12)$$

Dans le cas de notre étude qui correspond à un encastrement parfait aux deux extrémités il suffit de préciser que : $L = \dfrac{l}{2}$.
L désigne alors la **longueur libre de flambage** et dépend de la nature des liaisons aux extrémités.

1.4. LONGUEUR LIBRE DE FLAMBAGE

- Pour une poutre articulée (liaisons pivot) à ses deux extrémités : $L = l$ (*paragraphe 1.2*).
- Pour une poutre encastrée (parfaitement) à ses deux extrémités : $L = \dfrac{l}{2}$ (voir ci-dessus).
- Pour une poutre encastrée à une extrémité et en liaison pivot à l'autre : $L = 0{,}7\,l$.
- Pour une poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre : $L = 2\,l$. etc.

Sur le modèle du *paragraphe 1.3,* le lecteur pourra retrouver ces deux dernières valeurs de la longueur libre de flambage.
Les équations (8), (9), (10), (11) ci-dessus n'étant pas indépendantes ne permettent pas le calcul de A, et μ.
On sait seulement que : $A = -\dfrac{\mu}{F}$ et $B = 0$,
et que pour $F = F_c$, alors $\omega l = 2\,\pi$.

Reprenons l'équation de la déformée (7) et remplaçons A par $-\dfrac{\mu}{F}$:

$$y = \frac{\mu}{F}(1 - \cos \omega x).$$

La flèche y est maximale lorsque $\cos \omega x = -1$, c'est-à-dire pour $\omega x = \pi$, soit pour $x = \dfrac{l}{2}$ ce qui était prévisible. Alors :

$$\boxed{y_{max} = \frac{2\,\mu}{F}}. \qquad (13)$$

Notons que μ, donc A est indéfini.

1.5. DOMAINE D'EMPLOI DU FLAMBAGE. ÉLANCEMENT

Nous venons de voir qu'en flambage, la détermination de la charge critique d'Euler F_c se fait dans tous les cas de figure en employant la relation

$$\boxed{F_c = \frac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{L^2}}$$

à condition de définir L non pas comme la longueur de la poutre mais comme la longueur libre de flambage. D'autre part, nous avons vu que la sollicitation de flambage, suit et se combine à une sollicitation de compression. La question qui se pose est la suivante : Quand la poutre doit-elle être calculée simplement en compression ? Quand doit-elle être calculée en flambage ?
En effet, on conçoit qu'une poutre courte et trapue doit être calculée en compression alors qu'une poutre longue et élancée doit être calculée en flambage. On définit donc pour une poutre **l'élancement.**

$$\boxed{\lambda = \frac{L}{\rho}}. \qquad (14)$$

L est la longueur libre de flambage,
ρ est le rayon de giration de la section :

$$\rho = \sqrt{\frac{I(G, \vec{z})}{S}},$$

avec
$I(G, \vec{z})$ = moment quadratique minimal de la section suivant l'axe principal perpendiculaire au plan de la déformation de flambage.
S = aire de la section droite.
Unités : $I(G, \vec{z})$: mm^4 ; S : mm^2 ; ρ : mm ; L : mm ; λ : sans unité.

1.6. CALCUL DE RÉSISTANCE AU FLAMBAGE (EULER)

1.6.1. Coefficient de sécurité

La charge critique d'Euler F_c représente une limite qui ne doit être atteinte en aucun cas.
Soit F la charge axiale limite que l'on peut adopter

$$k = \frac{F_c}{F}.$$

représente un coefficient de sécurité qui en principe dépend, des conditions d'utilisation, du type de la construction etc... On prend en général pour k le double du coefficient de sécurité habituel s,

$$s = \frac{\sigma_e}{\sigma_{pc}}$$

avec
σ_e = contrainte limite élastique
σ_{pc} = contrainte pratique de compression.
On écrira donc :

$$k = 2\,s$$

et par conséquent :

$$\boxed{F = \frac{\sigma_{pc}}{2\,\sigma_e} \times F_c}. \qquad (15)$$

1.6.2. Elancement critique λ_c

Dans l'expression de la déformée sous sa forme différentielle :

$$EI(G, \vec{z})\, y'' = M_{f_z}.$$

— **Lorsque $M_{f_z} = 0$,** il s'ensuit que : $y'' = 0$; ce qui définit les points d'inflexion de la déformée. En ces points, seule la contrainte normale de compression est à prendre en compte. On notera celle-ci :

$$\sigma_{\text{comp}} = \frac{F}{S}. \qquad (16)$$

— **Lorsque M_{f_z} est maximum,** on admet pratiquement que la contrainte normale totale atteindra le double de la contrainte de compression, ceci est un fait expérimental.
Cette contrainte maximale $2\,\sigma_{\text{comp}}$ doit alors être égale à la contrainte pratique de compression σ_{pc}.

$$\frac{2\,F}{S} = \sigma_{pc}.$$

Soit d'après (15) :

$$\frac{\sigma_{pc}}{\sigma_e} \times \frac{F_c}{S} = \sigma_{pc}$$

soit

$$F_c = \sigma_e\, S. \qquad (17)$$

Dans (17), remplaçons la charge critique d'Euler F_c par sa valeur $\dfrac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{L^2}$ dans laquelle on fait apparaître l'élancement $\lambda = \dfrac{L}{\rho}$ avec

$$\rho = \sqrt{\frac{I(G, \vec{z})}{S}}\,; \quad \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \sigma_e.$$

Cette relation fait apparaître la notion d'élancement critique λ_c, élancement à partir duquel la poutre devra être calculée au flambage.

$$\boxed{\lambda_c^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_e}}. \qquad \textbf{(18)}$$

Notons que cette valeur de l'élancement critique ne dépend que des caractéristiques mécaniques du matériau.
Pour l'acier A33 :
$E = 2 \times 10^5$ MPa, $\sigma_e = 155$ Mpa $\quad \boldsymbol{\lambda_c \approx 113.}$
Pour l'acier 45SCD6 :
$E = 2 \times 10^5$ Mpa, $\sigma_e = 1\,370$ MPa $\quad \boldsymbol{\lambda_c \approx 38.}$
Les valeurs moyennes adoptées sont en général :

$\lambda_c = 100$ pour les profilés acier
$\lambda_c = 60$ pour les poteaux en fonte
$\lambda_c = 70$ pour les poteaux en bois

(ces valeurs ne représentent que des ordres de grandeur).

1.6.3. Condition de résistance au flambage (Euler)

Calculons par exemple la force F admissible d'après Euler, en rentrant $F_c = \dfrac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{L^2}$ dans l'expression (15) ci-dessus :

$$F = \frac{\sigma_{pc}}{2\,\sigma_e} \times \frac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{L^2}.$$

En écrivant que $\lambda_c^2 = \dfrac{\pi^2 E}{\sigma_e}$ et

$$\lambda^2 = \left(\frac{L}{\rho}\right)^2 = \frac{L^2 S}{I(G, \vec{z})}.$$

Il vient après simplification :

Euler :

$$\boxed{F = \frac{\sigma_{pc}\, S}{2\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}. \qquad \textbf{(19)}$$

Sous cette forme, l'expression de la charge limite admissible (selon Euler) est intéressante à plus d'un titre :

— le numérateur $\sigma_{pc} S$ représente la force axiale que l'on pourrait appliquer en compression simple ;
— le dénominateur apparaît alors comme un terme correctif tenant compte de l'élancement λ de la poutre.

1.7. RÉCAPITULATION DES CRITÈRES DE RÉSISTANCE

Suivant la valeur de l'élancement λ, il est d'usage d'employer l'une des trois relations suivantes.
On notera que pour des élancements croissants, la charge limite décroît.

Poutres courtes : $\lambda < 20$ (acier)
Calcul en compression simple :

$$\boxed{F = \sigma_{pc} S} \quad \textbf{compression}.$$

Poutres moyennes : $20 < \lambda < 100$ (acier)
On utilisera la formule expérimentale de Rankine :

$$\boxed{F = \frac{\sigma_{pc} S}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad \textbf{Rankine}.$$

Poutres élancées $\lambda > 100$ (acier)
Calcul au flambage d'Euler :

$$\boxed{F = \frac{\sigma_{pc} S}{2\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad \textbf{Euler}.$$

1.8. APPLICATION

Considérons une poutre de section $S = 400\ \text{mm}^2$ et de moment quadratique $I(G, \vec{z}) = 10^5\ \text{mm}^4$ en acier de contrainte pratique de compression $\sigma_{pc} = 100$ MPa. Soit $\lambda_c = 100$ l'élancement critique pour l'acier utilisé. Etudions successivement trois cas, correspondant à trois valeurs très différentes de longueur libre de flambage L : $L_1 = 270$ mm ; $L_2 = 900$ mm ; $L_3 = 2\,000$ mm.

1er cas : $L_1 = 270$ mm.

Calculons l'élancement $\lambda = \frac{L}{\rho}$ avec

$$\rho = \sqrt{\frac{I(G, \vec{z})}{S}}.$$

$$\rho = 15{,}8\ \text{mm} ; \quad \lambda = \frac{270}{15{,}8} ; \quad \lambda \approx 17.$$

Pour $\lambda = 17$, la poutre doit être calculée en compression simple :

$$F_1 = \sigma_{pc} S \qquad \mathbf{F_1 = 40 \times 10^3\ N}.$$

2e cas : $L_2 = 900$ mm

alors $\lambda = \frac{900}{15{,}8}$; $\lambda \approx 57$.

Pour $\lambda = 57$, la poutre doit être calculée d'après la formule de Rankine :

$$F_2 = \frac{\sigma_{pc} S}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

$$F = 40 \times 10^3 \times 0{,}75 \qquad \mathbf{F_2 = 30 \times 10^3\ N}.$$

3e cas : $L_3 = 2\,000$ mm

alors $\lambda = \frac{2\,000}{15{,}8}$; $\lambda \approx 126$.

Pour $\lambda = 126$, la poutre doit être calculée d'après la formule d'Euler :

$$F_3 = \frac{\sigma_{pc} S}{2\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

$$F_3 = 40 \times 10^3 \times 0{,}3 \qquad \mathbf{F_3 = 12 \times 10^3\ N}.$$

2. ÉTUDE DE CAS RÉELS

Evidemment, tous les cas de figure possibles peuvent se présenter, pour lesquels les hypothèses d'Euler ne sont pas vérifiées. Nous allons traiter deux cas classiques en précisant bien que seule la méthode utilisée offre un intérêt.

2.1. POUTRE EN LIAISON PIVOT À SES DEUX EXTRÉMITÉS ET POSSÉDANT UNE DÉFORMATION INITIALE

Nous avons vu au *paragraphe 1.2* relation (5) que l'équation de la déformée est de la forme :

$$y = B \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Supposons que, la poutre n'étant pas chargée, la ligne moyenne ait pour équation :

$$y_0 = a \sin \frac{\pi x}{l},$$

avec $a =$ ordonnée au milieu C de la poutre *(fig. 9.4)* :

en C : $$\begin{cases} x = \dfrac{l}{2} \\ y_0 = a . \end{cases}$$

Fig. 9.4.

Appliquons aux points A et B les deux glisseurs dont les résultantes respectives sont :

$$\vec{A}(2 \to 1) = F\vec{x}$$

et $$\vec{B}(3 \to 1) = -F\vec{x}.$$

Et exprimons au centre de surface G d'une section droite le torseur des efforts de cohésion.
Notons que les coordonnées de G dans $\mathcal{R}_0$ s'expriment par :

$$G \begin{vmatrix} x \\ y + y_0 \end{vmatrix}$$

avec
y = déformation de flexion,
y_0 = flèche initiale.

On obtient donc pour $\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}$:

$$\begin{cases} \vec{R} = -F\vec{x} \\ \vec{M}_G = \overrightarrow{GB} \wedge (-\vec{F}) . \end{cases}$$

Soit pour le moment de flexion suivant $\vec{z}$:

$$M_{f_z} = -F\left(y + a \sin \frac{\pi x}{l}\right).$$

Exprimons la déformation de flexion :

$$EI(G, \vec{z})\, y'' = M_{f_z}$$

soit :

$$y'' + \frac{F}{EI(G, \vec{z})}\, y = -\frac{F}{EI(G, \vec{z})}\, a \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (1)$$

La solution complète de l'équation différentielle (1) est en posant toujours $\omega^2 = \dfrac{F}{EI(G, \vec{z})}$:

$$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x + \frac{a}{\left(\dfrac{\pi}{\omega l}\right)^2 - 1} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (2)$$

Calculons A et B avec les conditions aux limites
- **en A :** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = A$
- **en B :** $\begin{cases} x = l \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = B \sin \omega l$ soit $B = 0$.

Donc, équation de la déformation y :

$$y = \frac{a}{\left(\dfrac{\pi}{\omega l}\right)^2 - 1} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Notons que y ne représente pas la flèche totale mais seulement la déformation élastique de flexion.
y est maximal pour $\sin \dfrac{\pi x}{l} = 1$, c'est-à-dire pour $x = \dfrac{l}{2}$, donc en C :

$$y_c = \frac{a}{\left(\dfrac{\pi}{\omega l}\right)^2 - 1}. \quad (3)$$

Exprimons la flèche maximale en C : $f_c = y_c + a$.
Notons que nous connaissons $\omega^2 = \dfrac{F}{EI(G, \vec{z})}$ ainsi que la charge critique d'Euler $F_c = \dfrac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{l^2}$.

Exprimons le rapport $\dfrac{F}{F_c}$: $\quad \dfrac{F}{F_c} = \left(\dfrac{\omega l}{\pi}\right)^2$

et donc :

$$\boxed{f_c = \frac{a}{1 - \dfrac{F}{F_c}}}. \quad (4)$$

Représentons graphiquement la variation de la flèche maximale f_c en C en fonction du rapport $\dfrac{F}{F_c}$ *(fig. 9.5)*.
Notons que pour $F = F_c$ la flèche est théoriquement infinie.

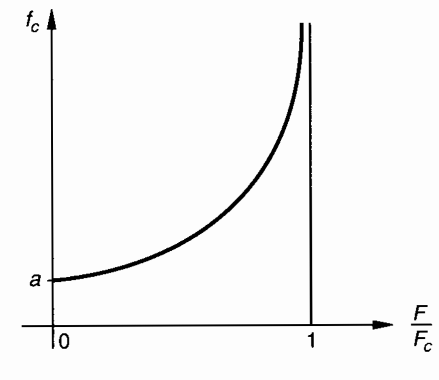


Fig. 9.5.

2.2. POUTRE SOUMISE À SES DEUX EXTRÉMITÉS À DES ENCASTREMENTS IMPARFAITS

Supposons que ces encastrements génèrent un moment s'opposant à la déformation et proportionnel à l'angle de celle-ci. Supposons qu'il n'y ait pas de déformation initiale. Donnons deux *figures* (*9.6 a* et *b*) telles que :
9.6 a = configuration avant application de l'effort ;
9.6 b = configuration en cours de flexion.

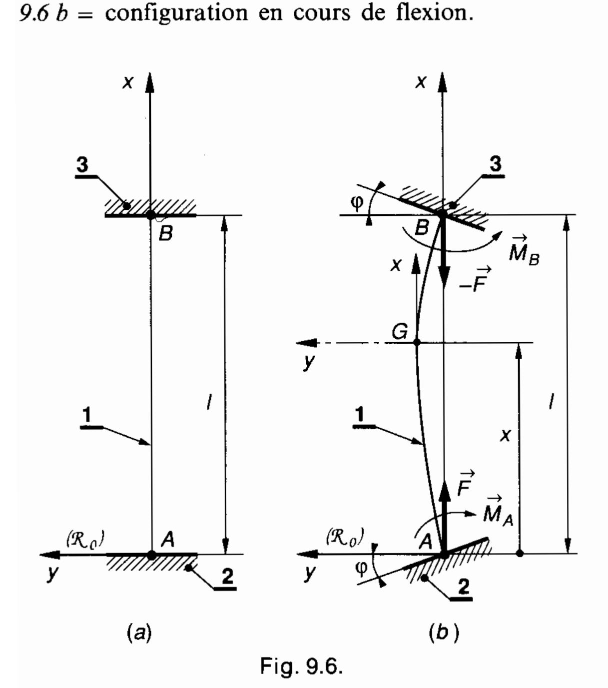


Fig. 9.6.

Définissons les torseurs de liaison en A et B (*fig. 9.6b*)

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{A}(2 \to 1)\\ \vec{M}_A(2 \to 1)\end{matrix}\right\}$$

avec : $\left|\begin{array}{l}\vec{A}(2 \to 1) = F\vec{x}\\ \vec{M}_A(2 \to 1) = \vec{M}_A = -k\varphi\vec{z}\,.\end{array}\right.$

(k = coefficient de proportionnalité entre le moment M_A et l'angle φ de pivotement de l'encastrement **2-1**.)

$$\{\mathcal{T}(3 \to 1)\} = {}_B\left\{\begin{matrix}\vec{B}(3 \to 1)\\ \vec{M}_B(3 \to 1)\end{matrix}\right\}$$

avec : $\left|\begin{array}{l}\vec{B}(3 \to 1) = -F\vec{x}\\ \vec{M}_B(3 \to 1) = \vec{M}_B = k\varphi\vec{z}\,.\end{array}\right.$

Exprimons les éléments de réduction en G du torseur des forces de cohésion :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = {}_G\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{M}_G\end{matrix}\right\}$$

avec : $\left\{\begin{array}{l}\vec{R} = -F\vec{x}\\ \vec{M}_G = \vec{M}_B + \overrightarrow{GB} \wedge (-\vec{F})\end{array}\right.$

soit : $M_{f_z} = -Fy + k\varphi$.

L'équation différentielle de la déformée est alors :

$$EI(G, \vec{z})\, y'' = M_{f_z}$$

soit : $$EI(G, \vec{z})\, y'' = -Fy + k\varphi\,.$$

En posant toujours $\omega^2 = \dfrac{F}{EI(G, \vec{z})}$:

$$\frac{y''}{\omega^2} + y = \frac{k\varphi}{F}\,. \qquad (5)$$

L'équation (5) est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, avec second membre, dont la solution générale est :

$$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x + \frac{k\varphi}{F} \qquad (6)$$

$$y' = -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x\,. \qquad (7)$$

Nous connaissons quatre conditions aux limites ; compte tenu de la symétrie, elles ne sont pas indépendantes.

- **En A :** $\left\{\begin{array}{l}x = 0\\ y = 0\end{array}\right. \Rightarrow 0 = A + \dfrac{k\varphi}{F}$ (8)

  $\left\{\begin{array}{l}x = 0\\ y' = \varphi\end{array}\right. \Rightarrow \varphi = B\omega$ (9)

($\tan\varphi \sim \varphi$)

- **En B :**

$\left\{\begin{array}{l}x = l\\ y = 0\end{array}\right. \Rightarrow 0 = A\cos\omega l + B\sin\omega l + \dfrac{k\varphi}{F}$ (10)

$\left\{\begin{array}{l}x = l\\ y' = -\varphi\end{array}\right. \Rightarrow -\varphi = -A\omega\sin\omega l + B\omega\cos\omega l\,.$ (11)

En résolvant ce système, remplaçons $A = -\frac{k\varphi}{F}$; $B = \frac{\varphi}{\omega}$, (10) s'écrit après simplification par φ :

$$0 = -\frac{k}{F}\cos\omega l + \frac{1}{\omega}\sin\omega l + \frac{k}{F}.$$

On peut résoudre cette dernière équation en posant $\tan\frac{\omega l}{2} = t$; on trouve : $\tan\frac{\omega l}{2} = -\frac{F}{k\omega}$. Si on se place dans le cas limite du flambage, alors $F = F_c$ et :

$$\boxed{\tan\frac{\omega l}{2} = -\frac{F_c}{k\omega}}. \qquad (12)$$

La détermination de F_c peut se faire graphiquement *(fig. 9.7)*. Remplaçons $\omega = \sqrt{\frac{F_c}{EI(G, \vec{z})}}$

$$\tan\left[\frac{l}{2}\cdot\sqrt{\frac{F_c}{EI(G, \vec{z})}}\right] = -\frac{\sqrt{EI(G, \vec{z})\,F_c}}{k}. \qquad (13)$$

Effectuons un changement de variable et posons :

$$\frac{l}{2}\cdot\sqrt{\frac{F_c}{EI(G, \vec{z})}} = x. \qquad (14)$$

Le premier membre de (13) prend la forme :

$$y_1 = \tan x\,;$$

le second membre de (13) prend la forme :

$$y_2 = -\frac{2\,EI(G, \vec{z})}{kl}\,x.$$

Résolution graphique de $y_1 = y_2$

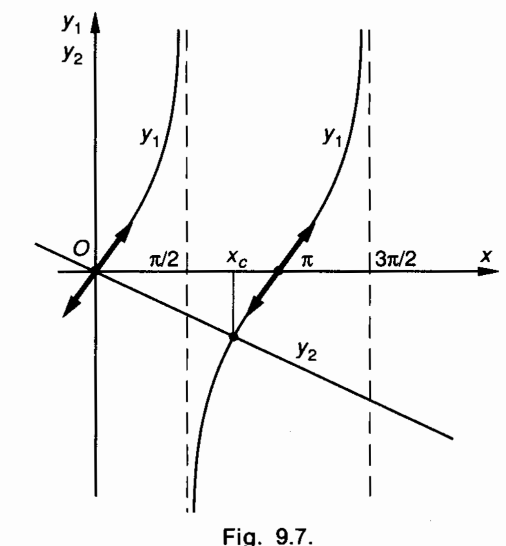


Fig. 9.7.

On remarque que pour $k = 0$ (articulations pivot parfaites) $y_2 \to -\infty$; $y_1 \to -\infty$; $x = \frac{\pi}{2}$, la relation (14) permet d'écrire :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{l^2}.$$

Pour $k \to \infty$; c'est-à-dire pour un encastrement parfait en A et B, $y_2 = 0$; $y_1 = 0$; $x = \pi$, la relation (14) permet d'écrire :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{L^2}$$

(voir *paragraphe 1.4*).
Pour $k \neq 0$ l'intersection des courbes $y_1(x)$ et $y_2(x)$ donne une valeur de x_c qui portée dans (14) permet le calcul de la charge critique correspondante.

3. PRINCIPE DE LA MÉTHODE DE DUTHEIL

3.1. PRINCIPE

La méthode de Dutheil a ceci de particulier, qu'elle est applicable à une pièce comprimée quel que soit son élancement. Elle est par ailleurs vérifiée avec une précision très acceptable par l'expérience.
Sous l'action d'un effort de compression F, et en admettant que la poutre fléchisse, les contraintes dans une section droite sont les contraintes normales dues à une sollicitation composée de compresion-flexion.

$$\boxed{|\sigma|_{\max} = \left|\frac{N}{S} - \frac{M_{f_z}}{\frac{I(G, \vec{z})}{v}}\right|}.$$

Voir relation (1) du *paragraphe 3.1* au *chapitre 8.*

3.2. CALCUL DE RÉSISTANCE

Nous avons vu au *paragraphe 2.1,* relation (4) que la flèche maximale au milieu d'une poutre ayant une flèche initiale a s'écrit :

$$f = \frac{a}{1 - \frac{F}{F_c}}.$$

Dans la section supportant le moment de flexion maximal :

$$|M_{f_z}|_{max} = F \times \frac{a}{1 - \frac{F}{F_c}}$$

avec $$F_c = \frac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{L^2}.$$

On écrit alors pour une charge axiale $|N| = F$:

$$|\sigma_{max}| = \frac{F}{S} + \frac{\pi^2 Eav}{L^2} \cdot \frac{F}{F_c - F}. \qquad (1)$$

Dans la suite des calculs on écrira :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{S} = \text{contrainte critique d'Euler}.$$

Dans la relation (1) exprimant la contrainte normale totale σ, posons pour simplifier les écritures :

$$\sigma_0 = \frac{\pi^2 Eav}{L^2}$$

(σ_0 est homogène à une contrainte).

Exprimons comme condition limite que $\sigma \leqslant \sigma_e$ pour une charge axiale $F = \sigma S$, ce qui revient à dire que la poutre sera calculée en compression mais en majorant la contrainte pour tenir compte du moment de flexion.

(1) s'écrit alors après simplification par S :

$$\sigma^2 - \sigma(\sigma_e + \sigma_c + \sigma_0) + \sigma_c \sigma_e \geqslant 0. \qquad (2)$$

Notons qu'en écrivant $\sigma \leqslant \sigma_e$ aucun coefficient de sécurité n'intervient ; nous devrons en tenir compte plus tard.

On sait résoudre cette inéquation (2) du second degré en σ.
Pour simplifier les écritures, Dutheil a proposé d'écrire

$$\sigma_e + \sigma_c + \sigma_0 = \sigma_t.$$

D'autre part, le terme σ_0 intervenant en terme correctif, Dutheil propose comme expression de σ_t :

$$\sigma_t \approx \sigma_c + 1{,}3\, \sigma_e \qquad (3)$$

ce qui évite le calcul de σ_0. Notons que cette expression (3) repose sur une vérification expérimentale. La résolution de (2) donne alors :

$$\boxed{\sigma \leqslant \frac{1}{2}\sigma_t - \sqrt{\frac{\sigma_t^2}{4} - \sigma_e \sigma_c}}. \qquad (4)$$

Nota : Cette formule de Dutheil est vraie quel que soit l'élancement de la poutre.
Notons cependant que la relation (4) ne fait intervenir aucun coefficient de sécurité.

La contrainte σ ainsi calculée est appelée **contrainte d'affaissement** ou **contrainte de ruine.** Pour un matériau comme la fonte ou le béton, la **ruine** intervient sur les fibres tendues car :

$$\sigma_{e(ext)} \ll \sigma_{e(comp)}.$$

3.3. APPLICATION

Une colonne en fonte a une forme tubulaire telle que : $D = 150$ mm, $d = 120$ mm. Sa longueur est $l = 3{,}5$ m.
Cette colonne est parfaitement encastrée à sa base et libre au sommet.
On donne les caractéristiques mécaniques de la fonte : $E = 10^5$ MPa, σ_e(en compression) = 275 MPa.

QUESTION 1

Calculer l'élancement λ de cette colonne et conclure quant au type de calcul qu'il faut envisager.

RÉPONSE

Calcul du rayon de giration $\rho = \sqrt{\frac{I(G, \vec{z})}{S}}$

- avec : $I(G, \vec{z}) = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$:

$I(G, \vec{z}) \approx 147.10^5 \text{ mm}^4$;

- avec : $S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$:

$S \approx 6\,362 \text{ mm}^2$;

$$\boldsymbol{\rho = 48 \text{ mm}}.$$

Elancement : $\lambda = \frac{L}{\rho}$,

avec, pour une poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre, une longueur libre de flambage $L = 2\,l = 7$ m (voir *paragraphe 1.4*).

$\lambda = \frac{7\,000}{48}$; $\boldsymbol{\lambda = 146.}$

L'élancement est supérieur à 60 (limite pour la fonte).
Le calcul doit donc être fait au flambage. A titre comparatif nous utiliserons successivement la méthode théorique d'Euler puis la méthode de Dutheil.

QUESTION 2

Pour un coefficient de sécurité $s = 5$, quelle charge maximale peut être supportée par la colonne ? Utiliser la méthode d'Euler.

RÉPONSE

Nous avons calculé l'élancement $\lambda = 146$ alors que l'élancement critique pour cette fonte est $\lambda_c = \sqrt{\dfrac{\pi^2 E}{\sigma_e}}$ soit $\lambda_c \approx 60$, donc la condition d'Euler est requise :

$$F = \frac{\sigma_{pc} S}{2\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2};$$

avec $\sigma_{pc} = \dfrac{\sigma_e}{s}$; $\quad \sigma_{pc} = 55$ MPa,

alors $F = \dfrac{55 \times 6\,362}{2\left(\dfrac{146}{60}\right)^2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{F \approx 29{,}5 \times 10^3}$ **N.**

QUESTION 3

Pour le même coefficient de sécurité, calculer la charge maximale par la méthode de Dutheil.

RÉPONSE

Expression de la contrainte d'affaissement :

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma_l - \sqrt{\frac{\sigma_l^2}{4} - \sigma_e \sigma_c}$$

avec $\sigma_l = \sigma_c + 1{,}3\,\sigma_e$.

Calculons σ_c contrainte critique d'Euler :

$\sigma_c = \dfrac{F_c}{S}$ $\qquad$ avec

$$F_c = \frac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{L^2}$$

$$F_c = \frac{\pi^2 \times 10^5 \times 147 \times 10^5}{49 \times 10^6}; \qquad F_c \approx 296 \times 10^3 \text{ N},$$

$$\text{et} \quad \sigma_c = \frac{296 \times 10^3}{6\,362}; \qquad \sigma_c = 46{,}5 \text{ MPa}.$$

Alors $\quad \sigma_l = 404$ MPa,

et pour la contrainte d'affaissement σ :

$\sigma = 202 - \sqrt{\dfrac{404^2}{4} - 275 \times 46{,}5}$; soit $\boldsymbol{\sigma \approx 34{,}6}$ **MPa.**

Avec un coefficient de sécurité de 5 :

$\sigma \leqslant \dfrac{34{,}6}{5}$; $\qquad$ soit $\quad \sigma \leqslant 6{,}9$ MPa

et par conséquent une charge limite

$F = \sigma S \qquad$ $\boldsymbol{F = 43{,}9 \times 10^3}$ **N.**

4. CALCUL PRATIQUE D'UNE POUTRE

Le plan que nous allons suivre dans ce paragraphe est le suivant :

- **4.1 Présentation du problème et hypothèses.**
- **4.2. Justification du calcul de flambage.**
- **4.3. Analyse du torseur des efforts de cohésion.**
- **4.4. Equation de la déformée.**
- **4.5 Expression du moment de flexion maximal et de la charge critique d'Euler.**
- **4.6 Expression de la flèche maximale quand $F < F_c$.**
- **4.7 Calcul de la charge maximale pour un coefficient de sécurité *s*. (Compression, Rankine, Euler ?)**
- **4.8 Calcul de la contrainte d'affaissement de Dutheil et de la charge maximale correspondante pour le même coefficient de sécurité *s*.**

4.1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME ET HYPOTHÈSES

Une poutre IPE 160 de longueur $l = 6$ m repose sur deux appuis A et B. La poutre est horizontale et les appuis A et B sont des liaisons linéiques sans adhérence d'axes respectifs $(A, \vec{z})$ et $(B, \vec{z})$ *(fig. 9.8)*.

La poutre est soumise à son propre poids. Le constructeur précise les données suivantes :

$I(G, \vec{z}) = 900$ cm^4 ; $S = 19{,}4$ cm^2 ;

$E = 2 \times 10^5$ MPa ;

$\sigma_e = 380$ MPa, $\quad$ masse par mètre $= 22$ kg/m .

On prendra $g = 9{,}81$ m/s^2.

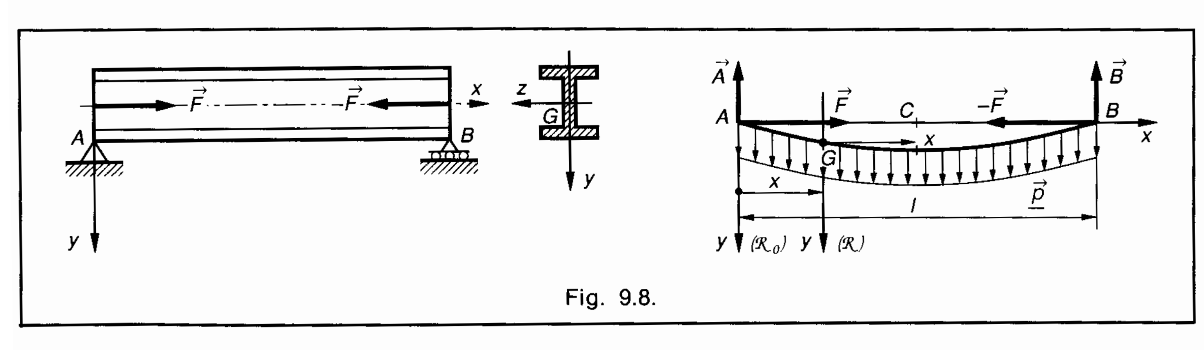


Fig. 9.8.

La poutre est chargée axialement par deux actions mécaniques qui se réduisent en A et B à deux glisseurs tels que :

$$\{\mathcal{T}_1\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{F}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\} \quad \text{avec } \vec{F} = F\vec{x}$$

$$\{\mathcal{T}_2\} = {}_B\left\{\begin{matrix}-\vec{F}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}.$$

On modélise la poutre par sa ligne moyenne AB et on admet à priori, mais la symétrie le permet, que le moment de flexion, ainsi que la flèche seront maximum en C milieu de AB c'est-à-dire pour $x = \frac{l}{2}$.

Nota : Pour avoir des flèches positives, $\vec{y}$ est orienté vers le bas.

4.2. JUSTIFICATION DU CALCUL DE FLAMBAGE

Sous l'influence des résultantes $\vec{F}$ en A, $-\vec{F}$ en B et de la densité linéïque $\vec{p}$ (poids par unité de longueur), la poutre AB est fléchie et comprimée.
Calculons l'élancement λ de la poutre pour une flexion dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$.

— Calcul du rayon de giration de la section :

$$\rho = \sqrt{\frac{I(G, \vec{z})}{S}} \qquad \rho = 6{,}8 \text{ cm soit } \rho = 68 \text{ mm.}$$

— Calcul de l'élancement : $\lambda = \frac{L}{\rho}$.

Pour une poutre dont les extrémités A et B sont soit articulées soit appuyées sans adhérence : $L = l = 6\,000$ mm

$$\boldsymbol{\lambda = 88}.$$

Pour une telle valeur de l'élancement on peut envisager un calcul au flambage. Le calcul de l'élancement critique λ_c déterminera la méthode de calcul (4.7).

4.3. ANALYSE DU TORSEUR DES EFFORTS DE COHÉSION

Soit une section droite repérée par le centre de surface G tel que $\overrightarrow{AG} = x\vec{x}$ et soit le repère de définition des sollicitations $\mathcal{R} = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Calculons les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion :

$$\left|\begin{array}{l}\vec{R} = \vec{B} - \vec{F} + \vec{p}(l - x)\\ \vec{M}_G = \overrightarrow{GB} \wedge (\vec{B} - \vec{F}) + \frac{\overrightarrow{GB}}{2} \wedge \vec{p}(l - x).\end{array}\right.$$

Calculons M_{f_z} en notant que $\|\vec{B}\| = \frac{pl}{2}$

$$M_{f_z} = -Fy - \frac{pl}{2}x + \frac{p}{2}x^2. \qquad (1)$$

Notons que $p = 216$ N/m, ou 0,216 N/mm.

4.4. ÉQUATION DE LA DÉFORMÉE

Dans une poutre fléchie on sait que :

$$EI(G, \vec{z})\, y'' = M_{f_z}$$

et donc :

$$\frac{EI(G, \vec{z})}{F}\, y'' + y = \frac{p}{2F}(x^2 - lx).$$

Equation différentielle du second ordre dont la solution est :

$$y = A \sin \omega x + B \cos \omega x + \frac{p}{2F}\left(x^2 - lx - \frac{2}{\omega^2}\right)$$

en posant $\omega^2 = \frac{F}{EI(G, \vec{z})}$.

- Calcul des constantes A et B :

— En A : $\begin{cases}x = 0\\ y = 0\end{cases} \Rightarrow 0 = B - \frac{p}{F\omega^2}$

donc : $\boldsymbol{B = \frac{p}{F\omega^2}}$.

— En B : $\begin{cases}x = l\\ y = 0\end{cases} \Rightarrow = 0 = A \sin \omega l + \frac{p}{F\omega^2}\cos \omega l - \frac{p}{F\omega^2}$

d'où on tire :

$$\boldsymbol{A = \frac{p}{F\omega^2} \times \frac{1 - \cos \omega l}{\sin \omega l}}.$$

*L'***équation de la déformée** *est donc :*

$$y = \frac{p}{F\omega^2}\left[\frac{1 - \cos \omega l}{\sin \omega l}\sin \omega x + \cos \omega x + \frac{\omega^2}{2}(x^2 - lx) - 1\right]. \quad (2)$$

4.5. EXPRESSION DU MOMENT DE FLEXION MAXIMAL ET DE LA CHARGE CRITIQUE D'EULER

Par hypothèse $M_{f_z \max}$ en C milieu de AB donc pour $x = \frac{l}{2}$.
On trouve alors d'après (1) :

$$M_{f_c} = -\frac{p}{\omega^2} \times \frac{1 - \cos\frac{\omega l}{2}}{\cos\frac{\omega l}{2}} + p\,\frac{l^2}{8}.$$

On remarque que lorsque $\cos\frac{\omega l}{2} = 0$, le moment de flexion en C est infini ; cela se produit pour la charge critique d'Euler F_c.
$\cos\frac{\omega l}{2} = 0$ entraîne que $\frac{\omega l}{2} = \frac{\pi}{2}$; soit $\omega^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$.
Comme par ailleurs nous avions posé $\omega^2 = \frac{F}{EI(G, \vec{z})}$ il s'ensuit que :

$$\boldsymbol{F_c = \frac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{l^2}}.$$

Résultat que nous connaissons bien.
Numériquement : $E = 2 \times 10^5$ MPa ;
$I(G, \vec{z}) = 9 \times 10^6$ mm^4 ; $l = 6 \times 10^3$ mm ;

donc $\quad \boldsymbol{F_c = 493 \times 10^3}$ **N**.

4.6. EXPRESSION DE LA FLÈCHE MAXIMALE QUAND $F < F_c$

Dans la relation (2) ci-dessus, donnant l'équation de la déformée, faisons $x = \frac{l}{2}$:

$$y_c = \frac{p}{F\omega^2}\left(\frac{1}{\cos\frac{\omega l}{2}} - 1 - \frac{l^2\omega^2}{8}\right). \qquad (3)$$

Pour une valeur inférieure à F_c, $F = 10^5$ N par exemple, calculons y_c :
On doit effectuer séparément :

$$\omega^2 = \frac{E}{EI(G, \vec{z})}; \qquad \omega^2 = 55{,}5.10^{-9}\,(\text{mm}^{-2});$$

$$\cos\frac{\omega l}{2} = 0{,}76;$$

$$p = 0{,}216 \text{ N/mm};$$

alors d'après (3) : $\boldsymbol{y_c \doteq 2{,}57}$ **mm**.

4.7. CALCUL DE RÉSISTANCE AU FLAMBAGE

Calculons l'élancement critique :

$$\lambda_c^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_e}; \qquad \lambda_c^2 = \frac{\pi^2 \times 2.10^5}{380};$$

$$\boldsymbol{\lambda_c = 72}.$$

L'élancement calculé $\lambda = 88$ est supérieur à λ_c, on emploiera donc la relation d'Euler :

$$F = \frac{\sigma_{pc} \times S}{2\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}, \qquad \text{avec } \sigma_{pc} = \frac{\sigma_e}{s}.$$

Adoptons un coefficient de sécurité de 5 ; alors :

$$F = \frac{76 \times 1\,940}{2\left(\frac{88}{72}\right)^2} \qquad \boldsymbol{F \approx 49{,}3 \times 10^3\ \text{N}}.$$

4.8. CALCUL DE LA CONTRAINTE D'AFFAISSEMENT DE DUTHEIL ET DE LA CHARGE MAXI F_{max} CORRESPONDANTE

On se souvient que la « contrainte d'affaissement » s'exprime par :

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma_t - \sqrt{\frac{\sigma_t^2}{4} - \sigma_e \sigma_c} \qquad \text{avec } \sigma_t = \sigma_c + 1{,}3\,\sigma_e.$$

- Calcul de la contrainte critique d'Euler σ_c

$$\sigma_c = \frac{F_c}{S} \qquad \text{avec } F_c = 493 \times 10^3 \text{ N};$$

$$S = 1\,940 \text{ mm}^2;$$

$$\sigma_c \approx 254 \text{ MPa}.$$

alors: $\quad \sigma_t = 748$ MPa, $\quad$ et $\boldsymbol{\sigma = 166}$ **MPa**.

Avec le même coefficient de sécurité $s = 5$, on obtient une charge limite :

$$F = \frac{\sigma S}{s} \qquad \boldsymbol{F \approx 64{,}4 \times 10^3\ \text{N}}.$$

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 Un poteau vertical est réalisé avec un profilé IAP 200.
Ses caractéristiques dimensionnelles principales sont :
longueur : $l = 6$ m ;
aire de la section droite : $S = 3\,315$ mm^2 ;
moment quadratique minimal de la section : $I(G, \vec{z}) = 170 \times 10^4$ mm^4 ;
module d'élasticité de l'acier : $E = 2 \times 10^5$ MPa ;
contrainte limite élastique : $\sigma_e = 280$ MPa.
Ce poteau est parfaitement encastré à ses deux extrémités et il supporte une charge axiale $F = 65 \times 10^3$ N.

QUESTIONS

1° Calculer l'élancement critique λ_c pour l'acier utilisé.

2° Calculer l'élancement du poteau sachant que pour une poutre encastrée à ses deux extrémités la longueur libre de flambage est $L = \frac{l}{2}$.

3° Le poteau doit-il être calculé au flambage ou à la compression simple ?

4° Calculer la charge critique d'Euler. Conclusion.

RÉPONSES

1° $\lambda_c = 84$.

2° $\lambda = 132{,}5$.

3° Au flambage.

4° $F_c = 372{,}85 \times 10^3$ N.
La charge appliquée est très inférieure à la charge critique. Comme $\lambda > 100$, on pourra calculer la contrainte soit avec la relation d'Euler, soit avec la méthode de Dutheil (voir exercice 2 suivant).

2 On souhaite poursuivre le calcul commencé à l'exercice 1 auquel on se reportera pour les caractéristiques dimensionnelles du poteau et de l'acier qui le constitue. On pourra également utiliser comme données les réponses de l'exercice 1.
On souhaite adopter un coefficient de sécurité de $s = 2{,}5$.

QUESTIONS

1° Calculer la charge limite par la relation d'Euler.

2° Par la méthode de Dutheil, calculer successivement la contrainte d'affaissement, puis avec un coefficient de sécurité $s = 2{,}5$ la charge limite.

RÉPONSES

1° $F = 74{,}6 \times 10^3$ N.

2° $\sigma = 79{,}3$ MPa ; $F = 105{,}14 \times 10^3$ N.

3 Une colonne creuse en fonte sert à supporter, partiellement, un plancher rapporté qui sert de plan de stockage pour des pièces détachées.
Cette colonne a pour dimensions $D = 180$ mm, $d = 150$ mm et sa hauteur est $l = 3$ m.
A sa base, elle est encastrée dans un socle de béton et son extrémité supérieure est libre.
On donne les caractéristiques de la fonte : $E = 10^5$ MPa $\sigma_{e(\text{comp})} = 350$ MPa ; on choisit un coefficient de sécurité $s = 7$.

QUESTIONS

1° Calculer l'élancement critique pour la fonte utilisée.

2° Calculer l'élancement de la colonne et choisir la méthode de calcul : compression simple, Rankine, Euler ? (On rappelle qu'ici : $L = 2\,l$.)

3° Calculer la charge axiale limite que peut supporter la colonne.

4° Utiliser la méthode de Dutheil et calculer la contrainte d'affaissement. Calculer la charge limite que peut supporter la colonne avec le même coefficient de sécurité.

RÉPONSES

1° $\lambda_c = 53{,}1$.
2° $\lambda = 102{,}44$ méthode d'Euler.
3° $F = 52{,}03 \times 10^3$ N.
4° $\sigma = 68{,}5$ MPa ; $F = 76 \times 10^3$ N.

4 Un treuil de chantier est suspendu en A à une potence articulée constituée de deux barres AB et AC en liaison pivot sans adhérence d'axe $\vec{z}$ en A, B et C *(fig. 9.9)*.

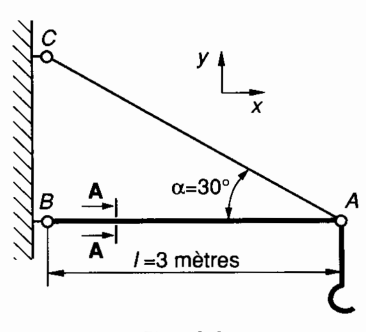


Fig. 9.9.

AC est un tirant de diamètre d. La poutre AB est constituée de deux cornières assemblées dont on donne les dimensions en coupe AA *(fig. 9.10)*.

Pour l'acier constituant ces cornières, on donne : $E = 2 \times 10^5$ MPa et $\sigma_e = 300$ MPa.

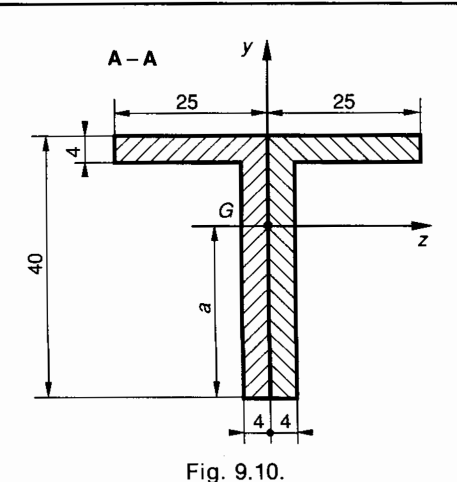


Fig. 9.10.

QUESTIONS

1° Calculer la cote *a* définissant la position du centre de surface *G* de la section droite de la double cornière *(fig. 9.10)*.

2° Calculer la section *S* et le moment quadratique $I(G, \vec{z})$ de la section droite de la double cornière.

3° Calculer pour l'acier utilisé l'élancement critique λ_c.

4° Calculer l'élancement λ de la poutre *AB* et choisir la méthode de calcul de la poutre *AB*.

5° Avec un coefficient de sécurité $s = 5$, calculer la charge axiale limite supportée par la poutre *AB* :
a) par la méthode d'Euler ;
b) par la méthode de Dutheil.

6° Quelle masse maximale peut-on suspendre au treuil en *A* ? (On donne $g = 9{,}81$ m/s^2.)

RÉPONSES

1° $a \approx 26{,}2$ mm.
2° $S = 488$ mm^2 ; $I(G, \vec{z}) \approx 78\,584$ mm^4.
3° $\lambda_c = 81$.
4° $\lambda = 236{,}4$. Calcul au flambage.
5° a) : $F = 1\,719$ N ;
b) : $F = 2\,593{,}6$ N.
6° $M = 101$ kg.

10 utilisation de logiciels en résistance des matériaux

Il existe dans le commerce de nombreux logiciels de résistance des matériaux. Nous allons utiliser et commenter dans ce chapitre un logiciel, relativement simple d'utilisation mais tout de même suffisamment performant pour résoudre la plupart des problèmes posés par la résistance (et la déformation) de poutres rectilignes travaillant en flexion plane simple ainsi qu'en flexion et extension ou compression.

Le logiciel que nous utilisons ici a été développé par la société ATEMI, 7 bis, rue des Aulnes, 69410 à Champagne au Mont d'Or. Nous l'utilisons avec l'autorisation de cette société et il s'intitule :

POUTRES 2D
Etude de structures planes
(version 5)

1. PRÉSENTATION DU LOGICIEL

Ce logiciel permet de calculer des structures planes de forme quelconque, structures constituées par des poutres droites dont la déformation s'effectue dans un plan qui contient une direction principale des sections droites.
La structure élémentaire est la poutre à 2 nœuds *(fig. 10.1)*.

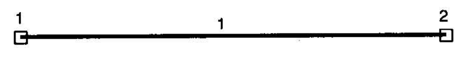


Fig. 10.1.

- **Poutre 1** du nœud origine 1 au nœud extrémité 2
- **La structure** calculée peut être isostatique ou hyperstatique, d'ordre quelconque.
- **Les charges** appliquées peuvent être :
  - — soit concentrées : glisseur ou couple
  - — soit réparties, avec un taux de charge, c'est-à-dire une densité linéique de force, uniforme.
- **Les appuis** peuvent être choisis parmi sept types d'appuis. Ceux-ci sont définis et schématisés dans le tableau ci-dessous *(fig. 10.2)*.

Schéma	Type d'appui
▷	Simple X
△	Simple Y
⌒)	Couple
Ⓐ	Pivot
⊼	Glissière X
▷|	Glissière Y
⊏⊢	Encastrement

Fig. 10.2.

2. MODÉLISATION D'UNE STRUCTURE

La structure modélisée est présentée sur le listing par :

FICHIER DE LA STRUCTURE : (Nom)

Les paramètres à définir sont :

2.1. UNITÉS

• **Unité de longueur :** Elle est choisie par l'utilisateur parmi m, dm, cm, mm. Les caractéristiques des sections : S, I_z, $\frac{I_z}{v}$, sont exprimées respectivement en cm^2, cm^4, cm^3 car c'est ainsi qu'elles sont fournies par les catalogues des constructeurs. Le logiciel fait automatiquement la conversion.

• **Unité de force :** Elle est imposée par le logiciel ; c'est le daN.

2.2. NŒUDS ET POUTRES

Une poutre est une entité géométrique qui relie deux nœuds. Les nœuds sont les points de jonction des poutres.
Toute charge concentrée crée un nœud en son point d'application.
Toute charge répartie crée une poutre entre le nœud début de la charge et le nœud fin de la charge.

EXEMPLE

Une poutre AD supportant une charge répartie entre A et B et une charge concentrée en C *(fig. 10.3)*

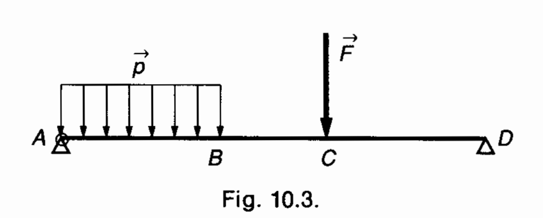


Fig. 10.3.

sera modélisée par une succession de 3 poutres numérotées **1**, **2**, **3** encastrées entre elles aux nœuds de liaison **1**, **2**, **3**, **4**. On choisit le nœud **1** en *appui pivot* et le nœud **4** en *appui simple Y (fig. 10.4)*. La présence d'un *appui pivot* est nécessaire pour que le logiciel puisse calculer une structure en équilibre.

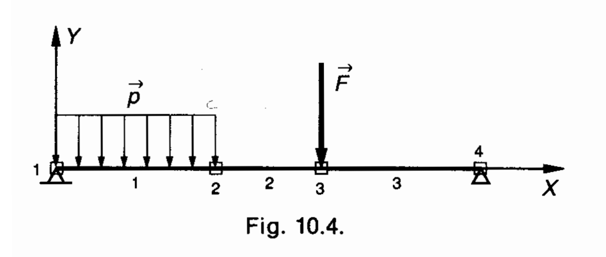


Fig. 10.4.

Le concept **liaison** traduit la nature de la liaison entre 2 poutres (ex. : nœud **2** = encastrement poutre **1** – poutre **2**).
Le concept **appui** traduit la nature de la liaison d'un nœud avec le milieu extérieur (ex. : nœud **4** = appui simple Y avec le milieu extérieur).

2.3. SECTION DROITE

La section droite d'une poutre peut être choisie dans une bibliothèque, fournie avec le logiciel et intégrée sur la disquette, qui contient les caractéristiques des profilés standards (I, H, U...).
(+ / –) choisit la position de (+) grande rigidité ou de (–) grande rigidité.
La section droite peut également être créée à la demande.

2.4. MATÉRIAU

La seule caractéristique utilisée dans le logiciel est le module de Young E. Il est défini en daN/cm^2.

2.5. REPÈRES

On utilise deux repères *(fig. 10.5)*.

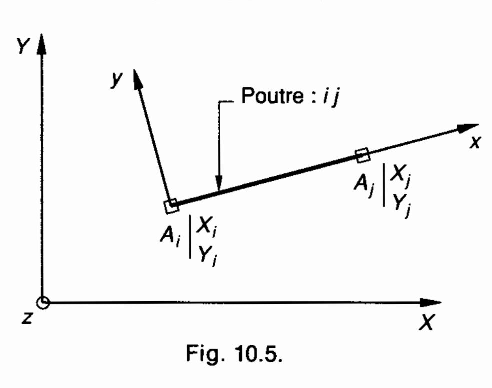


Fig. 10.5.

Le repère global (ou général) de base ($\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$).
Les repères locaux liés à chaque poutre. Par exemple (A_i, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) pour la poutre ij.

3. PROCESSUS DE MODÉLISATION

Rentrer dans le menu ACQUISITION et indiquer :
• l'unité de longueur ;
• les limites de la structure (encombrement) ;
• les coordonnées des nœuds dans le repère général ;
• le type de poutre (s) utilisé ;
• la nature et la valeur des charges :
  — concentrées,
  — réparties ;
• la position et la nature des appuis ;
• la nature des liaisons entre poutres (par défaut ce sont toujours des encastrements).

4. MENU PRINCIPAL

Il comprend six options :

- ACQUISITON : Permet de définir les données de la structure (voir *paragraphe 3* ci-dessus).
- CALCUL : Ordonne le calcul de la structure (déplacements, efforts, flèches, contraintes...).
- RESULT.*Nu* : Permet l'affichage sous forme de tableaux des résultats calculés précédemment.
- RESULT.*Gr* : Permet le dessin de la structure (déformée ou non) et des différents diagrammes (N, T_y, M_{f_z}...).
- LISTE : Affiche à tout moment la liste complète des données (à l'écran ou sur imprimante).
- DOS : Permet d'effectuer des opérations sur les fichiers (par exemple d'ajouter une section droite qui n'est pas en bibliothèque).

5. EXPLOITATION DES LISTINGS

5.1. PRÉSENTATION

Nous donnerons trois exemples de calcul :

N8 : Poutre encastrée.
N5 : Poutre en équilibre hyperstatique.
N10 : Portique.

Pour chaque exemple on trouvera dans l'ordre.

Fichier de la structure

— Nœuds
— Poutres
— Charges concentrées
— Charges réparties
— Appuis
— Liaisons.

Résultats numériques du calcul de la structure

— Déplacements des extrémités de poutres. Repère global.
— Déplacements des extrémités de poutres. Repère local.
— Charges extérieures appliquées aux nœuds.
— Efforts intérieurs dans les poutres.
— Flèches maximales.
— Contraintes maximales.

Résultats graphiques

Avec coefficient d'amplification au choix ; avec ou sans représentation des charges.

On donnera :

— Dessin de la structure non déformée avec les charges.
— Dessin de la structure déformée sans les charges.
— Diagramme des rotations des sections.
— Diagramme de l'effort tranchant.
— Diagramme de l'effort normal (éventuellement).
— Diagramme du moment de flexion.
— Diagramme des contraintes normales maximales.

5.2. REMARQUE

Dans le tableau de résultats des efforts intérieurs dans les poutres, on constate une alternance des signes (+) et (–) pour les valeurs en un même nœud mais attribuées à deux poutres adjacentes. Ceci est dû au fait que ces résultats sont indiqués dans les repères locaux liés successivement à chaque poutre. Pour qu'il y ait concordance entre les tableaux de résultats et les diagrammes il faut donc changer le signe de chaque résultat pour le nœud origine de la poutre.

Exemple dans la structure N5

Poutre 2, nœud 2.

Effort tranchant : lire + 1.850 E + 02 au lieu de – 1.850 E + 02.
Moment de flexion : lire + 9.250 E + 04 au lieu de – 9.250 E + 04.

6. DÉFINITION DES STRUCTURES ÉTUDIÉES

6.1. STRUCTURE N8 : POUTRE ENCASTRÉE EN 1 *(fig. 10.6)*

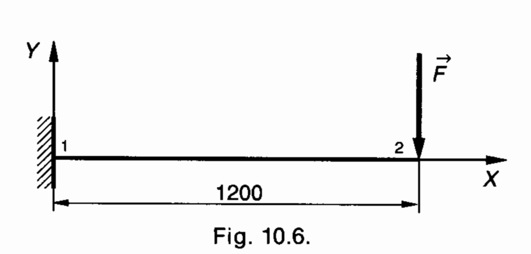


Fig. 10.6.

La poutre est un IPE 120, placée dans sa position de (+) grande rigidité c'est-à-dire pour son moment quadratique maximum noté I_z.
Le module de Young de l'acier est $E = 2 \times 10^6$ daN/cm².
La charge concentrée appliquée en **2** est :

$$\vec{F} = -200\ \vec{Y} \quad \text{(daN)}.$$

6.2. STRUCTURE N5 : POUTRE EN ÉQUILIBRE HYPERSTATIQUE

(fig. 10.7)

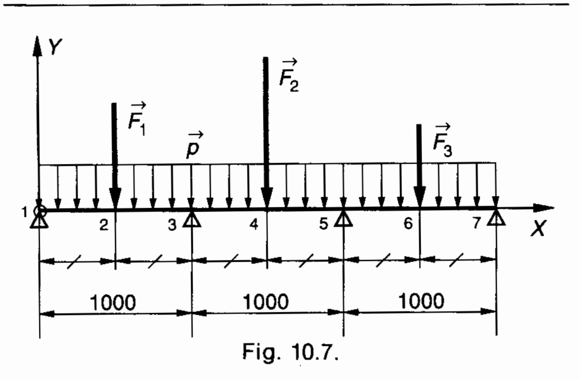


Fig. 10.7.

Cette poutre de longueur 3 m repose sur 4 appuis de niveau équirépartis en **1**, **3**, **5**, **7**.
Elle est constituée par un profilé IPN 80 placé dans sa position de (+) grande rigidité. Le module de Young de l'acier est $E = 2 \times 10^6$ daN/cm^2.
Les charges appliquées à la poutre sont :

— une charge uniformément répartie de densité linéique $\vec{p}$

$$\vec{p} = -1\ \vec{Y} \quad \text{(daN/mm)} ;$$

— Trois charges concentrées :

en **2** : $\vec{F}_1 = -120\ \vec{Y}$ (daN)

en **4** : $\vec{F}_2 = -200\ \vec{Y}$ (daN)

en **6** : $\vec{F}_3 = -80\ \vec{Y}$ (daN)

6.3. STRUCTURE N10 : PORTIQUE

(fig. 10.8)

Ce portique est constitué de trois poutres liées entre elles par soudure.
Les poutres verticales **1** et **2** sont des IPE 120 placées dans la position de (+) grande rigidité.
La poutre horizontale (**3** et **4**) est un PRCR 12 c'est-à-dire un profil creux rectangulaire de hauteur 12 cm, de largeur 8 cm et d'épaisseur 1 cm. Ce profil a été créé pour cette application.
Les poutres verticales **1** et **2** sont encastrées respectivement aux nœuds **1** et **5**.
Le module de Young pour l'acier est $E = 2 \times 10^6$ daN/cm^2. Cette structure supporte les charges suivantes :
Pour les poutres verticales **1** et **2**, une charge répartie horizontale (un fort vent par exemple) de densité linéique $\vec{p}$:

$$\vec{p} = 0{,}2\ \vec{X} \qquad \text{(daN/mm)} .$$

La poutre horizontale supporte en son milieu (nœud **3**) une charge concentrée :

$$\vec{F} = -2\,000\ \vec{Y} \qquad \text{(daN)} .$$

7. LISTINGS

Tels qu'ils ont été affichés sur l'imprimante et dans l'ordre : N8 ; N5 ; N10.

Fig. 10.8.

Fichier de la structure: N8

Longueur maximale de la structure : 1500.000
Hauteur maximale de la structure : 1500.000

Elle comporte 2 noeuds
1 Poutres
1 appuis
1 charges concentrées
0 charges réparties

NOEUDS

Unité: MM

Noeud	Coordon. X	Coordon. Y
1	0.00	750.00
2	1200.00	750.00

POUTRES

Unités: CM et daN

N°	Or	Ex	Nom	Dim.	Pos	Section	Iz	Iz/V	Young
1	1	2	IPE	120	+	1.3200E+01	3.1800E+02	5.3000E+01	2.0000E+06

CHARGES CONCENTREES

Unité: MM et daN

N°charg	N°noeud	Force X	Force Y	Moment Z
1	2	0.000E+00	-2.000E+02	0.000E+00

CHARGES REPARTIES

Il n'y a pas de charges réparties ..

APPUIS

Unité: MM et degrés

N°app	N°noeud	Dép X	Dép Y	Dép Z	Type appui
1	1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	Encastr

LIAISONS

poutr	Noeud	Type de liaison
1	1	ENCASTREMENT
	2	ENCASTREMENT

RESULTATS du CALCUL de la structure: N8

Déplacements des extrémités de Poutres:GLOBAL

Unités: MM et degrés décimaux

Poutre	Noeud	Déplacement X	Déplacement Y	Rotation Z
1	1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
	2	0.000E+00	-1.811E+00	-1.297E-01

Déplacements des extrémités de Poutres:LOCAL

Les rotations sont en degrés décimaux
Les déplacements linéaires sont en MM

Poutre	Noeud	Déplacement X	Déplacement Y	Rotation Z
1	1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
	2	0.000E+00	-1.811E+00	-1.297E-01

Charges extérieures appliquées aux noeuds

Les forces sont en daN
Les moments sont en MM.daN

Noeud	Effort X	Effort Y	Moment Z
1	0.000E+00	2.000E+02	2.400E+05
2	0.000E+00	-2.000E+02	0.000E+00

Efforts intérieurs dans les Poutres

Actions des noeuds sur les Poutres

Les forces sont en daN
Les moments sont en MM.daN

Poutre	Noeud	Effort normal	Effort tranch.	Moment fléch.
1	1	0.000E+00	2.000E+02	2.400E+05
	2	0.000E+00	-2.000E+02	0.000E+00

Flèches maximales

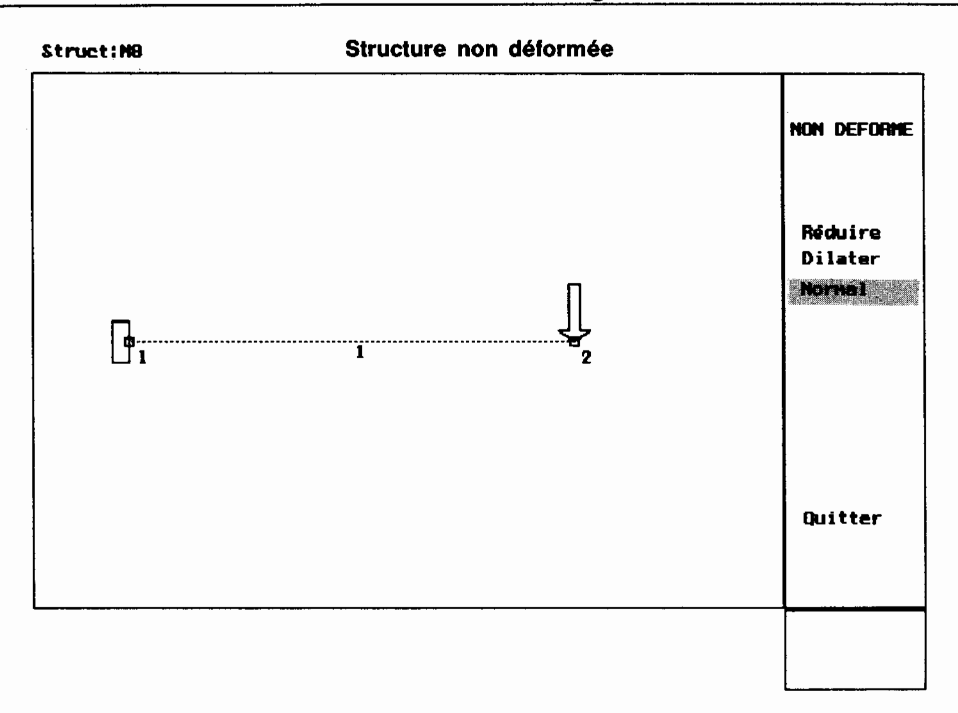
Les flèches sont en MM

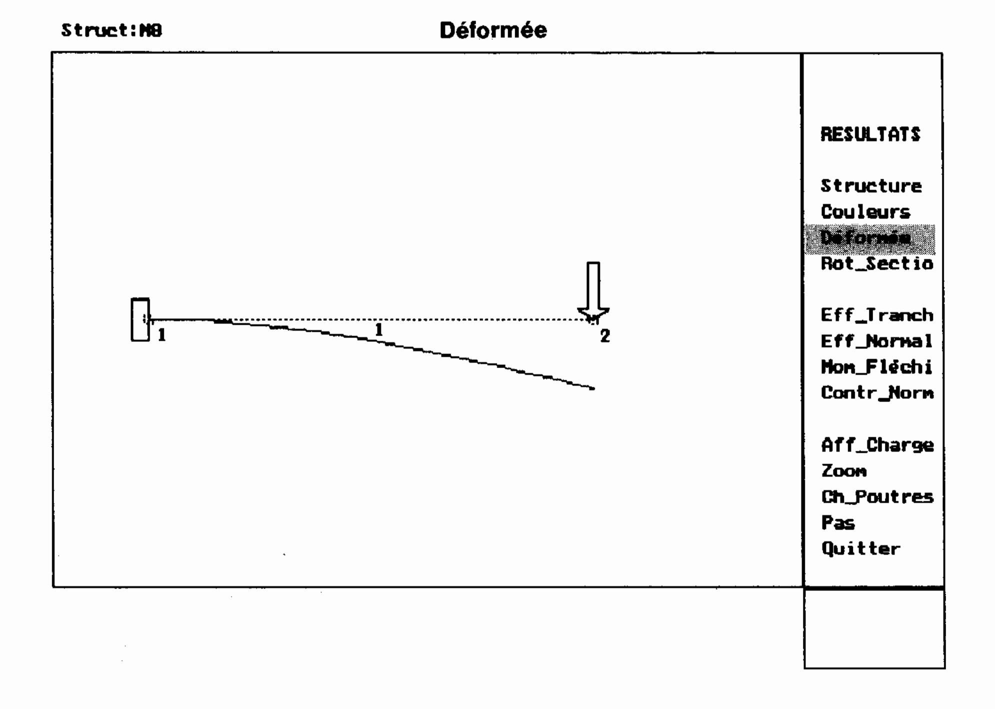
Poutre	Flèche maxima.
1	1.811E+00

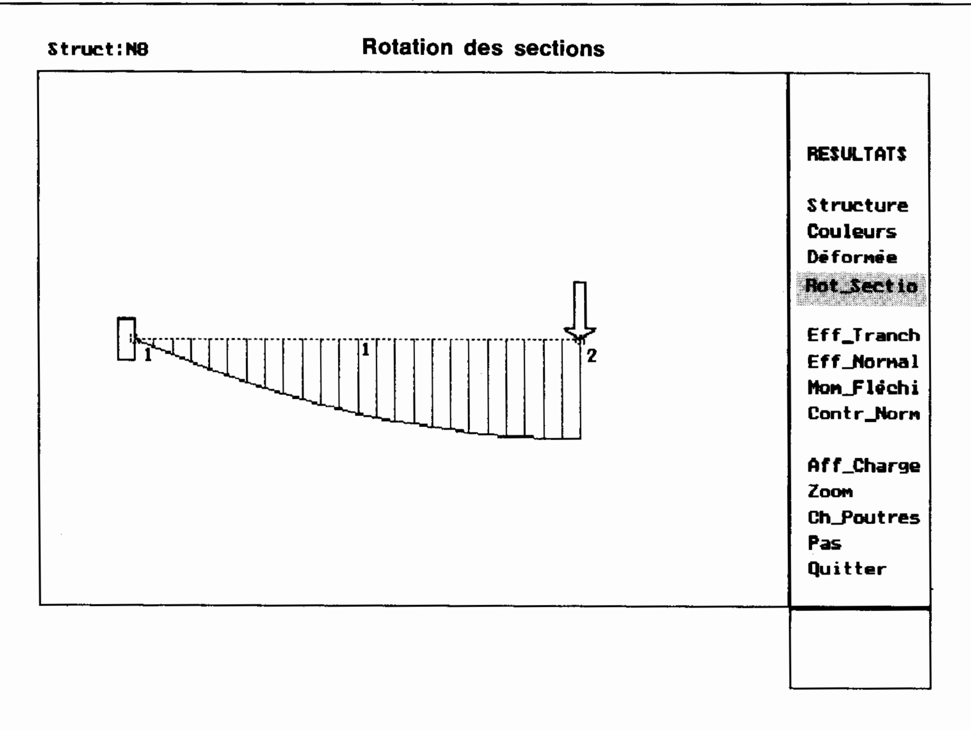
Contraintes maximales

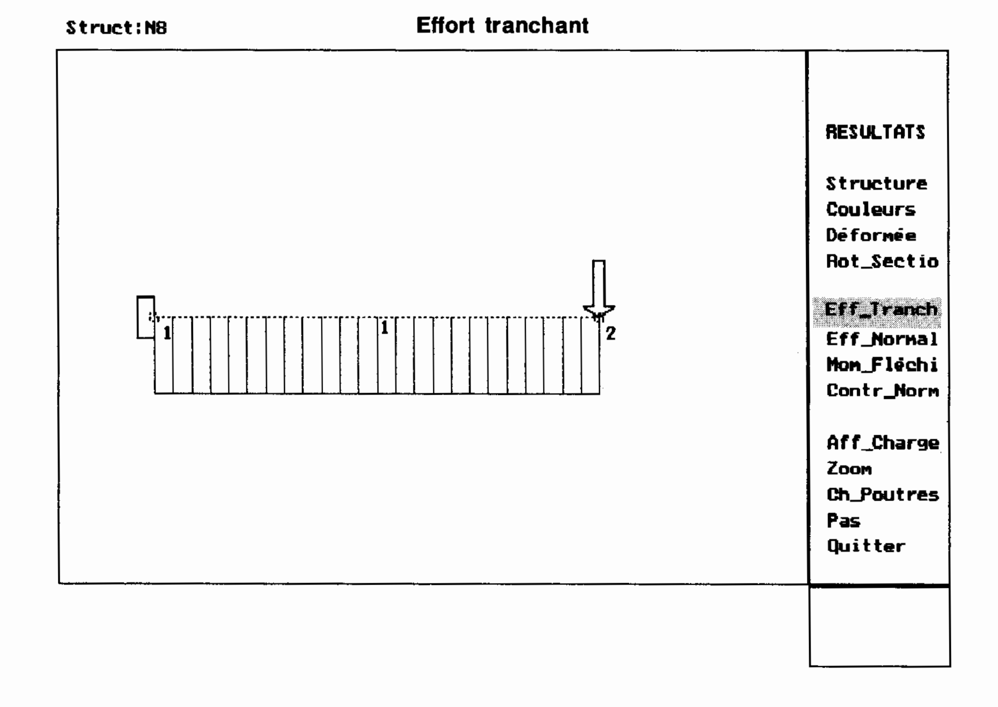
Les contraintes sont en daN/MM2

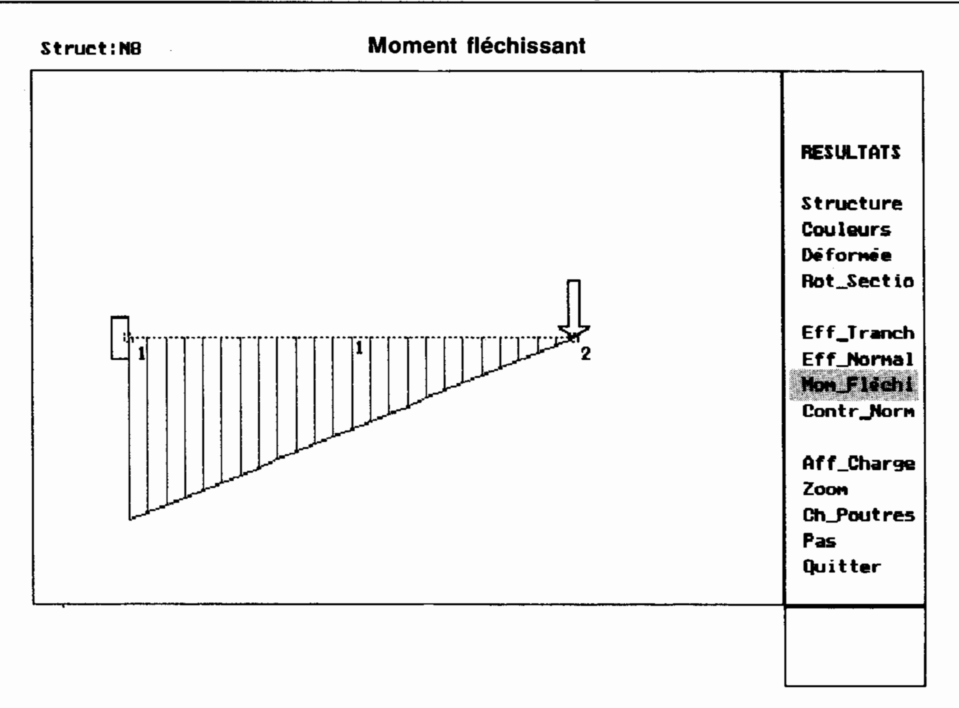
Poutre	Contrainte maxi
1	4.528E+00

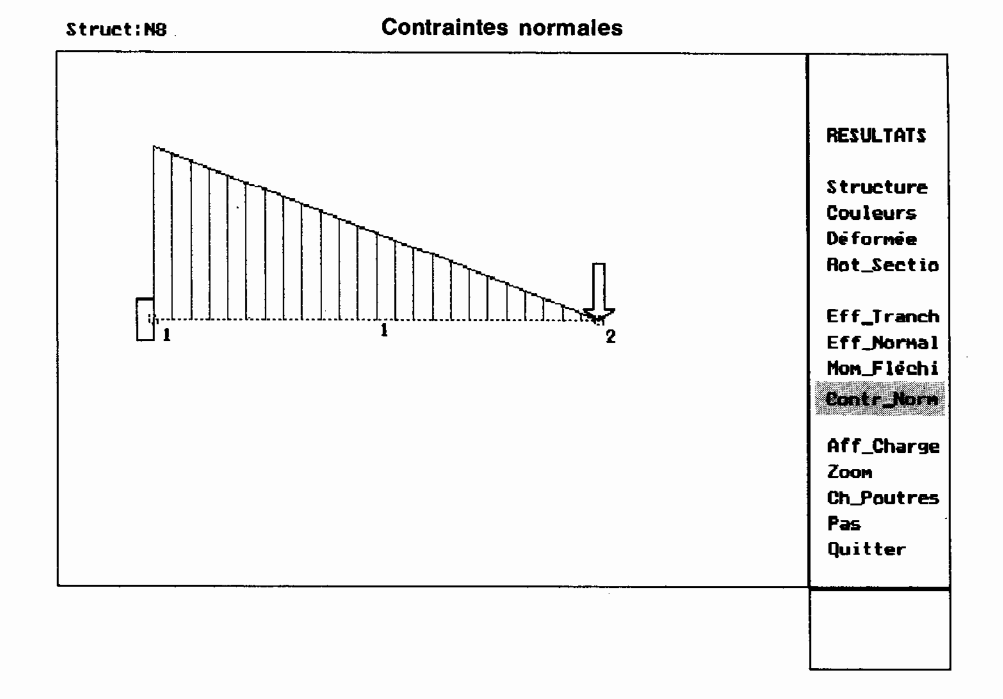

Struct:N8
Structure non déformée
NON DEFORME
Réduire
Dilater
Normal
1
1
2
Quitter


Struct:N8
Déformée
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter
1
1
2


Struct:N8
Rotation des sections
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter
1
1
2


Struct:N8
Effort tranchant
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter
1
1
2


Struct:N8
Moment fléchissant
1
1
2
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter


Struct:N8
Contraintes normales
1
1
2
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter

Fichier de la structure: N5

Longueur maximale de la structure : 3000.000
Hauteur maximale de la structure : 3000.000

Elle comporte 7 noeuds
6 Poutres
4 appuis
3 charges concentrées
6 charges réparties

NOEUDS

Unité: MM

Noeud	Coordon. X	Coordon. Y
1	0.00	1500.00
2	500.00	1500.00
3	1000.00	1500.00
4	1500.00	1500.00
5	2000.00	1500.00
6	2500.00	1500.00
7	3000.00	1500.00

POUTRES

Unités: CM et daN

N°	Or	Ex	Nom	Dim.	Pos	Section	Iz	Iz/V	Young
1	1	2	IPN	80	+	7.5800E+00	7.7800E+01	1.9500E+01	2.0000E+06
2	2	3	IPN	80	+	7.5800E+00	7.7800E+01	1.9500E+01	2.0000E+06
3	3	4	IPN	80	+	7.5800E+00	7.7800E+01	1.9500E+01	2.0000E+06
4	4	5	IPN	80	+	7.5800E+00	7.7800E+01	1.9500E+01	2.0000E+06
5	5	6	IPN	80	+	7.5800E+00	7.7800E+01	1.9500E+01	2.0000E+06
6	6	7	IPN	80	+	7.5800E+00	7.7800E+01	1.9500E+01	2.0000E+06

CHARGES CONCENTREES

Unité: MM et daN

N°charg	N°noeud	Force X	Force Y	Moment Z
1	2	0.000E+00	-1.200E+02	0.000E+00
2	4	0.000E+00	-2.000E+02	0.000E+00
3	6	0.000E+00	-8.000E+01	0.000E+00

CHARGES REPARTIES

Unité: daN/MM

N°poutre	Axes	Px	Py
1	Globaux	0.00000E+00	-1.00000E+00
2	Globaux	0.00000E+00	-1.00000E+00
3	Globaux	0.00000E+00	-1.00000E+00
4	Globaux	0.00000E+00	-1.00000E+00
5	Globaux	0.00000E+00	-1.00000E+00
6	Globaux	0.00000E+00	-1.00000E+00

APPUIS

Unité: MM et degrés

N°app	N°noeud	Dép X	Dép Y	Dép Z	Type appui
1	1	0.00000E+00	0.00000E+00		Pivot
2	3		0.00000E+00		Simp. Y
3	5		0.00000E+00		Simp. Y
4	7		0.00000E+00		Simp. Y

LIAISONS

poutr	Noeud	Type de liaison
1	1	ENCASTREMENT
	2	ENCASTREMENT
2	2	ENCASTREMENT
	3	ENCASTREMENT
3	3	ENCASTREMENT
	4	ENCASTREMENT
4	4	ENCASTREMENT
	5	ENCASTREMENT
5	5	ENCASTREMENT
	6	ENCASTREMENT
6	6	ENCASTREMENT
	7	ENCASTREMENT

RESULTATS du CALCUL de la structure: N5

Déplacements des extrémités de Poutres:GLOBAL

Unités: MM et degrés décimaux

Poutre	Noeud	Déplacement X	Déplacement Y	Rotation Z
1	1	0.000E+00	0.000E+00	-1.043E-01
	2	0.000E+00	-4.954E-01	1.918E-02
2	2	0.000E+00	-4.954E-01	1.918E-02
	3	0.000E+00	0.000E+00	2.762E-02
3	3	0.000E+00	0.000E+00	2.762E-02
	4	0.000E+00	-1.205E-01	-7.671E-04
4	4	0.000E+00	-1.205E-01	-7.671E-04
	5	0.000E+00	0.000E+00	-2.455E-02
5	5	0.000E+00	0.000E+00	-2.455E-02
	6	0.000E+00	-4.619E-01	-1.841E-02
6	6	0.000E+00	-4.619E-01	-1.841E-02
	7	0.000E+00	0.000E+00	9.819E-02

Déplacements des extrémités de Poutres:LOCAL

Les rotations sont en degrés décimaux
Les déplacements linéaires sont en MM

Poutre	Noeud	Déplacement X	Déplacement Y	Rotation Z
1	1	0.000E+00	0.000E+00	-1.043E-01
	2	0.000E+00	-4.954E-01	1.918E-02
2	2	0.000E+00	-4.954E-01	1.918E-02
	3	0.000E+00	0.000E+00	2.762E-02
3	3	0.000E+00	0.000E+00	2.762E-02
	4	0.000E+00	-1.205E-01	-7.671E-04
4	4	0.000E+00	-1.205E-01	-7.671E-04
	5	0.000E+00	0.000E+00	-2.455E-02
5	5	0.000E+00	0.000E+00	-2.455E-02
	6	0.000E+00	-4.619E-01	-1.841E-02
6	6	0.000E+00	-4.619E-01	-1.841E-02
	7	0.000E+00	0.000E+00	9.819E-02

Charges extérieures appliquées aux noeuds

Les forces sont en daN
Les moments sont en MM.daN

Noeud	Effort X	Effort Y	Moment Z
1	0.000E+00	4.350E+02	0.000E+00
2	0.000E+00	-1.200E+02	0.000E+00
3	0.000E+00	1.290E+03	0.000E+00
4	0.000E+00	-2.000E+02	0.000E+00
5	0.000E+00	1.255E+03	0.000E+00
6	0.000E+00	-8.000E+01	0.000E+00
7	0.000E+00	4.200E+02	0.000E+00

Efforts intérieurs dans les Poutres

Actions des noeuds sur les Poutres

Les forces sont en daN
Les moments sont en MM.daN

Poutre	Noeud	Effort normal	Effort tranch.	Moment fléch.
1	1	0.000E+00	4.350E+02	0.000E+00
	2	0.000E+00	6.500E+01	9.250E+04
2	2	0.000E+00	-1.850E+02	-9.250E+04
	3	0.000E+00	6.850E+02	-1.250E+05
3	3	0.000E+00	6.050E+02	1.250E+05
	4	0.000E+00	-1.050E+02	5.250E+04
4	4	0.000E+00	-9.500E+01	-5.250E+04
	5	0.000E+00	5.950E+02	-1.200E+05
5	5	0.000E+00	6.600E+02	1.200E+05
	6	0.000E+00	-1.600E+02	8.500E+04
6	6	0.000E+00	8.000E+01	-8.500E+04
	7	0.000E+00	4.200E+02	0.000E+00

Flèches maximales

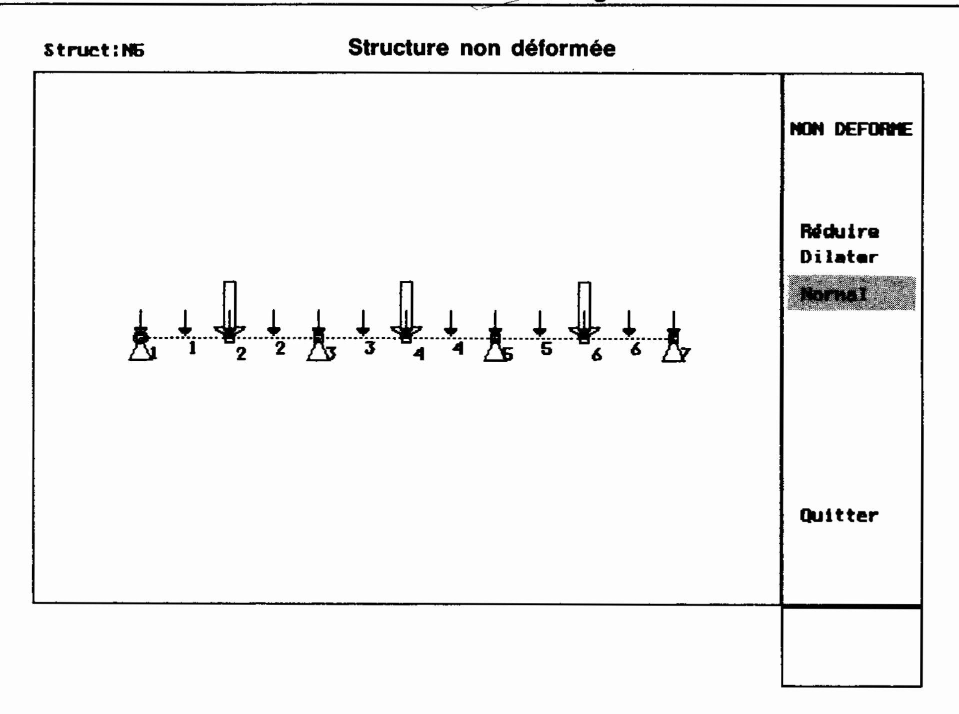
Les flèches sont en MM

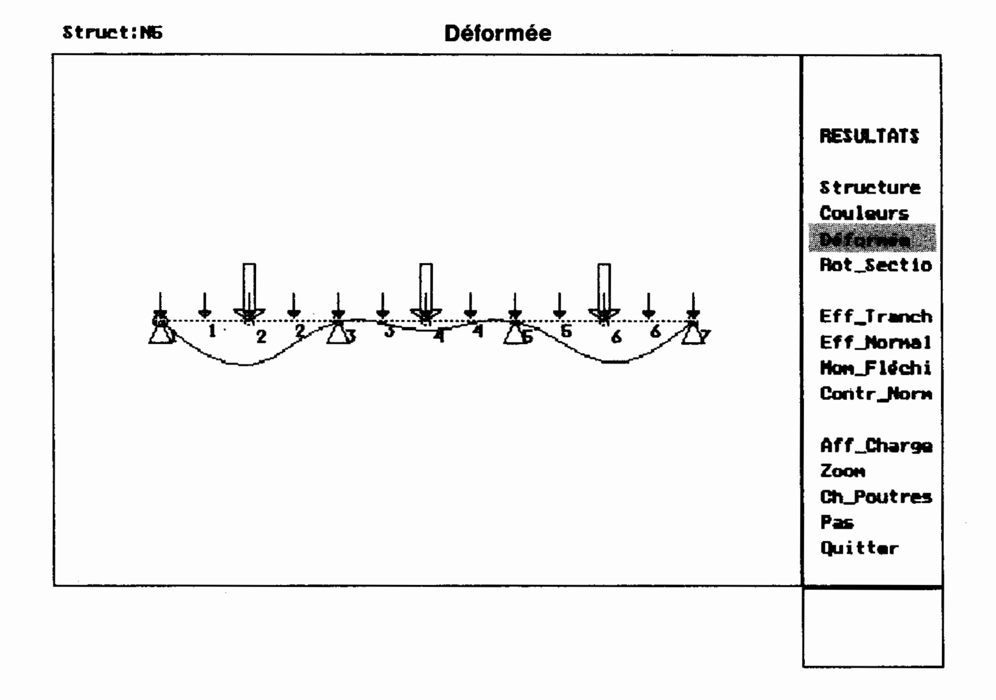
Poutre	Flèche maxima.
1	6.628E-01
2	3.280E-01
3	3.615E-01
4	3.347E-01
5	3.013E-01
6	6.226E-01

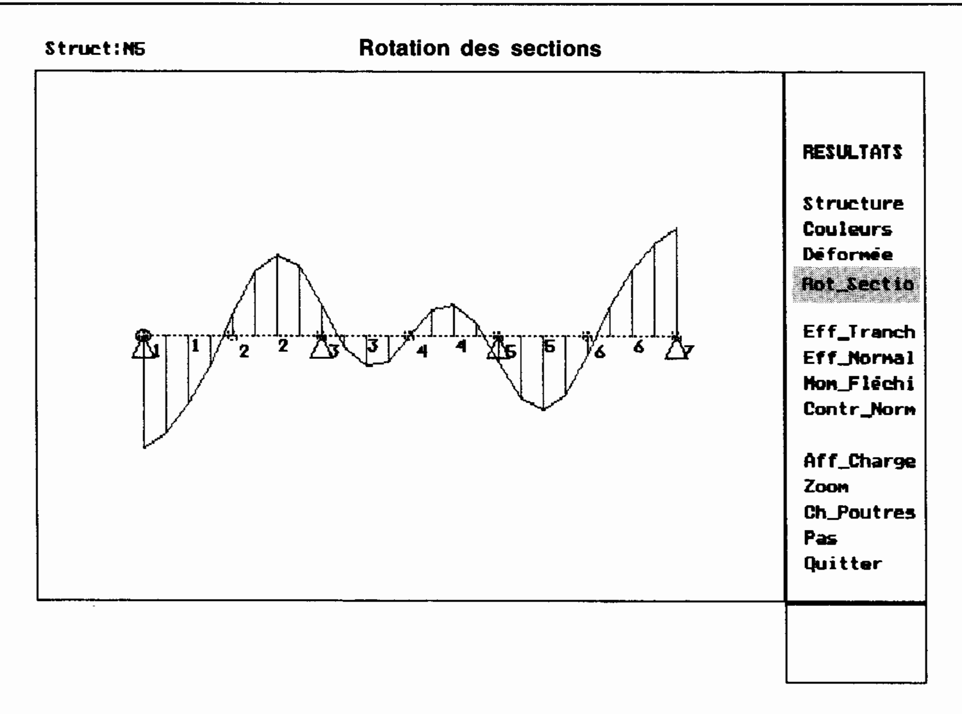
Contraintes maximales

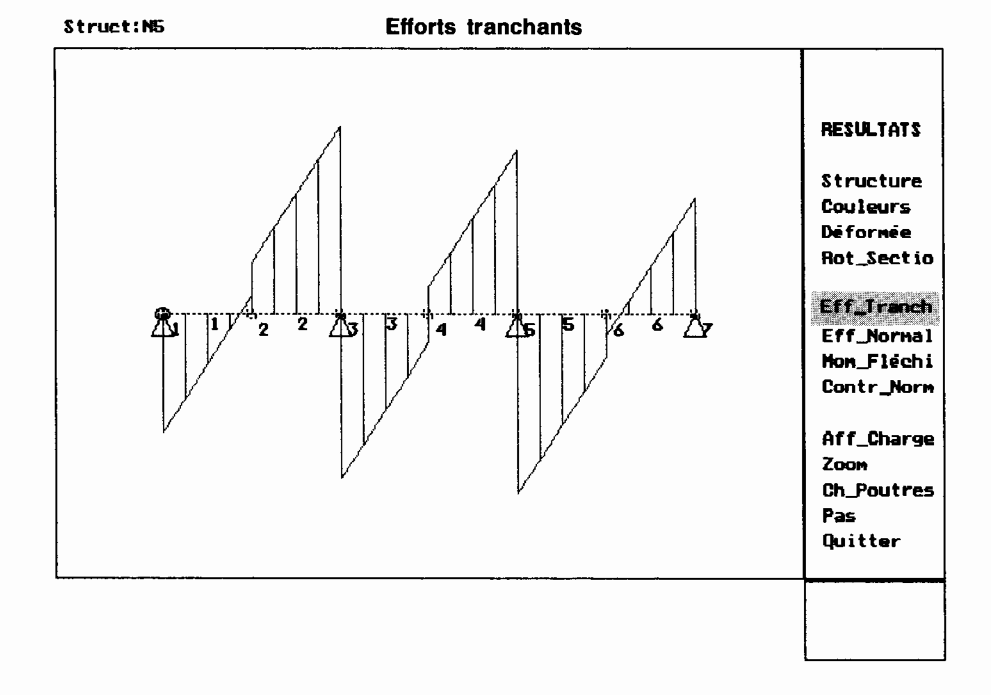
Les contraintes sont en daN/MM2

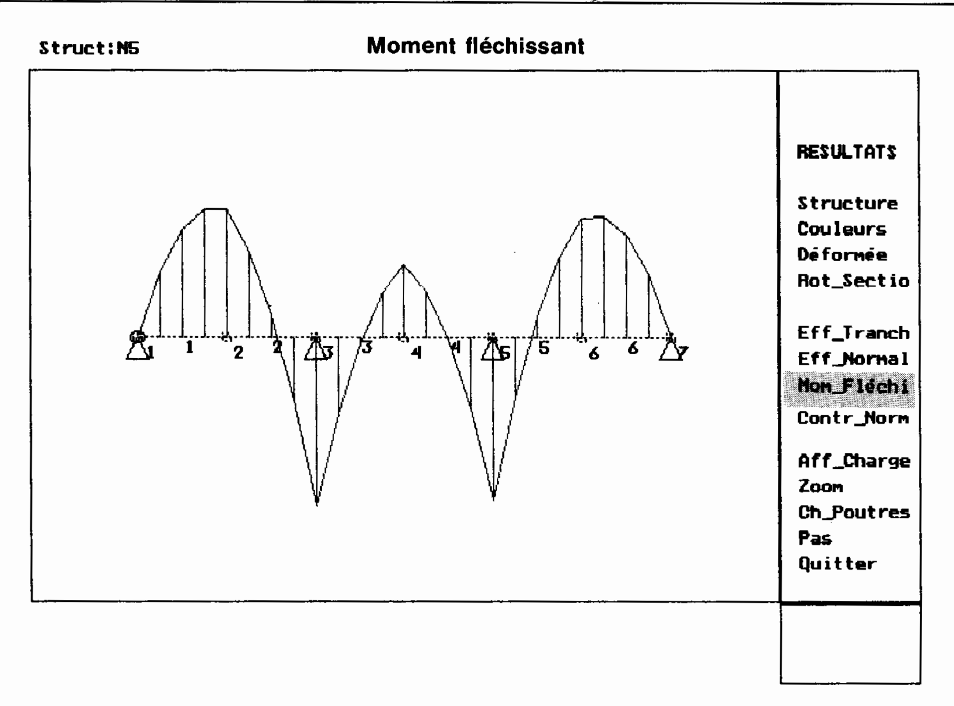
Poutre	Contrainte maxi
1	-4.849E+00
2	6.410E+00
3	6.410E+00
4	6.154E+00
5	6.154E+00
6	-4.522E+00

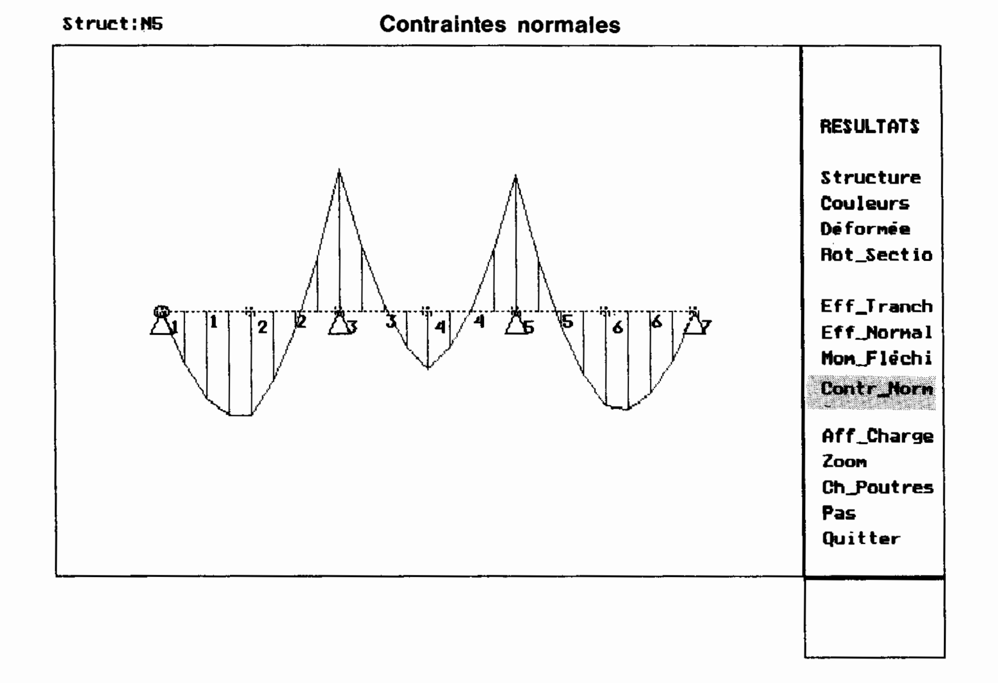

Struct:N6
Structure non déformée
NON DEFORME
Réduire
Dilater
Normal
Quitter


Struct:N6
Déformée
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter


Struct:N5
Rotation des sections
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter


Struct:N5
Efforts tranchants
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter


Struct:N5
Moment fléchissant
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter


Struct:N5
Contraintes normales
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter

Fichier de la structure: N10

Longueur maximale de la structure : 3000.000
Hauteur maximale de la structure : 2000.000

Elle comporte 5 noeuds
4 Poutres
2 appuis
1 charges concentrées
2 charges réparties

NOEUDS

Unité: MM

Noeud	Coordon. X	Coordon. Y
1	0.00	0.00
2	0.00	2000.00
3	1500.00	2000.00
4	3000.00	2000.00
5	3000.00	0.00

POUTRES

Unités: CM et daN

N°	Or	Ex	Nom	Dim.	Pos	Section	Iz	Iz/V	Young
1	1	2	IPE	120	+	1.3200E+01	3.1800E+02	5.3000E+01	2.0000E+06
2	4	5	IPE	120	+	1.3200E+01	3.1800E+02	5.3000E+01	2.0000E+06
3	2	3	PRCR	12	+	3.6000E+01	6.5200E+02	1.0867E+02	2.0000E+06
4	3	4	PRCR	12	+	3.6000E+01	6.5200E+02	1.0867E+02	2.0000E+06

CHARGES CONCENTREES

Unité: MM et daN

N°charg	N°noeud	Force X	Force Y	Moment Z
1	3	0.000E+00	-2.000E+03	0.000E+00

CHARGES REPARTIES

Unité: daN/MM

N°poutre	Axes	Px	Py
1	Globaux	2.00000E-01	0.00000E+00
2	Globaux	2.00000E-01	0.00000E+00

APPUIS

Unité: MM et degrés

N°app	N°noeud	Dép X	Dép Y	Dép Z	Type appui
1	1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	Encastr
2	5	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	Encastr

LIAISONS

poutr	Noeud	Type de liaison
1	1	ENCASTREMENT
	2	ENCASTREMENT
2	4	ENCASTREMENT
	5	ENCASTREMENT
3	2	ENCASTREMENT
	3	ENCASTREMENT
4	3	ENCASTREMENT
	4	ENCASTREMENT

RESULTATS du CALCUL de la structure: N10

Déplacements des extrémités de Poutres:GLOBAL

Unités: MM et degrés décimaux

Poutre	Noeud	Déplacement X	Déplacement Y	Rotation Z
1	1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
	2	2.563E+00	-6.976E-02	-2.272E-01
2	4	2.549E+00	-8.175E-02	1.745E-01
	5	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
3	2	2.563E+00	-6.976E-02	-2.272E-01
	3	2.556E+00	-4.862E+00	1.281E-02
4	3	2.556E+00	-4.862E+00	1.281E-02
	4	2.549E+00	-8.175E-02	1.745E-01

Déplacements des extrémités de Poutres:LOCAL

Les rotations sont en degrés décimaux
Les déplacements linéaires sont en MM

Poutre	Noeud	Déplacement X	Déplacement Y	Rotation Z
1	1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
	2	-6.976E-02	-2.563E+00	-2.272E-01
2	4	8.175E-02	2.549E+00	1.745E-01
	5	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
3	2	2.563E+00	-6.976E-02	-2.272E-01
	3	2.556E+00	-4.862E+00	1.281E-02
4	3	2.556E+00	-4.862E+00	1.281E-02
	4	2.549E+00	-8.175E-02	1.745E-01

Charges extérieures appliquées aux noeuds

Les forces sont en daN
Les moments sont en MM.daN

Noeud	Effort X	Effort Y	Moment Z
1	-6.623E+01	9.208E+02	5.898E+04
2	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
3	0.000E+00	-2.000E+03	0.000E+00
4	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
5	-7.338E+02	1.079E+03	5.036E+05

Efforts intérieurs dans les Poutres

Actions des noeuds sur les Poutres

Les forces sont en daN
Les moments sont en MM.daN

Poutre	Noeud	Effort normal	Effort tranch.	Moment fléch.
1	1	9.208E+02	6.623E+01	5.898E+04
	2	-9.208E+02	3.338E+02	-3.265E+05
2	4	1.079E+03	3.338E+02	5.640E+05
	5	-1.079E+03	-7.338E+02	5.036E+05
3	2	3.338E+02	9.208E+02	3.265E+05
	3	-3.338E+02	-9.208E+02	1.055E+06
4	3	3.338E+02	-1.079E+03	-1.055E+06
	4	-3.338E+02	1.079E+03	-5.640E+05

Flèches maximales

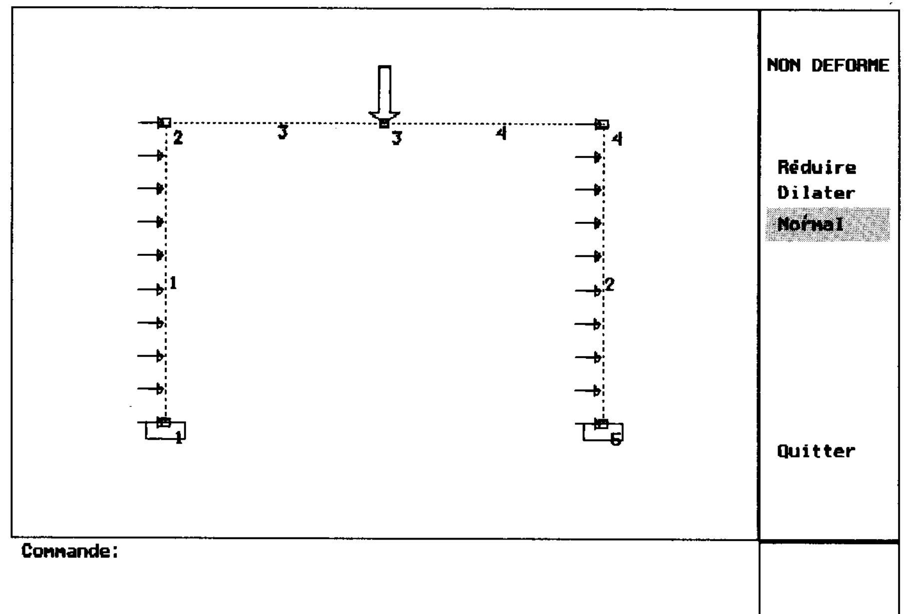
Les flèches sont en MM

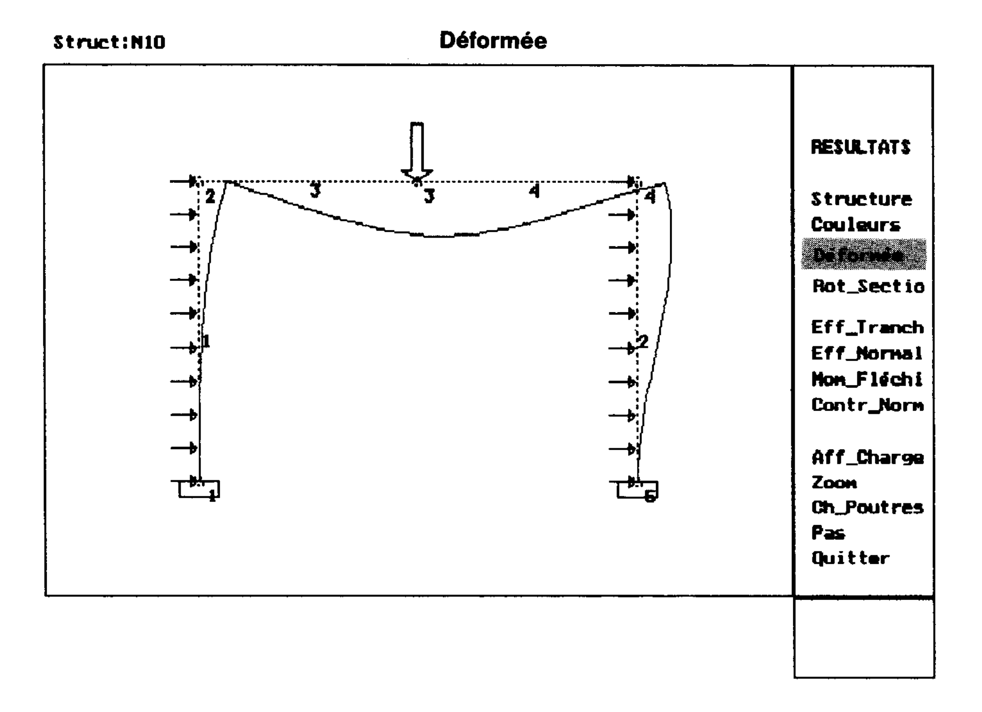
Poutre	Flèche maxima.
1	5.367E+00
2	8.641E+00
3	5.127E+00
4	4.445E+00

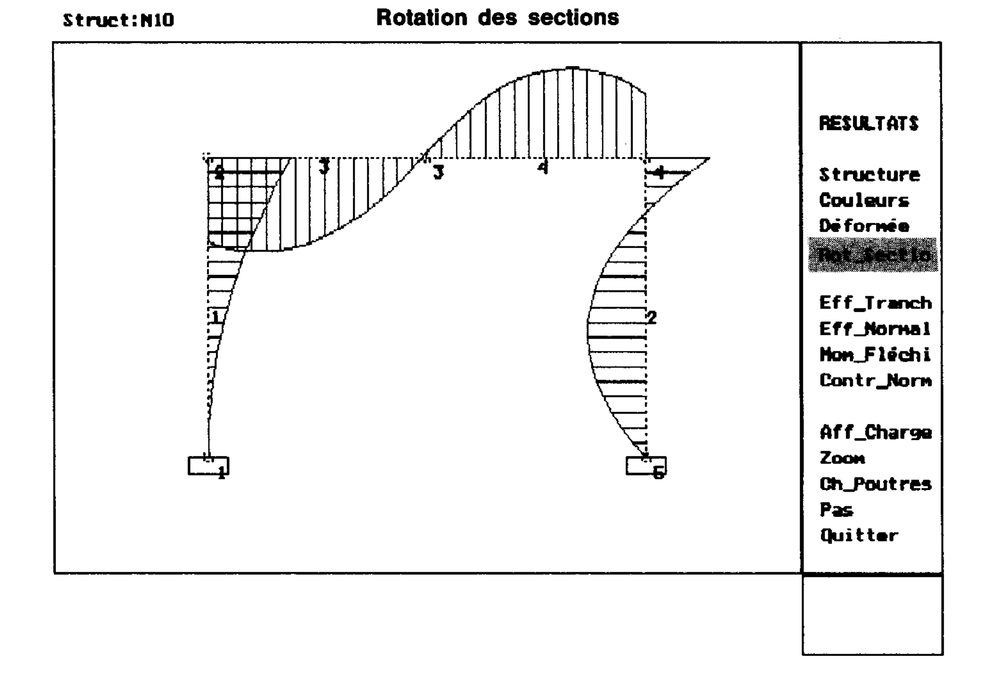
Contraintes maximales

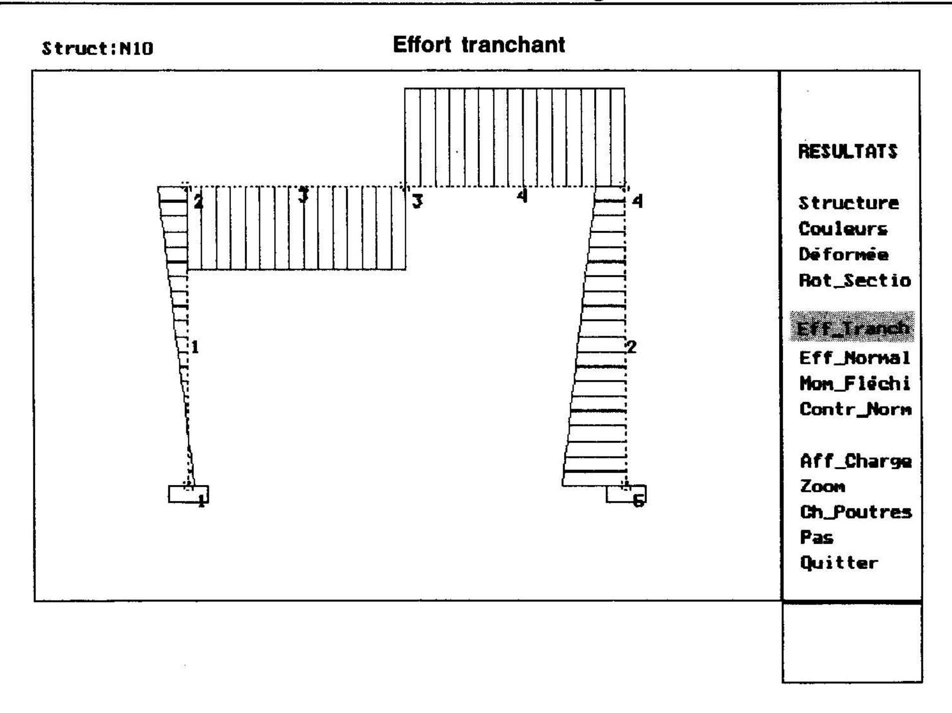
Les contraintes sont en daN/MM2

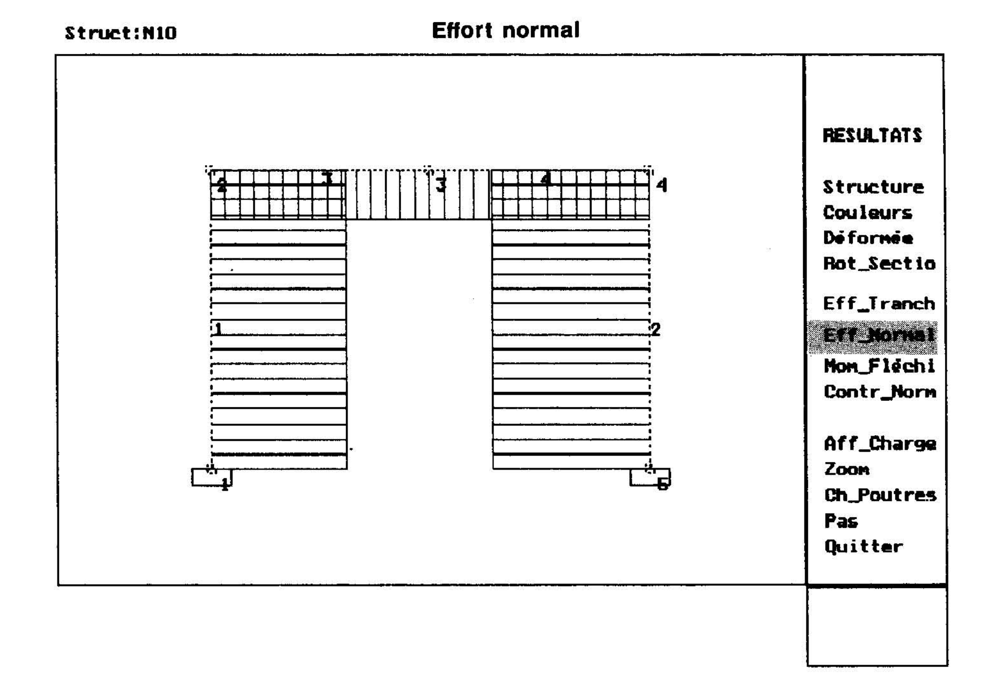
Poutre	Contrainte maxi
1	5.463E+00
2	-1.032E+01
3	-9.799E+00
4	-9.799E+00

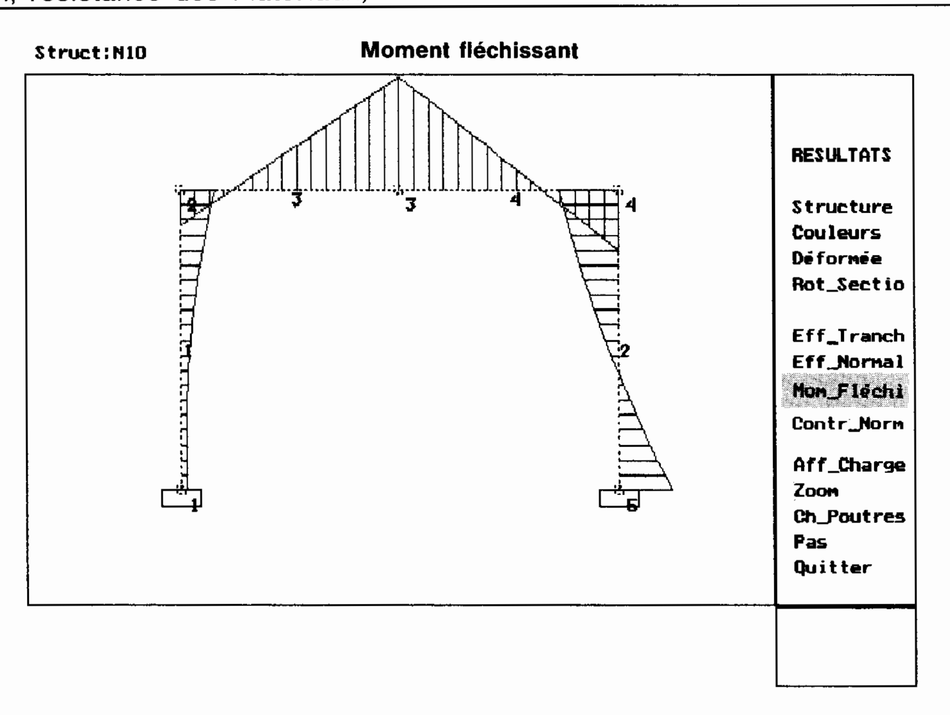


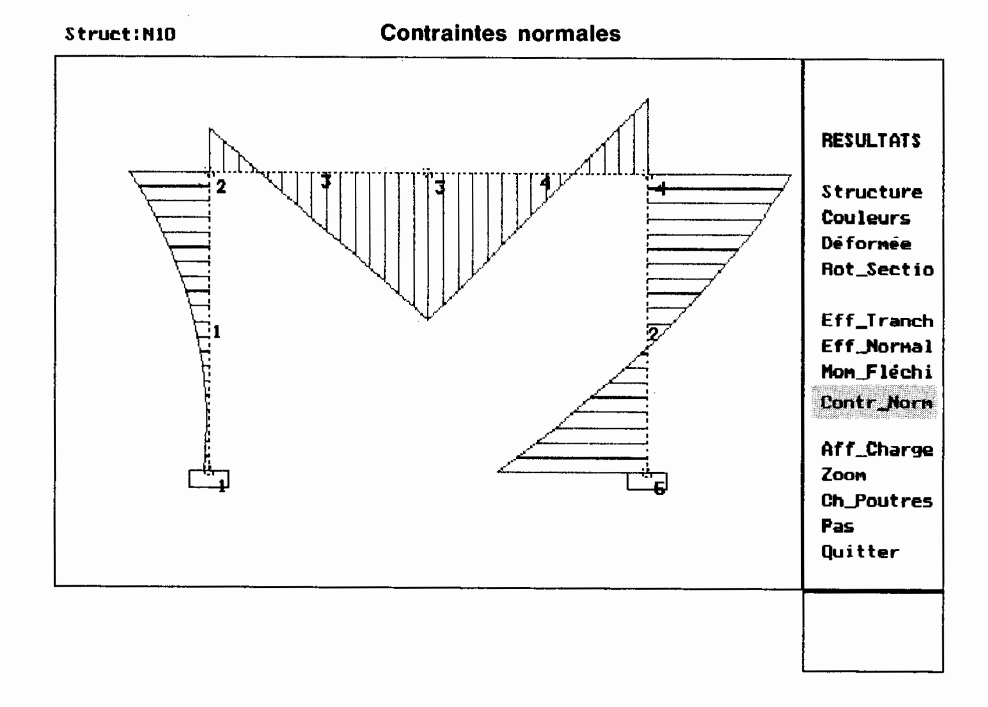

Struct:N10
Déformée
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter


Struct:N10
Rotation des sections
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter


Struct:N10
Effort tranchant
1
2
3
4
1
2
5
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter


Struct:N10
Effort normal
1
2
3
4
1
2
5
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter


Struct:N10
Moment fléchissant
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter


Struct:N10
Contraintes normales
RESULTATS
Structure
Couleurs
Déformée
Rot_Sectio
Eff_Tranch
Eff_Normal
Mom_Fléchi
Contr_Norm
Aff_Charge
Zoom
Ch_Poutres
Pas
Quitter

2e partie

HYDRAULIQUE ET THERMODYNAMIQUE APPLIQUÉES

1 mécanique des fluides rappels d'hydrostatique écoulement des fluides réels

Distributeurs, vérins, pompes, moteurs hydrauliques sont aujourd'hui des composants que l'on rencontre dans tous les automatismes hydrauliques.
Un technicien, même non spécialiste de l'hydraulique, doit avoir des notions suffisantes pour comprendre le fonctionnement de ces appareils, aussi bien pour les mettre en œuvre que pour assurer leur maintenance.

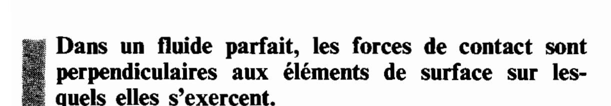


1. PRESSION EN UN POINT D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE

1.1. DÉFINITIONS

Fluide parfait

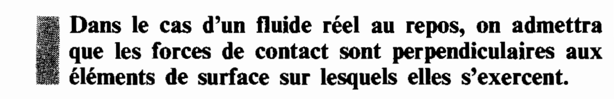
Un fluide parfait est un fluide à l'intérieur duquel les forces de cohésion sont nulles.
L'eau est plus proche de la définition d'un fluide parfait que l'huile.



Dans un fluide parfait, les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent.

Fluide réel

Dans un fluide réel en mouvement, les forces de contact possèdent des composantes tangentielles qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides : c'est la viscosité. La viscosité est définie pour un fluide réel en mouvement.



Dans le cas d'un fluide réel au repos, on admettra que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent.

Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. La masse volumique d'un fluide incompressible est constante ; celle-ci s'exprime par : **ρ (kg/m^3).** Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.).

Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. La masse volumique d'un fluide compressible est variable. Les gaz sont des fluides compressibles.

1.2. PRESSION EN UN POINT D'UN FLUIDE PARFAIT (ou d'un fluide réel au repos)

Le rapport de la norme du vecteur force sur la surface de la facette sur laquelle elle s'exerce s'appelle la pression p_A du fluide au point A. p_A est un nombre positif *(fig. 1.1)* :

$$p_A = \frac{\|\overrightarrow{dF}\|}{dS}$$

avec :

dS = surface élémentaire de la facette de centre A (en millimètres carrés) ;
$\vec{n}$ = vecteur unitaire en A de la normale extérieure à la facette ;
$\overrightarrow{dF}$ = force élémentaire de pression qui s'exerce sur la facette (en newtons) ;
p_A = pression en A (en mégapascals).

Propriété :

La pression en A est indépendante de l'orientation de la facette autour du point A.

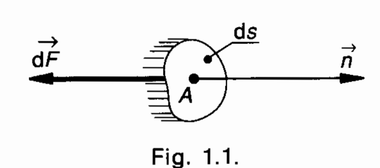


Fig. 1.1.

1.3. FORCE DE PRESSION *(fig. 1.1)*

Sur la facette de centre A, d'aire dS, orientée par sa normale extérieure $\vec{n}$, la force de pression élémentaire $\overrightarrow{dF}$ s'exprime par :

$$\overrightarrow{dF} = - p_A \, dS \, \vec{n} .$$

1.4. UNITÉ DE PRESSION

L'unité légale de presion est le pascal (Pa) :

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 ;$$

Cette unité est très petite, on utilise le plus souvent ses multiples ; en construction mécanique, résistance des matériaux, etc., l'unité utilisée est le mégapascal :

$$1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2 .$$

En mécanique des fluides, on utilise encore très souvent le bar ; le bar est égal à peu près à la pression atmosphérique moyenne :

$$1 \text{ bar} \approx 0{,}1 \text{ MPa} .$$

1.5. THÉORÈME DE PASCAL

Considérons un élément de volume d'un fluide incompressible (liquide homogène de poids volumique ϖ). Cet élément de volume a la forme d'un cylindre d'axe $(G, \vec{u})$ qui fait un angle α avec l'axe vertical $(O, \vec{z})$ d'un repère $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Soit l la longueur de ce cylindre et soit dS sa section droite *(fig. 1.2)*.

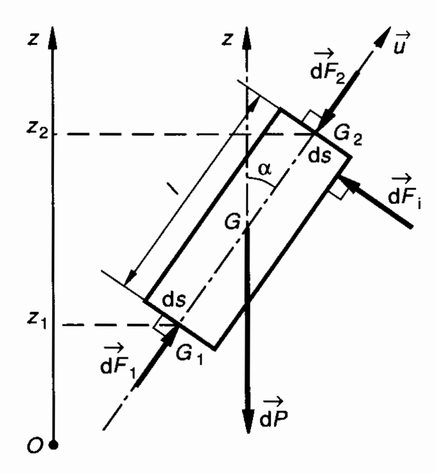


Fig. 1.2.

Soit G_1 d'altitude z_1 et G_2 d'altitude z_2, les centres de surface des sections droites extrêmes.
Etudions l'équilibre du cylindre élémentaire ; celui-ci est soumis aux :

— *actions à distance :* son poids :

$$\overrightarrow{dP} = - \varpi l \, dS \, \vec{z} . \qquad (1)$$

— *actions de contact :*
forces de pression s'exerçant sur la surface latérale, notons $\overrightarrow{dF_i}$ l'une d'elles ;
forces de pression s'exerçant sur les deux surfaces planes extrêmes. Soient p_1 et p_2 les pressions du fluide respectivement en G_1 et en G_2 :

$$\overrightarrow{dF}_1 = - p_1 \, dS(- \vec{u}) = p_1 \, dS \, \vec{u} , \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{dF}_2 = - p_2 \, dS \, \vec{u} . \qquad (3)$$

Le cylindre élémentaire étant en équilibre dans le fluide, écrivons que la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle :

$$\overrightarrow{dP} + \Sigma \, \overrightarrow{dF}_i + \overrightarrow{dF}_1 + \overrightarrow{dF}_2 = \vec{0} . \qquad (4)$$

En projection sur l'axe de symétrie $(G, \vec{u})$ du cylindre,

$$-\varpi l \, \mathrm{d}S \cos \alpha + p_1 \, \mathrm{d}S - p_2 \, \mathrm{d}S = 0.$$

Exprimons la différence de pression $p_1 - p_2$ après avoir divisé par dS et remarqué que $l \cos \alpha = z_2 - z_1$

$$\boxed{p_1 - p_2 = \varpi (z_2 - z_1)}. \qquad (5)$$

Unités : p_1 et p_2 en pascals, ϖ en newtons par mètre cube, z_1 et z_2 en mètres.

Autre forme plus générale de la relation **(5)**

En divisant les deux membres de (5) par ϖ :

$$\frac{p_1}{\varpi} + z_1 = \frac{p_2}{\varpi} + z_2 .$$

Comme G_1 et G_2 ont été choisis de façon arbitraire à l'intérieur d'un fluide de poids volumique ϖ, on peut écrire en un point quelconque d'altitude z, où règne la pression p :

$$\boxed{\frac{p}{\varpi} + z = \mathrm{Cte}}. \qquad (6)$$

Supposons qu'au point G_2 *(fig. 1.2)*, intervienne une variation de pression telle que celle-ci devienne $(p_2 + \Delta p_2)$, Δp_2 étant un nombre algébrique. Calculons la variation de pression Δp_1 qui en résulte en G_1.

Appliquons la relation fondamentale de l'hydrostatique (5) :

$$p_1 - p_2 = \varpi (z_2 - z_1) . \qquad (5)$$

Entre G_1 et G_2, avec le nouvel état de pression :

$$(p_1 + \Delta p_1) - (p_2 + \Delta p_2) = \varpi (z_2 - z_1)$$

soit $\quad \Delta p_1 - \Delta p_2 + p_1 - p_2 = \varpi (z_2 - z_1)$

et d'après (5) : $\Delta p_1 - \Delta p_2 = 0$

ou $\quad \boxed{\Delta p_1 = \Delta p_2}$.

Théorème de Pascal

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout point.

1.6. POUSSÉE D'UN FLUIDE SUR UNE PAROI VERTICALE

Hypothèses

La paroi verticale possède un axe de symétrie $(G, \vec{y})$; G est son centre de surface. D'un côté de la paroi il y a un fluide de poids volumique ϖ, de l'autre côté, il y a de l'air à la pression atmosphérique p_0. On désigne par p_G la pression effective au centre de surface G *(fig. 1.3)*.

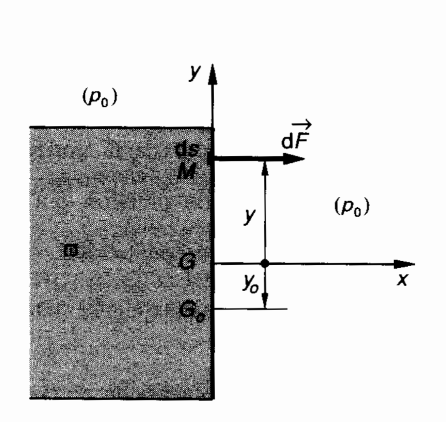


Fig. 1.3.

Recherchons les éléments de réduction en G du torseur associé aux forces de pression sur la paroi.

Compte tenu de l'existence de l'axe de symétrie vertical $(G, \vec{y})$ désignons par $M \in (G, \vec{y})$ le centre d'une facette d'aire dS. En M la pression relative s'exprime par (voir relation (5)) :

$$p_M - p_G = \varpi (y_G - y_M) ,$$

avec dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ défini à la *figure 1.3 :* $y_G = 0$ et $y_M = y$, donc

$$p_M = p_G - \varpi y .$$

Exprimons la force de pression relative en M :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}f} = (p_G - \varpi y) \, \mathrm{d}S \, \vec{x} .$$

Soit $\{\mathcal{T}_{\text{poussée}}\}$ le torseur associé aux forces de pression relative :

$$\{\mathcal{T}_{\text{poussée}}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} = \int_{(S)} \overrightarrow{\mathrm{d}F} , \\ \vec{M}_G = \int_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}F} \end{Bmatrix} .$$

Calcul de la poussée $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \int_{(S)} (p_G - \varpi y)\,\mathrm{d}S\,\vec{x}\,,$$

que l'on peut écrire en mettant en facteur les termes constants :

$$\vec{R} = \left[p_G \int_{(S)} \mathrm{d}S - \varpi \int_{(S)} y\,\mathrm{d}S\right]\vec{x}\,.$$

On note que $\int_{(S)} \mathrm{d}S = S$ (aire de la paroi),

$$\int_{(S)} y\,\mathrm{d}S = y_G\,S = 0$$

(moment statique de la surface S par rapport à l'axe $(G, \vec{z})$ passant par le centre de surface G),

donc $\qquad \boldsymbol{\vec{R} = p_G S \vec{x}}\,.$

Calcul du moment au centre de surface G des forces de pression $\vec{M}_G$:

$$\vec{M}_G = \int_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}F}\,,$$

avec dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et d'après les hypothèses de symétrie :

$$\overrightarrow{GM} = y\,.\,\vec{y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{d}F} = (p_G - \varpi y)\,\mathrm{d}S\,\vec{x}\,,$$

donc

$$\vec{M}_G = \int_{(S)} [y\,.\,\vec{y} \wedge (p_G - \varpi y)\,\mathrm{d}S\,\vec{x}]\,.$$

Notons que $\vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z}$:

$$\vec{M}_G = \left[p_G \int_{(S)} y\,\mathrm{d}S - \varpi \int_{(S)} y^2\,\mathrm{d}S\right]\cdot(-\vec{z})\,.$$

On note que $\int_{(S)} y\,\mathrm{d}S = y_G\,S = 0$

et que $\int_{(S)} y^2\,\mathrm{d}S = I(G, \vec{z})\,,$

moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe $(G, \vec{z})$ passant par le centre de surface G, donc

$$\boldsymbol{\vec{M}_G = \varpi I(G, \vec{z})\,\vec{z}}\,.$$

En résumé :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\text{poussée}}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \boldsymbol{p_G S \vec{x}}, \\ \boldsymbol{\varpi I(G, \vec{z})\,\vec{z}} \end{Bmatrix}}\,.$$

Existe-t-il un point G_0 où le moment résultant des forces de pression est nul ?

Compte tenu de l'hypothèse de symétrie, si ce point existe il appartient à l'axe $(G, \vec{y})$ et il est tel que :

$$\vec{M}_{G_0} = \vec{M}_G + \overrightarrow{G_0G} \wedge \vec{R} = \vec{0}\,.$$

Ecrivons alors que :

$$\overrightarrow{GG}_0 \wedge \vec{R} = \vec{M}_G\,.$$

Avec les résultats précédents, on obtient :

$$y_0\,\vec{y} \wedge p_G\,S\vec{x} = \varpi I(G, \vec{z})\,\vec{z}\,,$$

ce qui conduit à

$$\boxed{y_0 = -\frac{\varpi I(G, \vec{z})}{p_G\,S}}\,.$$

G_0 existe, il s'appelle « **le centre de poussée** » de la paroi, il est toujours au-dessous du centre de surface G.

Applications numériques

Nous allons calculer la résultante $\|\vec{R}\|$ des forces de pression et la position y_0 du centre de poussée G_0 pour deux parois très différentes par leurs dimensions et par les pressions qu'elles subissent.

APPLICATION 1

Un barrage peut être assimilé à une paroi de 200 m de long et de 60 m de hauteur. Le poids volumique de l'eau est $\varpi = 9{,}81 . 10^3$ N/m³ *(fig. 1.4).*

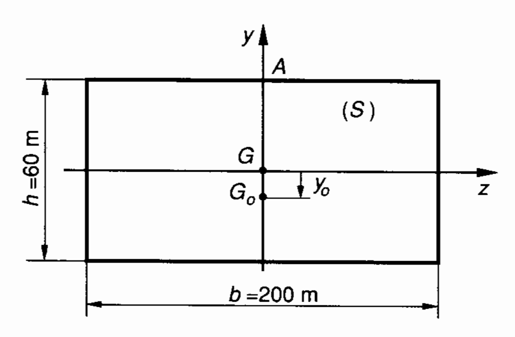


Fig. 1.4.

Calcul de $\|\vec{R}\|$: $\quad \|\vec{R}\| = p_G\,S\,,$

avec $p_G = \varpi\,\frac{h}{2}$ (en A, sommet du barrage, la pression effective de l'eau est nulle),

$$S = bh\,, \qquad \text{donc} \qquad \|\vec{R}\| = \frac{\varpi b h^2}{2}\,.$$

Numériquement : $\|\vec{R}\| \approx$ **3,53 . 10⁹ N.**

Calcul de y_0 :

$$y_0 = -\frac{\varpi I(G, \vec{z})}{p_G S},$$

avec $I(G, \vec{z}) = \frac{bh^3}{12}$, on trouve

$$y_0 = -\frac{h}{6}.$$

Numériquement : $y_0 = -10$ **(m).**
On voit que le centre de poussée est très au-dessous du centre de surface et dans le calcul de stabilité du barrage il est hors de question de confondre ces deux points.

APPLICATION 2

Un piston de vérin a un diamètre $d = 60$ mm. Il règne au centre de surface G du piston une pression effective de 40 bar, soit environ $p_G = 4$ MPa.
L'huile contenue dans le vérin a un poids volumique

$$\varpi = 9{,}81 \times 0{,}8 \times 10^{3}\ \mathrm{N/m^3} \quad \text{(fig. 1.5)}.$$

Compte tenu des faibles dimensions, utilisons le millimètre comme unité de longueur :

$$d = 60\ \mathrm{mm}, \quad p_G = 4\ \mathrm{MPa},$$

$$\varpi = 9{,}81 \times 0{,}8 \times 10^{-6}\ \mathrm{N/mm^3}.$$

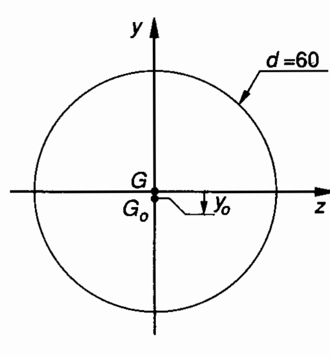


Fig. 1.5.

Calcul de $\|\vec{R}\|$:

$$\|\vec{R}\| = p_G S, \qquad \text{avec } S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Numériquement : $\|\vec{R}\| \approx 11{,}3.10^{3}$ **N.**

Calcul de y_0 :

$$y_0 = -\frac{\varpi I(G, \vec{z})}{p_G S} \quad \text{avec } I(G, \vec{z}) = \frac{\pi d^4}{64},$$

$$y_0 = -\frac{\varpi d^2}{16\, p_G}.$$

Numériquement : $y_0 \approx -0{,}44.10^{-3}$ **(mm).**
On voit que le centre de poussée est très voisin du centre de surface. Dans les calculs de poussée de vérins il est tout à fait normal de les confondre.

1.7. THÉORÈME D'ARCHIMÈDE

Dans un fluide (E) de poids volumique ϖ, imaginons un certain volume de fluide (E_1) délimité par un contour fermé (S) *(fig. 1.6)*.

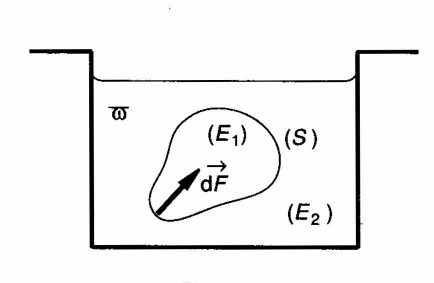


Fig. 1.6.

Si le fluide est au repos, il est évident que (E_1) est en équilibre sous l'effet des actions mécaniques extérieures suivantes :

— Action de la pesanteur ; modélisable par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{pes} \to E_1)\}.$$

— Action des forces de poussée du fluide (E_2) qui entoure (E_1) ; modélisable par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(E_2 \to E_1)\}.$$

On peut donc écrire l'équation d'équilibre de (E_1) :

$$\{\mathcal{T}(\text{pes} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \to E_1)\} = \{\vec{0}\}.$$

Nous savons qu'en G, centre de gravité du fluide (E_1) le torseur des forces de pesanteur se réduit à un glisseur

$$\{\mathcal{T}(\text{pes} \to E_1)\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

Il est donc évident qu'au **même point G** le torseur des forces de pression telles que $\vec{dF}$ *(fig. 1.6)* se réduira lui aussi à un glisseur :

$$\{\mathcal{T}(E_2 \to E_1)\} = {}_G\begin{Bmatrix} \sum_{(S)} \vec{dF} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

L'équation d'équilibre de la portion de fluide (E_1) s'écrit :

$$\sum_{(S)} \overrightarrow{dF} + \vec{P} = \vec{0}$$

(E_1) est ici une portion de fluide et $\vec{P}$ est le poids du fluide occupant le volume (E_1). Si le volume (E_1) est occupé par un solide immergé, les forces de poussée sur le contour (S) sont les mêmes ; ce qui revient à dire que la force de poussée ne dépend que du volume du « fluide déplacé » et non pas de la nature du solide immergé (plomb, polystyrène, etc., par exemple).

Théorème

Tout corps solide immergé dans un fluide en équilibre est soumis de la part de celui-ci à des forces de pression $\overrightarrow{dF}$ dont les actions mécaniques sont modélisables au centre de gravité du fluide déplacé par un glisseur dont la résultante est directement opposée au poids du fluide déplacé.

$$\{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\} = {}_G\begin{Bmatrix} -\vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

REMARQUE

- *Si le fluide dans lequel est immergé un solide est homogène, le centre de poussée G du fluide sur le solide est confondu avec le centre de gravité G_1 du fluide déplacé.*
- *Si le solide immergé est homogène, son centre de gravité G_2 est confondu avec celui du fluide déplacé G_1 et sa position d'équilibre est indifférente.*
- *Si le solide immergé n'est pas homogène (exemple : navire) le centre de gravité G_2 de celui-ci n'est pas confondu avec le centre de gravité G_1 du fluide déplacé ; l'équilibre du solide n'est alors assuré que dans la position pour laquelle le centre de poussée G est au-dessus et sur la même verticale que le centre de gravité G_2 du solide (fig. 1.7).*

2. ÉCOULEMENT PERMANENT D'UN FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE

2.1. ÉCOULEMENT PERMANENT

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vecteurs vitesse des particules fluides est indépendant du temps.

Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vecteurs vitesse est uniforme.
L'écoulement permanent est le seul que nous aurons à considérer dans ce cours. Un écoulement non-permanent conduirait à considérer les effets d'inertie des masses fluides ce qui n'est pas au programme.

2.2. ÉQUATION DE CONTINUITÉ. DÉBIT MASSIQUE. DÉBIT VOLUMIQUE

Considérons une veine fluide animée d'un écoulement permanent. Soient $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine *(fig. 1.8)*. Notons que $\|\vec{V}_1\|$ et $\|\vec{V}_2\|$ ne sont que des vitesses moyennes, tous les points de S_1 par exemple ne sont pas nécessairement animés de la même vitesse. La vitesse moyenne d'écoulement est définie par la relation (4) ci-après.

A l'instant t, on considère une certaine masse de fluide (m) comprise entre les sections (S_1) et (S_2). Soit ρ la masse volumique du fluide.
A l'instant $t + dt$, la masse (m) s'est déplacée et se trouve comprise entre (S_1') et (S_2').

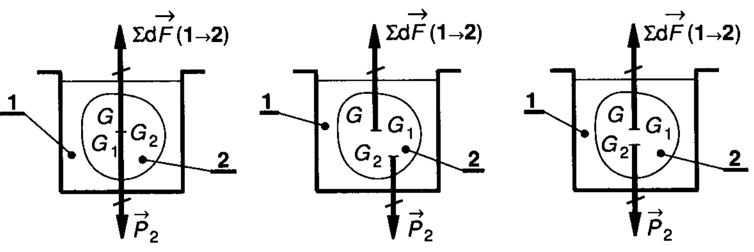


Fig. 1.7.

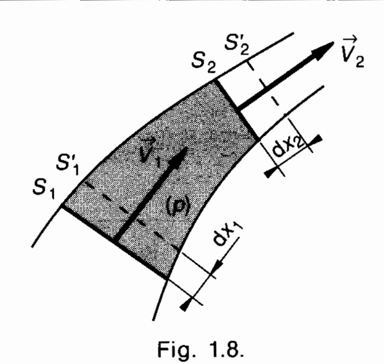


Fig. 1.8.

Écrivons que la masse élémentaire (dm) de fluide qui s'est écoulée à travers (S_1) est la même que celle qui s'est écoulée à travers (S_2). Cela traduit la *continuité de l'écoulement :*

$$\mathrm{d}m = \rho S_1 \,\mathrm{d}x_1 = \rho S_2 \,\mathrm{d}x_2 . \tag{1}$$

Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ ***quand*** $\mathrm{d}t \to 0$:

$$\boxed{q_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}} .$$

q_m est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

Unités :

dm en killogrammes (kg) ;
dt en secondes (s) ;
q_m en kilogrammes par seconde (kg/s).

Exprimons le débit massique d'après la relation (1) :

$$q_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho S_1 \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \rho S_2 \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} , \tag{2}$$

avec :
$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = v_1 = \left\| \vec{V}_1 \right\|$: vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_1 ;
$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = v_2 = \left\| \vec{V}_2 \right\|$: vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_2 ;
D'après (2) :

$$q_m = \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2 .$$

Soit, dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne v :

$$\boxed{q_m = \rho S v = \mathrm{Cte}} . \tag{3}$$

Unités :
q_m = débit massique en kilogrammes par seconde (kg/s) ;
ρ = masse volumique en kilogrammes par mètre cube (kg/m^3) ;
S = section de la veine fluide en mètres carrés (m^2) ;
v = vitesse moyenne du fluide à travers (S) en mètres par seconde (m/s).

Cette relation (3) qui définit le débit massique est appelée « **Equation de continuité** » (pour un écoulement permanent).

Débit volumique

Soit dV le volume élémentaire de fluide compris entre les sections droites (S_1) et (S_1') d'une part (S_2) et (S_2') d'autre part *(fig. 1.9)*.
On sait que d$m = \rho$. dV.

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ ***quand*** $\mathrm{d}t \to 0$

$$\boxed{q_V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}} .$$

q_V est le volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

Unités :

dV en mètres cubes (m ^{3}) ;
dt en secondes (s) ;
q_V en mètres cubes par secondes (m ^{3}/s).

D'après la relation (3) et en notant que $\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}m}{\rho}$ on peut écrire également que $q_V = \frac{q_m}{\rho}$ soit

$$\boxed{q_V = S v = \mathrm{Cte}} . \tag{4}$$

Unités :
q_V = débit volumique en mètres cubes par seconde (m^3/s) ;
S = section de la veine fluide en mètres carrés (m^2) ;
v = vitesse moyenne du fluide à travers (S) en mètres par seconde (m/s).

REMARQUE

La vitesse moyenne d'écoulement est définie par (4) :

$$v = \frac{q_V}{S} .$$

2.3. THÉORÈME DE BERNOULLI POUR UN ÉCOULEMENT PERMANENT D'UN FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE

Considérons dans une conduite parfaitement lisse le déplacement d'un certain volume d'un fluide parfait incompressible *(fig. 1.9)*.
Supposons que la masse fluide comprise entre les sections S_1 et S_2 se soit écoulée jusqu'en S'_1 et S'_2 de telle façon qu'entre S_1 et S'_1 d'une part, S_2 et S'_2 d'autre par la masse du fluide écoulé soit de 1 kg. Tout se passe comme si cette masse de fluide de 1 kg était passée de la position **1** à la position **2** *(fig. 1.9)*.

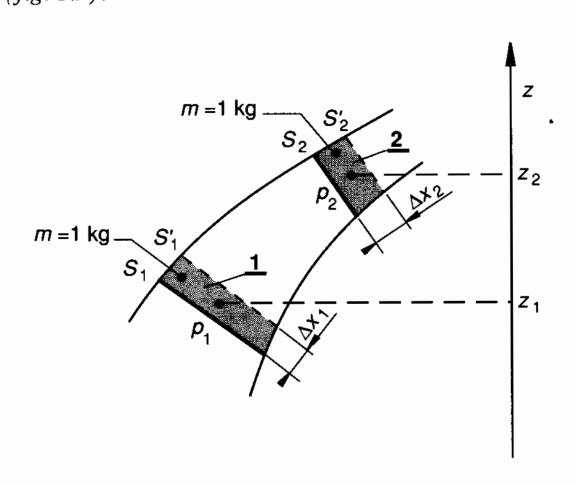


Fig. 1.9.

Si aucune énergie n'est échangée entre le fluide et le milieu extérieur pendant le trajet de celui-ci, de la position **1** à la position **2** (pas de frottement, pas d'échange de chaleur etc.) nous savons que l'énergie mécanique de la masse de 1 kg de fluide est invariable.
Nous allons exprimer cette énergie mécanique.
Pour un fluide incompressible, l'énergie mécanique peut prendre trois formes :

— énergie cinétique (E_{cin}),
— énergie potentielle de pression (E_{pres}),
— énergie potentielle de pesanteur (E_{pes}).

Energie cinétique

Soit $\vec{V}$ le vecteur vitesse de l'écoulement à travers la section S.
$\|\vec{V}\| = v$ (vitesse moyenne de l'écoulement à travers S) :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m v^2 .$$

Ici pour une masse m de 1 kg :

$$\boxed{E_{cin} = \frac{v^2}{2}} , \qquad (1)$$

avec E_{cin} en joules par kilogrammes et v en mètres par seconde.

Energie potentielle de pression

Cette énergie s'exprime comme le travail des forces de pression à travers la section S pour un déplacement Δx (voir *fig. 1.9*) :

$$E_{pres} = p \cdot S \cdot \Delta x ;$$

notons que $S \cdot \Delta x$ est le volume occupé par la masse de fluide de 1 kg, c'est-à-dire le volume massique.

Si ρ est la masse volumique du fluide :

$$1 = \rho \cdot S \cdot \Delta x$$

et l'énergie potentielle de pression pour une masse de 1 kg :

$$\boxed{E_{pres} = \frac{p}{\rho}} , \qquad (2)$$

avec E_{pres} en joules par kilogramme, p en pascals, ρ en kilogrammes par mètre cube.

Energie potentielle de pesanteur

Cette énergie s'exprime comme le travail possible des forces de pesanteur. Soit g la valeur de l'accélération de la pesanteur du lieu considéré :

$$E_{pes} = mgz ,$$

avec $z =$ altitude du centre de masse de la masse ($m = 1$ kg) du fluide considéré :

$$\boxed{E_{pes} = gz} , \qquad (3)$$

avec E_{pes} en joules par kilogramme, g en mètres par seconde carrée, z en mètres.

D'où l'équation de Bernoulli pour une masse de fluide de 1 kg :

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{Cte}} \qquad \textbf{(4)}$$

l'unité de chaque terme de la relation (4) est le joule par kilogramme (J/kg).

2.4. CAS D'UN ÉCOULEMENT 1 → 2 SANS ÉCHANGE DE TRAVAIL

Ce cas se rencontre lorsque, entre les positions **1** et **2** du fluide, il n'y a aucune machine, ni réceptrice, ni motrice *(fig. 1.9)*.
D'après la relation (4) on peut alors écrire :

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \,,$$

ou bien :

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \frac{1}{\rho}\left(p_2 - p_1\right) + g\left(z_2 - z_1\right) = 0} \qquad \textbf{(5)}$$

Dans le premier membre de cette relation (5) on voit apparaître pour 1 kg de fluide, la variation de l'énergie mécanique totale du fluide entre les positions **1** et **2** :

$$\Delta E_{\text{tot}} = \Delta E_{\text{cin}} + \Delta E_{\text{pres}} + \Delta E_{\text{pes}} = 0 \,.$$

Dans ce cas particulier, cette variation est nulle.

2.5. CAS D'UN ÉCOULEMENT 1 → 2 AVEC ÉCHANGE DE TRAVAIL

Convention de signe

Lorsque le fluide traverse une machine (pompe, turbine...) il « échange » de l'énergie avec cette machine... donc du travail mécanique. Soit W_{12} ce travail.

Nous conviendrons que :

- $W_{12} > 0$ si le travail est reçu par le fluide (*exemple* : pompes)
- $W_{12} < 0$ si le travail est fourni par le fluide (*exemple* : turbines).

Ecrivons que le travail W_{12} échangé entre la mase de fluide de 1 kg et le milieu extérieur (machine) pour passer de la position **1** à la position **2** est égal à la variation d'énergie mécanique du fluide :

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \frac{1}{\rho}\left(p_2 - p_1\right) + g\left(z_2 - z_1\right) = W_{12}} \qquad \textbf{(6)}$$

2.6. PUISSANCE D'UNE MACHINE HYDRAULIQUE NOTION DE RENDEMENT

Puissance nette : P_n

La puissance nette d'une machine hydraulique est le travail par unité de temps qu'elle échange avec le fluide qui la traverse.

Soient A et B respectivement, les sections d'entrée et de sortie de la machine.

La puissance nette s'exprime par :

$$\boxed{P_n = \frac{\mathrm{d}W_{AB}}{\mathrm{d}t}} \,.$$

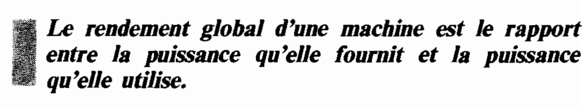
Unités : P_n en watts, $\mathrm{d}W_{AB}$ en joules, $\mathrm{d}t$ en secondes.
Soit q_m le débit massique entre A et B et W_{AB} le travail échangé par 1 kg de fluide.

Alors en une seconde :

$$\boxed{P_n = W_{AB} \times q_m} \,. \qquad \textbf{(7)}$$

Unités : P_n en watts ; W_{AB} en joules par kilogramme ; q_m en kilogrammes par seconde.

Rendement


Le rendement global d'une machine est le rapport entre la puissance qu'elle fournit et la puissance qu'elle utilise.

Suivant que la machine utilise ou produit de l'énergie mécanique, le rendement global, tout en gardant la même définition, s'exprime de façon différente.

— **Cas d'une machine qui utilise l'énergie mécanique de son arbre d'entrée** et qui fournit au fluide qui la traverse une énergie (sous forme d'E_{cin}, d'E_{pres}, d'E_{pes}). Ce cas est celui d'une pompe.
Soit P_a la puissance absorbée sur l'arbre d'entrée.
Soit P_n la puissance nette échangée avec le fluide.
Compte tenu des diverses pertes dans la machine (frottements, ... etc.) $P_n < P_a$.
Le rendement global η d'une telle machine (pompe) s'exprime par :

$$\boxed{\eta = \frac{P_n}{P_a}} \,.$$

— **Cas d'une machine qui utilise l'énergie du fluide** et qui fournit sur son arbre de sortie une certaine énergie mécanique. Ce cas est celui d'une turbine.
Soit P_n la puissance nette échangée avec le fluide.
Soit P_u la puissance utile sur l'arbre de sortie.

Compte tenu des diverses pertes dans la machine (frottements, etc.) $P_u < P_n$.
Le rendement global d'une telle machine (turbine) s'exprime par :

$$\boxed{\eta = \frac{P_u}{P_n}} .$$

2.7. APPLICATION

Un vérin différentiel est alimenté par une pompe *P* à travers un distributeur *D* *(fig. 1.10)*.

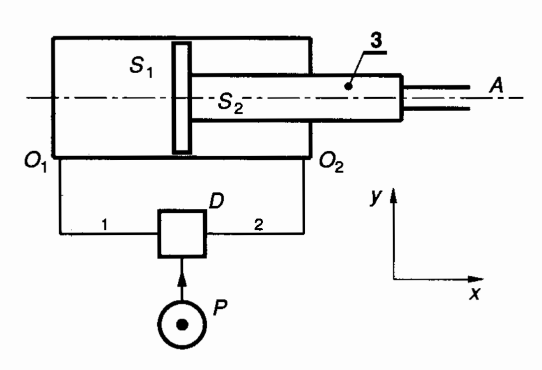


Fig. 1.10.

HYPOTHÈSES ET DONNÉES

— La pompe P assure un débit volumique q_v à la pression relative p de l'huile.
— Le distributeur D permet l'alimentation ou le retour au réservoir des tubulures 1 et 2.
— Le vérin différentiel est tel que le piston principal a une section S_1 et la tige une section S_2.

On estime à 8 % la perte de puissance due aux frottements des joints d'étanchéité.
Aucune force n'est appliquée en A et on néglige la masse de l'équipage mobile 3.
—*Données numériques :* $p = 180$ bar, $S_1 = 5\,000\ \text{mm}^2$, $S_2 = 2\,800\ \text{mm}^2$, $q_v = 1{,}5.10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$.

- **But de l'application.**

On se propose de calculer la force du vérin et sa vitesse de sortie, dans l'hypothèse où le distributeur met en communication P avec 1 et 2.

- **Calcul de la force du vérin.**

Soit $\vec{R}(\bar{3} \to 3)$ la résultante des forces appliquées à l'équipage mobile 3.

$$\vec{R}(\bar{3} \to 3) = \vec{F}(\text{huile} \to 3) + \vec{F}(\text{joints} \to 3),$$

avec $\vec{F}(\text{huile} \to 3) = p(S_1 - S_2)\,\vec{x}$,

$\vec{F}(\text{joints} \to 3) = 0{,}08\,p\,(S_1 - S_2).(-\vec{x})$,

donc $\vec{R}(\bar{3} \to 3) = 0{,}92\,p\,(S_1 - S_2)\,\vec{x}$.

Application numérique :

$$\|\vec{R}(\bar{3} \to 3)\| \approx \mathbf{36\,432\ N}.$$

- **Calcul de la vitesse de sortie v du vérin**

Considérons les débits au niveau du distributeur D *(fig. 1.11)*.
Soient q_{v_1} et q_{v_2} les débits respectifs des tubulures 1 et 2.
On écrira en D :

$$q_{v_1} = q_v + q_{v_2}$$

Fig. 1.11.

avec $q_{v_1} = S_1\,v$; $q_{v_2} = (S_1 - S_2)\,v$; q_v (connu),
d'où le calcul de $v = \dfrac{q_v}{S_2}$.
Numériquement : $\mathbf{v \approx 0{,}536\ m/s}$.

- **Calcul de la puissance du vérin**

Celle-ci s'exprime de façon générale pour un mouvement de translation rectiligne par :

$$P = \vec{F}.\vec{V},$$

ici $P = \|\vec{R}(\bar{3} \to 3)\|.v$, soit $\mathbf{P \approx 19{,}5\ kW}$.

- **Calcul de la puissance nette de la pompe.**

Compte tenu des 8 % perdus en frottements :

$$P_n = \frac{P}{0{,}92}, \qquad \mathbf{P_n \approx 21{,}2\ kW}.$$

3. NOTIONS DE PERTES DE CHARGE

3.1. DÉFINITIONS

Lorsqu'un fluide parfait s'écoule dans une conduite plus ou moins lisse, qui peut posséder des variations brusques de section ou de direction, une partie de l'énergie du fluide sera utilisée dans les frottements contre les parois, dans les turbulences et décollements de la veine fluide. Cette énergie perdue constitue ce qu'il est convenu d'appeler les « **pertes de charge** ».
Considérons un écoulement $\mathbf{1 \to 2}$ d'un fluide parfait dans une conduite, tel que entre **1** et **2** il n'y ait pas de machine hydraulique. Notons J_{12} la perte d'énergie ou perte de charge du fluide. J_{12} est une énergie fournie par le fluide donc $J_{12} < \mathbf{0}$.

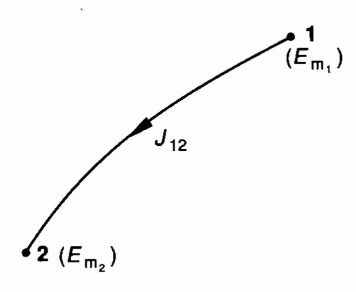


Fig. 1.12.

Entre **1** et **2** *(fig. 1.12)* on peut alors écrire que l'énergie mécanique totale en **2**, E_{m_2} est égale à l'énergie mécanique totale en **1**, E_{m_1} moins les pertes dans la conduite, c'est-à-dire J_{12} avec $(J_{12} \leq 0)$:

$$E_{m_2} < E_{m_1}, \quad E_{m_2} = E_{m_1} - \text{pertes},$$

$$E_{m_2} = E_{m_1} + J_{12}, \quad E_{m_2} - E_{m_1} = J_{12}.$$

3.2. THÉORÈME DE BERNOULLI APPLIQUÉ À UN ÉCOULEMENT AVEC PERTES DE CHARGE

D'après ce qui vient d'être dit au *paragraphe 3.1* précédent, on peut donc écrire pour une masse de 1 kg de fluide s'écoulant de **1** vers **2** :

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + J_{12},$$

avec $J_{12} < 0$ en joules par kilogramme, ou

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + g(z_2 - z_1) = J_{12}}$$

3.3. DIFFÉRENTES EXPRESSIONS DE LA PERTE DE CHARGE

Suivant l'utilisation, les pertes de charge peuvent s'exprimer par :

— une perte d'énergie cinétique, c'est-à-dire une perte de vitesse du fluide ;

— une perte d'énergie potentielle de pression, c'est-à-dire une perte de pression du fluide ;

$\frac{\Delta p}{\rho} = J_{12}$ et donc : $\Delta p = \rho J_{12} \quad (\Delta p < 0)$;

— une perte d'énergie potentielle de pesanteur, c'est-à-dire une perte d'altitude pour le fluide. C'est très souvent sous cette dernière forme que les pertes de charge s'expriment :

$g \,.\, \Delta z = J_{12}$ et donc : $\Delta z = \frac{J_{12}}{g} \quad (\Delta z < 0)$.

4. ÉCOULEMENT PERMANENT DES FLUIDES RÉELS

4.1. VISCOSITÉ

Soit une conduite de section circulaire dans laquelle on considère l'écoulement permanent d'un fluide réel.

Dans une section droite (S) de la conduite, les vecteurs vitesse des différentes particules fluides sont différents. Les filets fluides en contact avec la paroi sont très ralentis par le phénomène de frottement. Ce frottement et donc ce ralentissement dépendra évidemment de la rugosité de la paroi.
Considérons maintenant deux particules fluides très voisines M_1 et M_2 appartenant à un rayon de (S) et distantes de dy *(fig. 1.13)*.

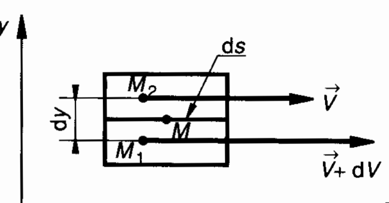


Fig. 1.13.

Le vecteur vitesse de chaque particule est une fonction de la position de la particule sur le rayon de la conduite : $v = f(y)$. On peut modéliser ces deux particules par deux volumes élémentaires **1** et **2** de fluide en contact suivant une petite facette d'aire dS. Soit M un point de dS. M_1 et M_2 n'étant pas animés de la même vitesse glissent l'une par rapport à l'autre. Si l'indice **0** est donné à la paroi :

$$\vec{V}(M \in \mathbf{1/0}) = \vec{V} + \overrightarrow{dV}$$

et

$$\vec{V}(M \in \mathbf{2/0}) = \vec{V}.$$

Appliquons la loi de composition des vecteurs vitesse associée au point M :
$\vec{V}(M \in \mathbf{1/0}) = \vec{V}(M \in \mathbf{1/2}) + \vec{V}(M \in \mathbf{2/0})$
$\vec{V}(M \in \mathbf{1/2})$ est une vitesse de glissement telle que nous l'avons définie en cinématique du solide :

$$\vec{V}(M \in \mathbf{1/2}) = \vec{V}(M \in \mathbf{1/0}) - \vec{V}(M \in \mathbf{2/0}).$$

Donc $\vec{V}(M \in \mathbf{1/2}) = \overrightarrow{dV}$ (voir *fig. 1.13* et *1.14*).
Considérons la force élémentaire de contact en M que la particule **2** exerce sur la particule **1**. D'après les lois de Coulomb on sait que *(fig. 1.14)*.

$$\overrightarrow{dF}(\mathbf{2 \to 1}) \,.\, \vec{V}(M \in \mathbf{1/2}) < 0.$$

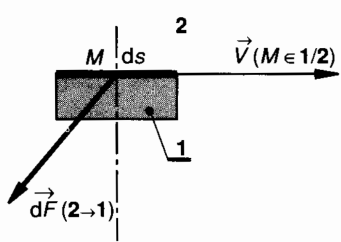


Fig. 1.14.

Réciproquement et si on revient à la *figure 1.13* on peut dessiner $\overrightarrow{dF}(\mathbf{1 \to 2})$ opposée à $\overrightarrow{dF}(\mathbf{2 \to 1})$ avec ses deux composantes, normale $\overrightarrow{dF_n}$ et tangentielle $\overrightarrow{dF_t}$ *(fig. 1.15)*.

Avec $\overrightarrow{dF}_n = p\, dS\, \vec{y}$ (p est la pression en M dans le fluide).
$\overrightarrow{dF}_t$ est proportionnelle à la surface dS de la facette et au taux de variation de la vitesse entre M_1 et M_2. (Nous avons déjà vu que $v = f(y)$.)

Donc : $\overrightarrow{dF}_t = \mu\, dS \dfrac{\overrightarrow{dV}}{dy}$.

Scalairement on écrit si $\overrightarrow{dV} = dv \, . \, \vec{x}$:

$$\boxed{dF_t = \mu\, dS \frac{dv}{dy}}$$ (formule de Newton).

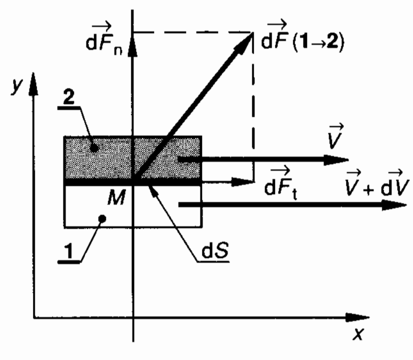


Fig. 1.15.

• Notons que si le fluide est au repos, $\overrightarrow{dV} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{dF}_t = \vec{0}$,
par conséquent $\overrightarrow{dF}(1 \to 2) = \overrightarrow{dF}_n = p\, dS\, \vec{y}$ est normale en M à dS.
Conséquence : en hydrostatique, un fluide réel peut être assimilé à un fluide parfait. (Nous avons déjà fait état de cette propriété.)

• Quand le fluide est en mouvement, il existe une composante tangentielle élémentaire de contact entre les filets fluides. cette composante $\overrightarrow{dF}_t$ est à rapprocher de la composante tangentielle de frottement dans le contact solide sur solide ; là s'arrête la comparaison car si entre solides la composante tangentielle de frottement ne dépend pratiquement pas de la vitesse de glissement, à l'intérieur d'un fluide par contre, $\overrightarrow{dF}_t$ est proportionnelle au taux de variation de vitesse des filets fluides $\dfrac{\overrightarrow{dV}}{dy}$ sur le rayon de la veine fluide.

4.2. VISCOSITÉ DYNAMIQUE

Dans la formule de Newton, $dF_t = \mu\, dS \dfrac{dv}{dy}$
μ est appelé « **viscosité dynamique** ».

Déterminons son unité :

$$\mu = \frac{dF_t \, . \, dy}{dS \, . \, dv},$$

si $[\mu]$ désigne l'unité de viscosité dynamique alors :

$$[\mu] = \frac{1\ \text{N} \times 1\ \text{m}}{1\ \text{m}^2 \times \dfrac{1\ \text{m}}{1\ \text{s}}},$$

soit $[\mu] = \dfrac{1\ \text{N} \times 1\ \text{s}}{1\ \text{m}^2}$;
on sait que $\dfrac{1\ \text{N}}{1\ \text{m}^2} = 1$ pascal
donc, **l'unité de « viscosité dynamique » est le pascal seconde (Pa.s).**

Nota : Jusqu'à ces dernières années, l'unité de pression, le pascal étant récente), l'unité de « viscosité dynamique » s'exprimait par **le newton seconde par mètre carré ou Poiseuille (Pl).** Il est bon de connaître ces différentes dénominations.

A titre indicatif, donnons quelques valeurs de μ pour différents liquides à 20 °C.

- *Eau* : 0,001 Pa.s.
- *Essence* : 0,006 Pa.s.
- *Huiles de graissage* (courantes) :

$$0{,}01 \leqslant \mu \leqslant 0{,}04 \text{ (Pa.s)}.$$

4.3. VISCOSITÉ CINÉMATIQUE

La « **viscosité cinématique** » (ν) d'un fluide est égale au rapport de sa viscosité dynamique (μ) par sa masse volumique (ρ) :

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}}.$$

L'unité de viscosité cinématique, notée $[\nu]$ s'exprime alors par :

$$[\nu] = \frac{1\ \text{N} \times 1\ \text{s}}{1\ \text{m}^2 \times \dfrac{1\ \text{kg}}{1\ \text{m}^3}} = \frac{1\ \text{m}^2}{1\ \text{s}}.$$

Pour l'eau par exemple : $\rho = 10^3\ \text{kg/m}^3$ et donc : $\nu_{eau} = 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$ (*à* 20° C).
Industriellement, une unité de viscosité cinématique est encore très employée : le stokes (St) :

$$1 \text{ stokes} = 1\ \text{cm}^2/\text{s},$$

donc 1 stokes $= 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}$.

Pour l'eau : $\nu_{eau} \approx 10^{-2}$ St.

• Notons que la température et la pression agissent sur la viscosité d'un fluide.

— **La viscosité diminue en général avec la température :** C'est « l'indice de viscosité » qui est la caractéristique permettant de chiffrer cette variation. Pour les huiles de graissage de moteur, l'incorporation d'additifs spéciaux permet au contraire à l'huile d'être plus visqueuse à chaud qu'à froid.

— **La viscosité augmente avec la pression :** Dans le cas de pressions très élevées on peut utiliser la relation :

$$\nu = \nu_0 \, a^{\left(\frac{p}{p_0} - 1\right)},$$

$\nu_0 =$ viscosité cinématique à la pression atmosphérique p_0 ; $a = 1{,}003$.
Considérons par exemple une huile de viscosité cinématique 0,5 St à la pression atmosphérique

$$\nu_0 = 0{,}5 \text{ St} = 0{,}5 . 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s},$$

à la pression $p = 180$ bar :

$$\nu = 0{,}5 . 10^{-4} . 1{,}003^{179}, \quad \boldsymbol{\nu = 0{,}85 . 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}}.$$

4.4. DIFFÉRENTS TYPES D'ÉCOULEMENTS. NOMBRE DE REYNOLDS

Dans une veine fluide, on peut immerger des particules dont il est possible de filmer le mouvement et on peut alors distinguer deux types d'écoulements. La trajectoire d'une particule donne l'image d'un filet fluide.

— Si les filets fluides sont des lignes régulières, sensiblement parallèles entre elles, l'écoulement est dit **laminaire.**

— Si les filets fluides s'enchevêtrent, s'enroulent sur eux-mêmes etc. l'écoulement est dit **turbulent.** Des études plus fines ont montré qu'il existe encore une subdivision entre les *écoulements turbulents lisses* et les *écoulements turbulents rugueux*.

La limite entre ces différents types d'écoulements est évidemment difficile à appréhender.
Reynolds a trouvé une expression qui permet de distinguer ces deux types d'écoulement :

$$\mathcal{R} = \frac{vl}{\nu}$$

ou pour une conduite de diamètre intérieur d :

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{vd}{\nu}}$$

• **$\mathcal{R}$ est appelé le nombre de Reynolds.**
C'est un nombre sans dimension. Suivant la valeur de $\mathcal{R}$, l'écoulement sera laminaire ou turbulent.

• v est la vitesse d'écoulement (vitesse moyenne) à travers la section considérée (m/s).
• l est la largeur de la veine fluide. Pour une conduite cylindrique de diamètre d, cas le plus fréquent : $l = d$ (l et d en mètres).
• ν est la viscosité cinématique du fluide (en m^2/s).

Si $\mathcal{R} < 2\,000$ l'écoulement est certainement laminaire.
Si $\mathcal{R} > 2\,000$ l'écoulement peut être turbulent.

Notons qu'en dehors de fluides très visqueux (pétrole brut par exemple) les écoulement rencontrés en milieu industriel sont habituellement turbulents.

4.5. PERTES DE CHARGES SINGULIÈRES

Quand la conduite subit de brusques variations de section ou de direction il se produit des pertes de charge dites singulières ; elles sont généralement mesurables et font partie des caractéristiques de l'installation.
On les exprime par :

$$\boxed{J_S = -\zeta \frac{v^2}{2}},$$

où $S = 1, 2, 3...$ indice de l'accident de forme de la conduite.
ζ est un coefficient (sans unité) qui dépend de la nature et de la géométrie de « l'accident » de forme.
Coude à angle droit : $\zeta = 1$, entrée dans une conduite : $\zeta = 0{,}5$, vannes et robinets $0{,}05 < \zeta < 0{,}5$ environ.
Les constructeurs dans leurs catalogues donnent la valeur de ζ.
$v =$ vitesse la plus grande du fluide dans « l'accident » de forme.

EXEMPLE

Pour un coude à angle droit d'une conduite parcourue par une huile à la vitesse $v = 2$ m/s.
Pour un coude à angle droit : $\xi = 1$

$$J_S = -1 \times \frac{4}{2}, \quad \boldsymbol{J_S = -2 \text{ J/kg}}.$$

4.6. PERTES DE CHARGES SYSTÉMATIQUES OU LINÉAIRES

C'est la perte d'énergie d'un fluide qui se déplace dans une conduite rectiligne de section constante ; elle est proportionnelle à la longueur l de la conduite et elle est plus importante pour un écoulement turbulent que pour un écoulement laminaire :

$$\boxed{J_{12} = -\lambda \frac{v^2}{2d} l} \quad \textbf{(formule de Weisbach)}.$$

- v est la vitesse moyenne d'écoulement dans la conduite en mètre par seconde ;
- l est la longueur de la conduite en mètre ; d est le diamètre de la conduite en mètre ;
- λ est le coefficient de perte de charge linéaire.
- λ est sans unité, on peut le vérifier aisément. C'est le coefficient de perte de charge.

λ dépend de la nature de l'écoulement et notamment du nombre de Reynolds $\mathcal{R}$.

Dans un régime laminaire : $\mathcal{R} < 2\,000$:

$$\lambda = \frac{64}{\mathcal{R}} \quad \text{(formule de Poiseuille)}.$$

Dans un régime turbulent lisse : $2\,000 < \mathcal{R} < 10^5$

$$\lambda = 0{,}316\,\mathcal{R}^{-0{,}25} \quad \text{(formule de Blasius)}.$$

Pour un écoulement turbulent rugueux : $\mathcal{R} > 10^5$, on lit généralement la valeur de λ sur une abaque établie par Nikuradse ou Moody.

Pour une conduite industrielle on utilise le plus souvent la **formule de Blench :**

$$\lambda = 0{,}79\sqrt{\frac{\varepsilon}{D}},$$

avec

ε = rugosité conventionnelle (en mm),
D = diamètre intérieur de la conduite (en mm).

On sait par exemple que :

ε = 0,15 à 0,25 : tuyaux en acier soudé ;
ε = 0,75 à 1 : conduites rivetées ;
ε = 0,15 à 2,5 : conduites en béton ;

etc.

4.7. THÉORÈME DE BERNOULLI APPLIQUÉ À L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE RÉEL

Si ΣJ_{12} représente la somme de toutes les pertes de charge, singulières et linéaires entre les sections repérées **1** et **2** et si W_{12} représente le travail mécanique échangé entre le fluide et les machines (éventuellement) placées entre **1** et **2**, alors le théorème de Bernoulli prend la forme générale suivante (pour 1 kg de fluide) :

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + g(z_2 - z_1) = W_{12} + \Sigma J_{12}$$

Notons que le premier membre de cette relation exprime, pour un kilogramme de fluide, la variation algébrique d'énergie mécanique totale du fluide entre **1** et **2**. On poutrra écrire :

$$\Delta E_{\text{méca}} = \Delta E_{\text{cin}} + \Delta E_{\text{pres}} + \Delta E_{\text{pes}}.$$

Le second membre de la relation précédente comporte deux termes :

W_{12} = travail mécanique échangé entre un kilogramme de fluide et une éventuelle machine située entre **1** et **2**.
$W_{12} > 0$ si la machine fournit de l'énergie au fluide (pompe) ;
$W_{12} < 0$ si la machine reçoit de l'énergie du fluide (turbine) ;
$W_{12} = 0$ si entre **1** et **2** il n'y a pas de machine. **1** → **2** est alors un écoulement « en conduite ».
ΣJ_{12} = somme des pertes de charge pour 1 kg de fluide.
$\Sigma J_{12} < 0$, car toutes les pertes de charges représentent de l'énergie perdue par le fluide.

4.8. APPLICATION

Un oléoduc est une conduite horizontale de diamètre intérieur d = 105,6 mm et de longueur l = 4 km.
On souhaite que le fluide transporté : masse volumique $\rho = 0{,}8.10^3$ kg/m³ et viscosité ν = 2 St, ait un débit volumique de 1 200 l.min^{-1}.

QUESTION

Quelle est la puissance nette de la pompe assurant cette fonction ?

RÉPONSES

La puissance à fournir dépend évidemment des pertes de charge linéaires et celles-ci ne peuvent se calculer que si l'on connaît le régime de l'écoulement.

- **Calcul de la vitesse d'écoulement :**

On sait que $q_v = Sv$,
avec

q_v = 1 200 l/min = 0,02 m³/s
S = section de la conduite en mètres carrés.

Numériquement : $\mathbf{v}$ **= 2,28 m/s.**

- **Régime de l'écoulement. Nombre de Reynolds :**

On sait que $\mathcal{R} = \frac{vd}{\nu}$,

avec

v = 2,28 m/s,
d = diamètre de la conduite en mètres,
ν = 2 St = 2.10^{-4} m²/s.

Numériquement : $\mathcal{R}$ **≈ 1 204.**
L'écoulement est laminaire.

- **Calcul du coefficient de pertes de charge :**

D'après la formule de Poiseuille :

$$\lambda = \frac{64}{\mathcal{R}}.$$

Numériquement : λ **≈ 0,053.**

- **Calcul de la perte de charge J_{12} dans la conduite.**

On sait que $J_{12} = -\lambda\,\frac{v^2}{2d}\,l$,

avec λ = 0,053 ; v = 2,28 m/s ; $d = 105{,}6.10^{-3}$ m ; $l = 4.10^3$ m.

Numériquement : $\mathbf{J_{12}}$ **= – 5,22 kJ/kg.**

• **Appliquons le théorème de Bernoulli** à l'écoulement dans la conduite entre l'entrée 1 et la sortie 2

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + g(z_2 - z_1) = W_{12} + J_{12},$$

avec $v_2 = v_1$; $p_2 = p_1$; $z_2 = z_1$; $W_{12} =$ travail net fourni par la pompe ; $J_{12} = -5{,}22$ kJ/kg.

Numériquement : $\mathbf{W_{12} = 5{,}22}$ **kJ/kg.**

• **Puissance nette de la pompe :**
On sait que $P_n = q_m W_{12}$, avec le débit massique

$$q_m = \rho q_v,$$

avec $q_m = 0{,}8 \times 10^3 \times 0{,}02$ et $W_{12} = 5{,}22$.

Numériquement : $\mathbf{P_n \approx 83{,}5}$ **kW.**

4.9. APPLICATION

La conduite de refoulement d'une pompe a un diamètre $d = 12{,}5$ mm et une longueur de 3 mètres. Le débit assuré par la pompe est 60 l.min^{-1}. Le fluide transporté est une huile de masse volumique $\rho = 900$ kg/m^3 et de viscosité $\nu = 0{,}5.10^{-4}$ m^2/s.

QUESTION

Quelle est la perte de charge, exprimée en bar, dans la conduite de refoulement ?

RÉPONSE

Le calcul des pertes de charges ne peut se faire que si l'on connaît le régime de l'écoulement.

• **Calcul de la vitesse d'écoulement :**
On sait que $q_v = Sv$,
avec

$q_v = 60$ l/min $= 10^{-3}$ m^3/s ;
S = section de la conduite en mètres carrés.

Numériquement : $\mathbf{v \approx 8{,}15}$ **m/s.**

• **Régime de l'écoulement. Nombre de Reynolds :**
On sait que $\mathcal{R} = \dfrac{vd}{\nu}$,
avec $v = 8{,}15$ m/s ; $d =$ diamètre de la conduite en mètres ; $\nu = 0{,}5.10^{-4}$ m^2/s.

Numériquement : $\mathbf{\mathcal{R} \approx 2\,037}$; l'écoulement est turbulent.

• **Calcul du coefficient de pertes de charge :**
D'après la formule de Blasius $\lambda = 0{,}316\,\mathcal{R}^{-0{,}25}$.

Numériquement : $\mathbf{\lambda = 0{,}047}$.

• **Calcul de la perte de charge J_{12} dans la conduite :**
On sait que $J_{12} = -\lambda \dfrac{v^2}{2d} l$,
avec $\lambda = 0{,}047$; $v = 8{,}15$ m/s ; $d = 12{,}5.10^{-3}$ m ; $l = 3$ m.

Numériquement : $\mathbf{J_{12} = -374{,}6}$ **J/kg.**

On peut exprimer cette perte de charge sous forme de chute de pression

$$J_{12} = \frac{\Delta p}{p} \quad \text{d'où} \quad \Delta p = \rho J_{12}.$$

soit environ : $\mathbf{\Delta p = -3{,}37}$ **bar.**

5. APPLICATIONS

5.1. ALIMENTATION D'UN VÉRIN SIMPLE EFFET *(fig. 1.16)*

Données et hypothèses

— Un vérin simple effet V est caractérisé par :
son diamètre intérieur $d_V = 100$ mm ;
son rendement $\eta_V = 0{,}9$, les pertes étant dues aux frottements des joints d'étanchéité.
On souhaite que ce vérin développe une force de 75.10^3 N, sa tige se déplaçant à la vitesse uniforme de $v_V = 0{,}2$ m/s.

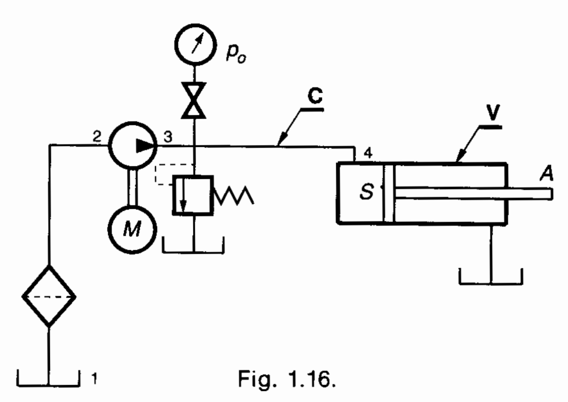
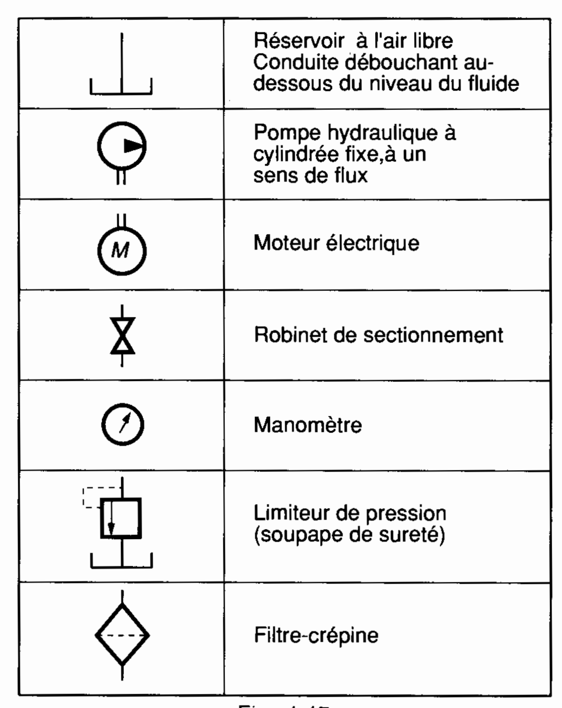


Fig. 1.16.

Le dispositif d'alimentation du vérin comprend essentiellement une pompe et une soupape de sûreté. On donne *(fig. 1.17)* un extrait de la normalisation des schémas pour appareils hydromécaniques.



	Réservoir à l'air libre Conduite débouchant au-dessous du niveau du fluide
	Pompe hydraulique à cylindrée fixe,à un sens de flux
M	Moteur électrique
	Robinet de sectionnement
	Manomètre
	Limiteur de pression (soupape de sureté)
	Filtre-crépine

Fig. 1.17.

— Une pompe dont on connaît seulement le rendement approximatif $\eta_P = 0{,}82$.
— La tuyauterie de refoulement de la pompe a une longueur $l_c = 8$ m et un diamètre intérieur de $d_c = 21{,}6$ mm.
— L'huile utilisée a une viscosité $\nu = 0{,}25$ St et sa masse volumique est $\rho = 850\ \text{kg/m}^3$.
— Les pertes de charges singulières sont négligées, ainsi que la différence de niveau entre 3 et 4.

But du problème

Déterminer la puissance du moteur électrique M. Pour cela, on adopte le plan de travail suivant :

QUESTIONS

1° Calcul de la pression p_V dans le vérin.

2° Calcul du débit volumique q_c dans la tuyauterie 3-4.

3° Calcul de la vitesse v_c de l'huile dans la tuyauterie 3-4.

4° Calcul du nombre de Reynolds de l'écoulement 3-4.

5° Calcul du coefficient de pertes de charges λ dans la tuyauterie 3-4.

6° Calcul de la perte de charge J_{34} dans la conduite.

7° Calcul de la pression p_0 de réglage du limiteur de pression.

8° Calcul de la puissance nette de la pompe : P_n.

9° Calcul de la puissance utile du moteur : P_u.

RÉPONSES

1° Exprimons la force F_V du vérin, en tenant compte de son rendement :

$$F_V = p_V\, S_V\, \eta_V ,$$

donc $p_V = \dfrac{F_V}{S_V\, \eta_V}$, avec $S_V = \dfrac{\pi\, d_V^2}{4}$.

Numériquement : $p_V = 10{,}61$ MPa ou $\boldsymbol{p_V \approx 106{,}1}$ **bar.**

2° Le débit dans la tuyauterie 3-4 est le même que dans le vérin :

$$q_c = q_V = S_V\, v_V .$$

Numériquement : $\boldsymbol{q_c = 1{,}57 \,.\, 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}}$.

3° Soit v_c la vitesse de l'huile dans la tuyauterie 3-4 :

$$q_c = v_c \,.\, S_c \qquad \text{avec} \quad S_c = \frac{\pi d_c^2}{4},$$

alors $v_c = \dfrac{q_c}{S_c}$.

Numériquement : $\boldsymbol{v_c = 4{,}28\ \text{m/s}}$.

4° Soit $\mathcal{R}$ le nombre de Reynolds de l'écoulement 3-4 :

$$\mathcal{R} = \frac{v_c\, d_c}{\nu},$$

avec $\nu = 0{,}25\ \text{St} = 0{,}25 \,.\, 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}$.
Numériquement : $\boldsymbol{\mathcal{R} \approx 3\,698}$ **: l'écoulement 3-4 est turbulent lisse.**

5° Pour un écoulement turbulent lisse, le coefficient de pertes de charge λ est donné par la formule de Blasius :

$$\lambda = 0{,}316\, \mathcal{R}^{-0{,}25} .$$

Numériquement : $\boldsymbol{\lambda \approx 0{,}0405}$.

6° Exprimons la perte de charge J_{34} dans la conduite :

$$J_{34} = -\lambda\, \frac{v_c^2}{2\, d_c}\, l_c .$$

Numériquement : $\boldsymbol{J_{34} = -137\ \text{J/kg}}$.

7° Exprimons la perte de charge J_{34} en variation de pression $\Delta p = \rho J_{34}$, avec $\Delta p = p_4 - p_3$,

$$\Delta p = -116\,450\ \text{Pa}, \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{\Delta p = -1{,}16\ \text{bar}},$$

alors $p_3 = p_4 - \Delta p = 107{,}26$ bar.
On peut choisir en adoptant un faible coefficient de sécurité :

$$\boldsymbol{p_0 = 110\ \text{bar}}.$$

8° Admettons que la pression à l'aspiration de la pompe soit égale à la pression atmosphérique.
Comme les pressions définies dans les questions précédentes sont des pressions effectives, on écrira que

$$p_3 - p_2 = 107{,}26\ \text{bar}.$$

La variation de pression entre 2 et 3 est très importante, nous pouvons donc négliger la variation d'énergie cinétique du fluide entre 2 et 3, de même que la variation d'altitude. Ecrivons le théorème de Bernoulli entre 2 et 3 :

$$\frac{v_3^2 - v_2^2}{2} + \frac{1}{\rho}\,(p_3 - p_2) + g\,(z_3 - z_2) = W_{23},$$

avec les hypothèses précédentes :

$$W_{23} = \frac{1}{\rho}\,(p_3 - p_2) .$$

Puissance nette de la pompe :

$$P_n = W_{23} \times q_m \quad \text{avec} \quad q_m = \rho q_V .$$

Le débit volumique de la pompe a la même valeur que q_c, donc

$$P_n = (p_3 - p_2)\, q_c .$$

Numériquement : $\boldsymbol{P_n \approx 16{,}8\ \text{kW}}$.

9° Exprimons le rendement de la pompe :

$$\eta_P = \frac{P_n}{P_u}, \quad \text{donc } P_u = \frac{P_n}{\eta_P}.$$

Numériquement : $\boldsymbol{P_u \approx 20{,}5\ \text{kW}}$.

5.2. ÉTUDE DU CIRCUIT D'ALIMENTATION D'UN VÉRIN AVEC AMORTISSEUR FIXE DES DEUX CÔTÉS

Buts de l'application

— Analyser les fonctions à assurer par l'organe de puissance (vérin).
— Concevoir le circuit de commande hydraulique.
— Calculer les caractéristiques des principaux appareils du circuit.

Données générales

On donne le schéma *(fig. 1.18)*, les dimensions du vérin et les différentes vitesses de déplacement du piston :

diamètre du piston : $d_1 = 100$ mm ;
diamètre de la tige : $d = 40$ mm.

On désigne par S_1 la section active correspondant à l'orifice O_1 et par S_2 la section active correspondant à l'orifice O_2.

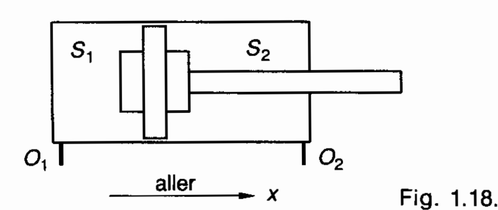


Fig. 1.18.

Dans le sens $\vec{x}$ (course aller), le mouvement du vérin est constitué de deux phases :
— *Phase 1 :* Avance rapide, $\vec{v}_1 = 0{,}1\ \vec{x}$ (m/s).
— *Phase 2 :* Avance lente de travail, $\vec{v}_2 = 0{,}02\ \vec{x}$ (m/s) pendant cette phase, le vérin doit développer une force $\vec{F}$ telle que $\|\vec{F}\| = 10^5$ N.

Dans le sens $-\vec{x}$ (course retour), le mouvement doit être rapide ; soit $\vec{v}_3 = -v_3\ \vec{x}$ (m/s) la vitesse de retour qui sera calculée.

Analyse fonctionnelle

On choisit d'alimenter le vérin à l'aide de deux distributeurs à commande électrique et retour en position neutre par ressorts de rappel.
Rôle du premier distributeur 4/3 (fig. 1.19).

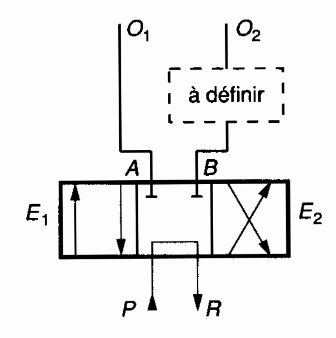


Fig. 1.19.

On convient que lorsque l'électro-aimant E_1 est excité, ($E_1 = 1$) le tiroir du distributeur 4/3 se déplace vers la droite.

— *Phase 1 :* Avance rapide

$$\left.\begin{matrix} E_1 = 1 \\ E_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} P \to O_1, \\ O_2 \to R. \end{matrix}\right.$$

P désigne la pompe, *R* désigne le réservoir.

Rôle du second distributeur 2/2 (fig. 1.20).

Dans le rectangle « à définir » de la *figure 1.19*, on place en parallèle, un clapet de non-retour et un étranglement réglable dans le but de réduire la vitesse de déplacement du vérin, et un distributeur 2/2 commandé par l'électro-aimant E_3.

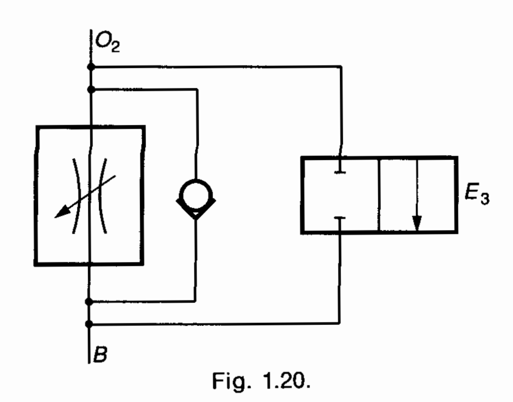


Fig. 1.20.

Quand E_3 est excité ($E_3 = 1$) le tiroir du distributeur 2/2 se déplace vers la gauche.

Phase 1 : Avance rapide

$$\left.\begin{matrix} E_1 = 1 \\ E_2 = 0 \\ E_3 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} P \to O_1, \\ O_2 \to R. \end{matrix}\right.$$

Phase 2 : Avance lente-travail.
E_3 est désexcité et le tiroir du distributeur 2/2 revient dans la position neutre (celle de la *figure 1.20) :*

$$\left.\begin{matrix} E_1 = 1 \\ E_2 = 0 \\ E_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} P \to O_1 \\ O_2 \to R \end{matrix}\right.$$

Phase 3 : Retour rapide.
On désexcite E_1 et on excite E_2 :

$$\left.\begin{matrix} E_1 = 0 \\ E_2 = 1 \\ E_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} P \to O_2 \\ O_1 \to R \end{matrix}\right.$$

Le schéma est complété par une pompe à cylindrée fixe à un sens de flux, mue par un moteur électrique. Un limiteur de pression, taré à p_0 (pression relative à calculer) complète l'équipement *(fig. 1.21)*.

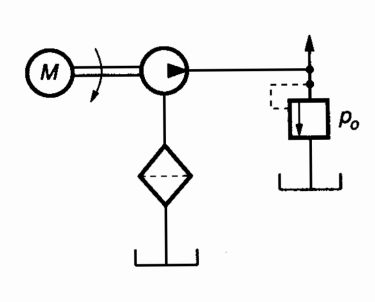


Fig. 1.21.

Schéma général de l'installation

(fig. 1.22)

Notons que, suivant les conventions de la normalisation (NF E04-051 ; NF E04-056 ; etc.) le schéma est toujours représenté avec les appareils en position de repos.

Fig. 1.22.

QUESTION 1

Calculer le débit de la pompe. Le calcul se fera lors de la phase 1, d'avance rapide.

RÉPONSE

On rappelle que pendant la phase 1 :

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = 1 \\ E_2 = 0 \\ E_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} P \to O_1 \\ O_2 \to R \end{array}\right.$$

Soit q_v le débit volumique de la pompe

$$q_v = S_1 v_1 ,$$

avec $S_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4} \approx 7\,854.10^{-6}\ \text{m}^2$; $v_1 = 0{,}1$ m/s.

Numériquement : $\boldsymbol{q_v \approx 785{,}4.10^{-6}\ \text{m}^3/\text{s}}$ (soit environ 47 l.min^{-1}).

QUESTION 2

Calculer la vitesse v_3 de retour rapide du vérin correspondant à la phase 3.

RÉPONSE

On rappelle que pendant la phase 3 :

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = 0 \\ E_2 = 1 \\ E_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} P \to O_2 \\ O_1 \to R \end{array}\right.$$

avec le même débit volumique q_v de la pompe, on peut écrire :

$$q_v = S_2 v_3 ,$$

avec

$$S_2 = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d^2) \approx 6\,597.10^{-6}\ \text{m}^2 ; \qquad v_3 = \frac{q_v}{S_2}.$$

Numériquement : $\boldsymbol{v_3 \approx 0{,}12}$ **m/s.**

QUESTION 3

Dans le but de réaliser la vitesse réduite de sortie correspondant à la phase 2 ($v_2 = 0{,}02$ m/s), on règle la perte de charge dans l'étrangleur à $\Delta p = 4$ bars. Analyser les forces qui s'exercent sur le piston du vérin et calculer la pression p_1 nécessaire sur la surface S_1. Toutes les pressions sont des pressions relatives. On donne le rendement global du vérin : $\eta_V = 0{,}85$.

RÉPONSE *(fig. 1.23)*

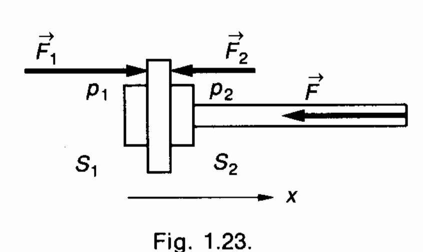


Fig. 1.23.

Le piston du vérin est soumis aux actions mécaniques suivantes :

- Force extérieure appliquée en bout de tige (donnée) :

$$\vec{F} = -10^5\,\vec{x} \quad (\text{N}).$$

- Force $\vec{F}_1$ due à la pression p_1 sur la surface S_1. Considérant que le déplacement du vérin est dans le sens $\vec{x}$ (pendant la phase 2 de travail), la force $\vec{F}_1$ réelle est plus petite que le produit $p_1 S_1$, soit, en tenant compte du rendement η_V,

$$\vec{F}_1 = p_1\,S_1\,\eta_V\,\vec{x}.$$

- Force $\vec{F}_2$ due à la pression $p_2 = \Delta p = 4$ bars $= 4.10^5$ Pa sur la surface S_2 :

$$\vec{F}_2 = -p_2\,S_2\,\vec{x}.$$

Le déplacement lent à vitesse uniforme ($v_2 = 0{,}02$ m/s) du piston se traduit par :

$$\vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}.$$

Soit en projection sur l'axe $\vec{x}$:

$$-\|\vec{F}\| + p_1\,S_1\,\eta_V - p_2\,S_2 = 0,$$

d'où $p_1 = \dfrac{\|\vec{F}\| + p_2\,S_2}{S_1\,\eta_V}$.

Numériquement : $\mathbf{p_1 \approx 153{,}75.10^5}$ **Pa.**

QUESTION 4

Dans le but de calculer la pression de tarage p_0 en sortie de pompe, on calcule les pertes de charge dans la conduite qui va de la pompe au vérin en O_1.
Dans une telle conduite de refoulement, la vitesse de l'huile ne doit pas dépasser 4,5 m/s. Choisir le diamètre de la conduite dans les valeurs normalisées (12,5 ; 16 ; 21,6 ; 27,3) et en déduire la nature de l'écoulement. On donne les caractéristiques de l'huile utilisée : $\rho = 860$ kg/m^3 et $\nu = 0{,}35.10^{-4}$ m^2/s. La longueur de la conduite est $l_c = 8$ m.

RÉPONSE

On connaît la valeur du débit volumique : $q_v = 785{,}4.10^{-6}$ m^3/s. Calcul de la section S_c de la conduite :

$$q_v = S_c\,v_c.$$

Pour $v_c \leqslant v_{\max}$, alors $S_c \geqslant \dfrac{q_v}{v_{\max}}$.

Numériquement : $S_c \geqslant \dfrac{785{,}4.10^{-6}}{4{,}5}$, d'où

$$S_c \geqslant 174{,}53.10^{-6}\,\text{m}^2 \quad \text{soit} \quad d_c \geqslant 14{,}9\ \text{mm}.$$

On choisit comme diamètre normalisé : $\mathbf{d_c = 16}$ **mm.**
Calcul de la vitesse de l'huile : v_c

$$v_c = \frac{q_v}{S_c}.$$

Numériquement : $\mathbf{v_c = 3{,}9}$ **m/s.**
Calcul du nombre de Reynolds :

$$\mathcal{R} = \frac{v_c\,d_c}{\nu} = \frac{3{,}9 \times 16 \times 10^{-3}}{0{,}35 \times 10^{-4}}.$$

Numériquement : $\mathbf{\mathcal{R} = 1\,783}$. L'écoulement est laminaire.
L'équation de Poiseuille permet le calcul du coefficient de perte de charge linéaire λ :

$$\lambda = \frac{64}{\mathcal{R}}, \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{\lambda = 0{,}036}.$$

QUESTION 5

Avec les résultats acquis dans les questions précédentes, calculer la pression relative p_0 de tarage en sortie de pompe.

RÉPONSE

Calcul de la perte de charge linéaire dans la conduite qui va de la pompe à l'orifice O_1 du vérin :

$$J_l = -\lambda\,\frac{v_c^2}{2\,d_c}\,l_c,$$

avec $v_c = 3{,}9$ m/s ; $d_c = 16.10^{-3}$ m ; $l_c = 8$ m.

Numériquement : $\mathbf{J_l \approx -136{,}89}$ **J/kg.**
Exprimons cette perte de charge en chute de pression Δp :

$$\Delta p = \rho\,J_l, \quad \text{d'où} \quad \Delta p \approx -1{,}18.10^5\,\text{Pa}.$$

On règlera donc la pression p_0, de telle façon que l'on obtienne $p_1 = 153{,}75.10^5$ Pa à l'entrée du vérin (question 3).

$$p_1 - p_0 = \Delta p, \quad \text{ou} \quad p_0 = p_1 - \Delta p.$$

Numériquement : $\mathbf{p_0 \approx 154{,}93.10^5}$ **Pa,** soit environ : $\mathbf{p_0 = 155}$ **bars.**

QUESTION 6

Etude de la tuyauterie d'aspiration de la pompe. L'expérience montre qu'une vitesse d'écoulement de 1,5 à 1,7 m/s est optimale pour une conduite d'aspiration.
Calculer et choisir un diamètre de conduite normalisé si $v = 1{,}6$ m/s par exemple. Recalculer ensuite la vitesse d'écoulement réelle.

RÉPONSE

Pour un débit : $q_v = 785{,}4.10^{-6}$ m^3/s et une vitesse de l'ordre de $v = 1{,}6$ m/s, on obtient :

$$q_v = Sv,$$

d'où $S = \dfrac{q_v}{v} = \dfrac{785{,}4.10^{-6}}{1{,}6} \approx 491.10^{-6}\,\text{m}^2$,

soit un diamètre $d = 25$ mm.
On choisit le diamètre normalisé immédiatement supérieur, ce qui aura pour effet d'obtenir une vitesse d'écoulement v un peu plus faible :
alors $\mathbf{d = 27{,}3}$ **mm,** $\mathbf{v = 1{,}34}$ **m/s.**

QUESTION 7

Les caractéristiques de la conduite d'aspiration 1.2 sont les suivantes : $l_a = 3$ m ; $d_a = 27{,}3$ mm ; $v_a = 1{,}34$ m/s (résultats de la question 6) *(fig. 1.24)*.
La perte de charge singulière dans le filtre est $J_s = -4$ J/kg.
La différence de niveau est $z_2 - z_1 = 0{,}5$ m.

On rappelle les caractéristiques de l'huile utilisée : $\rho = 860\ \text{kg/m}^3$ et $\nu = 0{,}35.10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}$.
Calculer la dépression p_2 à l'orifice d'aspiration 2 de la pompe. Notons que si on utilise des pressions relatives, on posera que $p_1 = p_{\text{atmos}} = 0$ et alors p_2 sera négative.

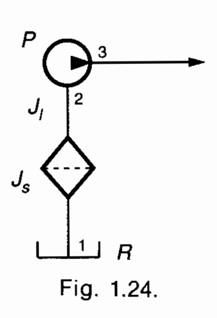


Fig. 1.24.

RÉPONSE

Calculons la perte de charge $J_{12} = J_s + J_l$, avec $J_s = -4$ J/kg (donnée).
Etude du régime de l'écoulement 1-2.
— *Nombre de Reynolds :* $\mathcal{R} = \dfrac{v_a d_a}{\nu}$, soit

$$\mathcal{R} \approx 1\,045\,.$$

L'écoulement est laminaire et l'équation de Poiseuille permet le calcul du coefficient de pertes de charge λ :

$$\lambda = \frac{64}{\mathcal{R}}, \qquad \lambda = 0{,}061\,.$$

Alors $J_l = -\lambda \dfrac{v_a^2}{2\,d_a} l_a$, d'où

$$J_l = -0{,}061\ \frac{(1{,}34)^2}{2 \times 27{,}3 \times 10^{-3}} \times 3 = -6\ \text{J/kg}\,,$$

donc $\quad J_{12} = -10$ **J/kg.**

Appliquons le théorème de Bernoulli à l'écoulement d'aspiration 1-2 :

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + g(z_2 - z_1) = J_{12}\,.$$

Précisons que $v_1 = 0$ et $p_1 = 0$ (pression relative).
On obtient :

$$p_2 = -\rho\left[-J_{12} + g(z_2 - z_1) + \frac{v_2^2}{2}\right],$$

soit : $\quad p_2 = -860\left[10 + (9{,}81 \times 0{,}5) + \dfrac{(1{,}34)^2}{2}\right].$

Numériquement : $p_2 \approx -0{,}136.10^5$ **Pa.**

QUESTION 8

Calcul de la puissance nette de la pompe.

RÉPONSE

Calculons le travail W_{23} échangé par le fluide dans la pompe *(fig. 1.24)*.
D'après le théorème de Bernoulli :

$$\frac{v_3^2 - v_2^2}{2} + \frac{1}{\rho}(p_3 - p_2) + g(z_3 - z_2) = W_{23}\,,$$

avec $v_3 = 3{,}9$ m/s (question 4) ; $v_2 = 1{,}34$ m/s (question 6) ; $p_3 = 154{,}93.10^5$ Pa (question 5). Pression du tarage p_0; $p_2 = -0{,}136.10^5$ Pa (question 7) ; $z_3 - z_2 \approx 0$, alors

$$W_{23} = \frac{(3{,}9)^2 - (1{,}34)^2}{2} + \frac{154{,}93 + 0{,}136}{860} \times 10^5\,,$$

d'où : $\quad W_{23} = 18{,}045$ **kJ/kg.**

La puissance nette de la pompe s'exprime alors par :

$$P_n = W_{23}\,q_m = W_{23}\,q_v\,\rho$$

$P_n = 18\,045 \times 785{,}4.10^{-6} \times 860$ (en watts),

soit $\quad P_n \approx 12{,}19$ **kW.**

QUESTION 9

Calculer la puissance absorbée par la pompe (puissance mécanique sur l'arbre d'entrée). Le rendement de la pompe est donné par le constructeur : $\eta_P = 0{,}82$.

RÉPONSE

Le rendement de la pompe s'exprime par :

$$\eta_P = \frac{P_n}{P_a},$$

donc $P_a = \dfrac{P_n}{\eta_P}$, $\quad P_a \approx 14{,}86$ **kW.**

QUESTION 10

Le rendement du moteur électrique est $\eta_e = 0{,}92$. Quelle est la puissance du moteur ?

RÉPONSE

La puissance P du moteur électrique s'exprime par :

$$\eta_e = \frac{P_a}{P},$$

Soit $P = \dfrac{P_a}{\eta_e} = \dfrac{14{,}86}{0{,}92} = 16{,}15$, d'où

$$P = 16{,}15\ kW\,.$$

On choisirait évidemment un moteur de puissance supérieure ou égale à cette valeur dans un catalogue de constructeur.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 Une vanne de sécurité d'une retenue d'eau est constituée par un secteur cylindrique AB de largeur l, mobile autour de l'axe horizontal $(O, \vec{y})$. Ce secteur a un rayon R et OA est horizontal. A l'instant considéré, la hauteur d'eau est h et on suppose que la pression atmosphérique est la même, à la surface du barrage et au niveau de la vanne. Le plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$ de la figure est un plan de symétrie vertical *(fig. 1.25)*.
Le but de l'exercice est d'étudier la poussée de l'eau sur la vanne.

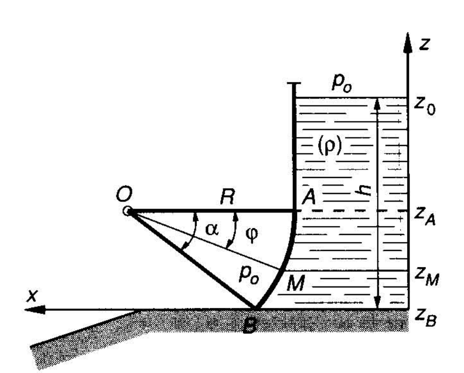


Fig. 1.25.

Application numérique : masse volumique de l'eau : $\rho = 10^3$ kg/m³, on donne : $g = 10$ m/s², $l = 2$ m, $R = 2$ m, $h = 10$ m, $\alpha = 30°$.

QUESTIONS

1° Montrer que la résultante $\vec{R}$ des forces de poussée sur la vanne passe par O. On choisit un point M de la paroi appartenant au plan de symétrie et défini par l'angle géométrique $\widehat{AOM} = \varphi$.

2° Exprimer littéralement la pression relative en M d'altitude z_M.

3° Donner littéralement l'expression de la force de poussée en M sur un élément de surface $dS = lR\, d\varphi$.

4° Donner littéralement les composantes dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de la résultante $\vec{R}$ des forces de poussée.

5° Calculer numériquement ces composantes.

RÉPONSES

1° $\overrightarrow{dF}$ en M passe par O car OM est perpendiculaire en M à la paroi de la vanne.

2° $p_M = \rho g[h - R(\sin\alpha - \sin\varphi)]$.

3° $\overrightarrow{dF} = \rho g l R[h - R(\sin\alpha - \sin\varphi)]$

$(\cos\varphi\ \vec{x} + \sin\varphi\ \vec{z})\, d\varphi$.

4°

$$\vec{R} \begin{cases} R_x = \rho g l R \sin\alpha \left(h - \dfrac{R}{2}\sin\alpha\right), \\ R_z = \rho g l R\Big[h(1-\cos\alpha) \\ \quad + \dfrac{R}{2}\left(\alpha - 2\sin\alpha + \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right)\Big]. \end{cases}$$

5°

$$\vec{R} \left| \begin{array}{l} R_x = 190.10^3\ \text{N}, \\ R_z \approx 51{,}854.10^3\ \text{N}. \end{array}\right.$$

2 Dans le but d'étudier la stabilité d'un barrage « masse », on analyse la poussée de l'eau sur l'ouvrage. Deux repères sont définis sur la *figure 1.26 :*
$(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ dont on ne représente que l'axe vertical $\vec{z}$,
$(A, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ tel que $(A, \vec{Z})$ soit axe de symétrie pour la paroi inclinée en contact avec l'eau de la retenue.

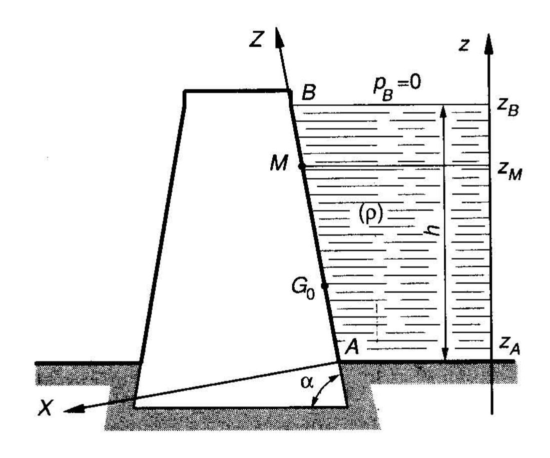


Fig. 1.26.

Dans $(A, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$, Z est l'ordonnée d'un point quelconque M appartenant au plan de symétrie $(A, \vec{X}, \vec{Z})$ de l'ouvrage, Z_0 est l'ordonnée du centre de poussée.
On donne :
hauteur de l'eau $h = 40$ m ;
inclinaison de la paroi : $\alpha = 72°$;
longueur du barrage (parallèlement à $(A, \vec{Y})$) : $l = 120$ m ;
masse volumique de l'eau : $\rho = 10^3$ kg/m³;
la pression atmosphérique p_0 est la même en tout point et la pression relative en B est donc nulle : $p_B = 0$.
On donne : $g = 9{,}81$ m/s².

QUESTIONS

1° Exprimer littéralement la pression relative en M.

2° Donner littéralement l'expression de la force élémentaire de poussée en M sur un élément de surface $dS = l \cdot dZ$.

3° Donner littéralement l'expression de la résultante des forces de poussée : $\vec{R}$.

4° Donner littéralement l'ordonnée Z_0 du centre de poussée G_0.

5° *Application numérique :* calculer $\|\vec{R}\|$ et Z_0.

RÉPONSES

1° $p_M = \rho g (h - Z \sin \alpha)$.

2° $\overrightarrow{dF} = \rho g (h - Z \sin \alpha)\, l \, dZ\, \vec{X}$.

3° $\vec{R} = \rho g l \dfrac{h^2}{2 \sin \alpha} \vec{X}$.

4° $Z_0 = \dfrac{h}{3 \sin \alpha}$.

5° $\|\vec{R}\| = 99.10^7$ N ; $Z_0 \approx 14$ (m).

3 Une pompe est installée à la sortie d'un puits et aspire l'eau dans celui-ci.
On désigne par l'indice 1 la surface de l'eau dans le puits et par l'indice 2 la section d'entrée dans la pompe de la tuyauterie d'aspiration.
La vitesse de l'eau dans une conduite d'aspiration doit être d'environ $v = 1{,}5$ m/s.
La pression absolue à l'entrée de la pompe ne doit pas être inférieure à 0,4 bar sous peine de provoquer un phénomène de cavitation, néfaste à la durée de vie de la pompe.
Le débit doit être d'environ 4,5 l/s.
La pression atmosphérique est la même en tout point de l'installation : $p_0 = 1$ bar.
On donne pour l'eau : $\rho = 10^3$ kg/m^3 et $\nu = 10^{-6}$ m^2/s. et $g = 9{,}81$ m/s^2.

QUESTIONS

1° Calculer le diamètre d de la conduite d'aspiration.

2° Calculer le nombre de Reynolds et en déduire la nature de l'écoulement entre 1 et 2.

3° Calculer le coefficient λ de perte de charge linéaire.

4° En négligeant les pertes de charge, quelle doit être la différence de niveau entre l'orifice d'entrée de la pompe et la surface de l'eau dans le puits : $(z_2 - z_1)_{th}$.

5° Calculer la perte de charge J_{12}. On néglige les pertes de charge singulières.

6° Calculer la différence de niveau maximale réelle : $(z_2 - z_1)$.

RÉPONSES

1° $d = 62$ mm.

2° $\mathcal{R} = 93\,000$: écoulement turbulent.

3° $\lambda = 0{,}018$.

4° $(z_2 - z_1)_{th} = 6$ m.

5° $J_{12} = -2$ J/kg.

6° $z_2 - z_1 \leqslant 5{,}8$ m.

4 Venturi, capteur de débit

L'appareil représenté à la *figure 1.27* est destiné à mesurer le débit q_v dans une conduite.

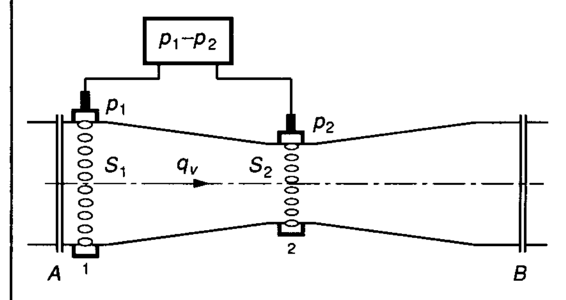


Fig. 1.27.

Un tronçon AB de la conduite, de section S_1 est remplacé par un Venturi. Ce Venturi est essentiellement constitué par un convergent-divergent. Le rapport des sections S_1 et S_2 est connu. Dans les sections 1 et 2, des trous sont aménagés pour permettre de placer deux capteurs de pression reliés à un rack électronique. Ce rack permet d'afficher soit $p_1 - p_2$ (en bar), soit la vitesse v_1 (en m/s) du fluide dans la conduite, soit directement le débit q_v (en l/s). Les pertes de charge dans le Venturi sont négligeables.

Application numérique : Le fluide qui parcourt la conduite est de l'eau : $\rho = 10^3$ kg/m^3.
Les caractéristiques du Venturi sont : $S_1 = 7\,854$ mm^2 et $\dfrac{S_1}{S_2} = 1{,}5$.
Le rack affiche : $p_1 - p_2 = 0{,}108$ bar.

QUESTIONS

1° Avec les unités utilisées, quelle est la relation qui permet l'affichage de la vitesse v_1 (m/s) en fonction de $(p_1 - p_2)$ et de ρ ?

2° Avec les unités utilisées, quelle est la relation qui permet l'affichage du débit q_v (l/s) ?

3° *Application numérique :* calculer v_1 et q_v.

RÉPONSES

1° $v_1 = \sqrt{1{,}6 \dfrac{p_1 - p_2}{\rho} \times 10^5}$.

2° $q_v = 7{,}854 \sqrt{1{,}6 \dfrac{p_1 - p_2}{\rho} \times 10^5}$.

3° $v_1 = 4{,}157$ m/s ; $q_v = 32{,}65$ l/s.

5 On donne le schéma de la conduite d'aspiration d'une pompe P à engrenage, à un seul sens de flux *(fig. 1.28)*.

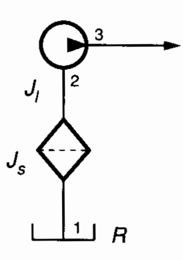


Fig. 1.28.

Le débit de cette pompe est $q_v = 1$ l/s. La longueur de la tuyauterie d'aspiration 1-2 est $l = 4$ m et son diamètre intérieur est $d = 27{,}3$ mm.
Le filtre entraîne une perte de charge de -5 J/kg.
La différence de niveau $z_2 - z_1 = 0{,}8$ m.
On donne les caractéristiques de l'huile pompée : $\rho = 900\ \text{kg/m}^3$ et $\nu = 0{,}45 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}$.
On donne : $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$.

QUESTIONS

1° Calculer la vitesse d'écoulement de l'huile dans la conduite d'aspiration.

2° Calculer le nombre de Reynolds et en déduire la nature de l'écoulement.

3° Calculer le coefficient de perte de charge linéaire.

4° Calculer la perte de charge totale J_{12}.

5° Calculer la dépression (ou pression relative) à l'entrée 2 de la pompe.

RÉPONSES

1° $v = 1{,}7$ m/s.

2° $\mathcal{R} \approx 1\,031$. Régime laminaire.

3° $\lambda \approx 0{,}062$.

4° $J_{12} \approx -18$ J/kg.

5° $p_2 \approx -0{,}245 \cdot 10^5$ Pa (pression relative).

6 Dans un moteur d'automobile, la circulation du fluide de refroidissement se fait en circuit fermé *(fig. 1.29)*.

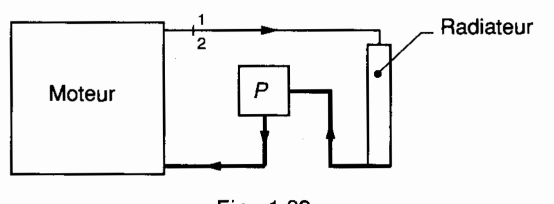


Fig. 1.29.

Le débit de la pompe est $q_v = 2$ l/s. Les pertes de charge singulières de ce circuit sont très importantes et on évalue leur somme à $\Delta z = -6$ m. On donne : $\rho = 10^3\ \text{kg/m}^3$ et $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$.

QUESTIONS

1° On considère l'ensemble du circuit compris entre les points 1 et 2 confondus à la sortie du moteur (par exemple). Ecrire le théorème de Bernoulli entre 1 et 2 et en déduire que le travail de la pompe consiste uniquement à vaincre les pertes de charge.

2° Calculer le travail W_{12} de la pompe.

3° Calculer la puissance nette de la pompe et la puissance absorbée si son rendement est $\eta = 0{,}84$.

RÉPONSES

1° $$\underbrace{\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}}_{=0} + \frac{1}{\rho}\underbrace{(p_2 - p_1)}_{=0} + g\underbrace{(z_2 - z_1)}_{=0} = W_{12} + J_{12}.$$

2° $W_{12} = 58{,}86$ J/kg.

3° $P_n = 117{,}72$ W ; $P_a = 140$ W.

7 Un vérin à double effet, à simple tige, doit permettre d'exercer une force $\|\vec{F}\| = 12 \cdot 10^3$ N à une vitesse que l'on souhaite régler à $v = 0{,}5$ m/s.
Pour effectuer ce réglage, on choisit de placer en sortie O_2, un étrangleur de débit réglable (q_2 réglable) *(fig. 1.30)*.

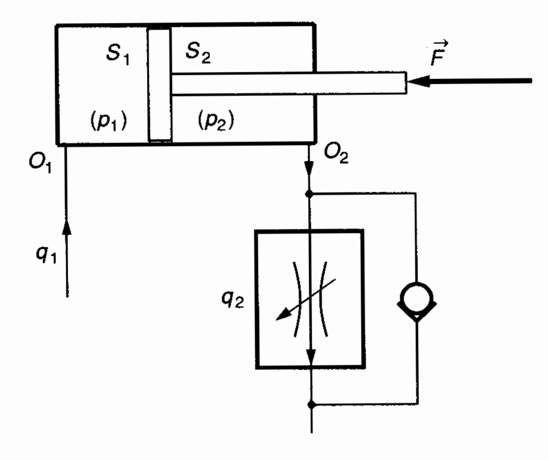


Fig. 1.30.

Soit q_1 le débit que l'on doit assurer à l'orifice O_1 pour réaliser cette fonction. Comme on souhaite pouvoir régler dans une certaine plage, la vitesse de sortie v et la force $\|\vec{F}\|$, on choisit d'alimenter le circuit avec une pompe capable d'avoir un débit $q > q_1$, soit ici $q = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$; la limitation du débit utile se fait alors par un limiteur de pression en sortie de pompe, taré à $p_0 = p_1 = 130$ bars. Le débit excédentaire $q_{ex} = q - q_1$ est évacué par ce limiteur. Un distributeur 4/3 permet d'assurer le fonctionnement du système en aller et retour *(fig. 1.31)*.

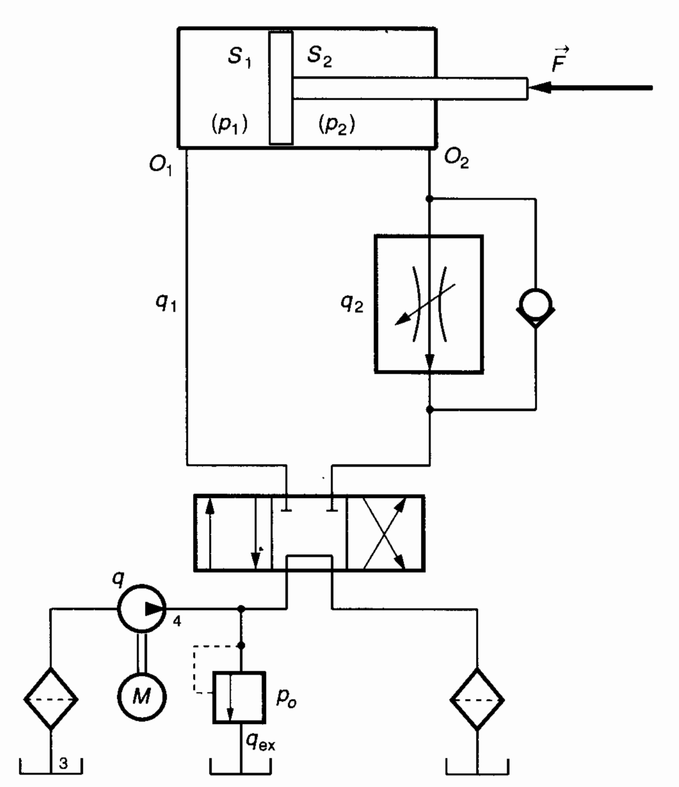


Fig. 1.31.

Données numériques :
$v = 0{,}5$ m/s ; $\|\vec{F}\| = 12.10^3$ N ;
$S_1 = 1{,}8.10^{-3}$ m² ; $S_2 = 10^{-3}$ m² ;
$p_0 = p_1 = 130.10^5$ Pa (pressions relatives) ;

$q = 2.10^{-3}$ m³/s.

QUESTIONS

1° A quelle valeur doit-on régler le débit q_2 ?

2° Quel doit être alors le débit q_1 ?

3° Quel est le débit excédentaire q_{ex} ?

4° Calculer la pression p_2.

5° Quelle est la puissance utile au niveau du vérin ?

6° Etude du circuit d'aspiration de la pompe.
Entre les sections repérées 3 et 4 (voir *fig. 1.31*) on néglige : la variation d'énergie cinétique du fluide, la variation d'énergie potentielle de pesanteur, les pertes de charge singulières et linéaires.
Calculer la puissance nette de la pompe.

7° En gardant $p_0 = p_1 = 130$ bars et en modifiant le réglage q_2, à quelle vitesse maximale le vérin pourrait-il déplacer la même charge ?

8° On garde $p_0 = p_1 = 130$ bars. Pour déplacer la même charge $\|\vec{F}\| = 12.10^3$ N et pour la nouvelle vitesse de déplacement $v = 1{,}11$ m/s, quelle serait alors, la pression p_2, le débit q_2 ?

RÉPONSES

1° $q_2 = 0{,}5.10^{-3}$ m³/s.

2° $q_1 = 0{,}9.10^{-3}$ m³/s.

3° $q_{ex} = 1{,}1.10^{-3}$ m³/s.

4° $p_2 = 114.10^5$ Pa.

5° $P_u = 6$ kW.

6° $P_n = 26$ kW.

7° $v_{max} = 1{,}11$ m/s.

8° $p_2 = 114.10^5$ Pa ; $q_2 = 1{,}11.10^{-3}$ m³/s.



notion de quantité de chaleur principe de l'équivalence

Nous savons que les « machines » prises au sens large sont capables, soit de transformer une certaine forme de l'énergie en travail mécanique (moteur à explosion), soit de transformer un certain travail mécanique en énergie (compresseur).
La Thermodynamique est l'étude des transformations réciproques : chaleur-travail.
Dans les deux chapitres suivants, nous nous limiterons à une étude simplifiée ne nécessitant pas d'outil mathématique important mais permettant tout de même à un technicien d'avoir une idée suffisante de l'évolution d'un fluide compressible dans une machine et de comprendre les notions essentielles d'échange et de rendement.

1. NOTION DE TEMPÉRATURE

1.1. QU'EST-CE QUE LA TEMPÉRATURE ?

La première notion de température est physiologique et on conçoit aisément que le repérage d'une température ne puisse être laissé à l'appréciation de nos sens. Certaines grandeurs physiques (résistance électrique, volume d'une masse donnée d'un liquide, ...) varient en fonction de la température. On utilise ces variations pour élaborer une échelle des températures. La grandeur physique utilisée est alors appelée grandeur thermométrique.

1.2. ÉCHELLES DE TEMPÉRATURE

Soit x la grandeur thermométrique choisie et θ la température. Toute bijection $x = f(\theta)$ définit une échelle des températures. Pour une raison de simplicité, la relation adoptée est linéaire et on peut écrire :

$$x = a + b\theta \qquad (1)$$

a et b sont deux constantes dont la détermination dépend des valeurs θ_1 et θ_2 des deux températures de référence pour lesquelles x prend les valeurs x_1 et x_2. En fait, la relation (1) peut être représentée par une droite dont il suffit de connaître deux points.

1.2.1 Echelle Celsius (ou centésimale)

A la pression atmosphérique normale, la température d'équilibre entre la glace et l'eau saturée d'air caractérise l'état d'équilibre $\theta_1 = 0$. Pour $\theta_1 = 0$, la grandeur thermométrique x prend la valeur x_0 (x_0 est par exemple la hauteur atteinte par la colonne de mercure pour $\theta_1 = 0$).
A la pression atmosphérique normale, la température d'équilibre entre l'eau pure et sa vapeur caractérise l'état d'équilibre $\theta_2 = 100$. Pour $\theta_2 = 100$, la grandeur thermométrique x prend la valeur x_{100} (x_{100} est par exemple la hauteur atteinte par la colonne de mercure pour $\theta_2 = 100$) *(fig. 2.1)*.

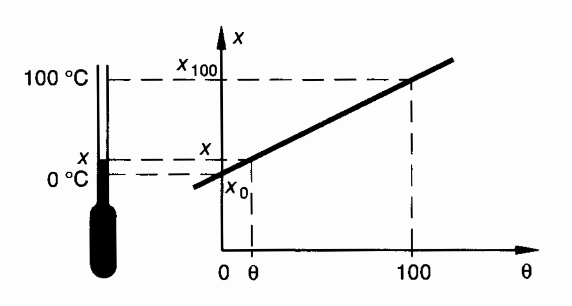


Fig. 2.1.

Autres formes de la relation (1)
Calculons a et b :

$$\text{pour } \theta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = a\,,$$
$$\text{pour } \theta_2 = 100 \Rightarrow x_{100} = a + b \times 100\,,$$

d'où :
$$x = x_0 + \frac{x_{100} - x_0}{100}\,\theta \qquad (2)$$

ou
$$\boxed{x = x_0(1 + \alpha\,\theta)} \qquad (3)$$

en posant
$$\alpha = \frac{x_{100} - x_0}{100\,x_0}$$

(α est appelé *coefficient thermométrique*).
On peut exprimer également la température θ :

$$\boxed{\frac{\theta}{100} = \frac{x - x_0}{x_{100} - x_0}}\,. \qquad (4)$$

Cette relation (4) permet d'énoncer la définition du degré Celsius.



Le degré Celsius est la variation de température qui produit une variation de la grandeur thermométrique égale à un centième de la variation obtenue quand la température passe de 0 à 100.

REMARQUE

Notons qu'une telle échelle définit une grandeur repérable mais non mesurable.

1.2.2. Echelle des gaz parfaits

Aux pressions suffisamment basses, tous les gaz possèdent la même loi de variation de la pression en fonction de la température (à volume constant). Quand la pression p tend vers zéro, tous les gaz réels tendent vers un même état limite appelé **« état parfait »**. On peut donc utiliser la pression d'un gaz parfait comme grandeur thermométrique et écrire d'après (3) :

$$\boxed{\boldsymbol{p = p_0(1 + \beta_0\,\theta)}}\,. \qquad \textbf{(5)}$$

Pour tous les gaz, $\beta_0 = \dfrac{1}{273{,}15}$.
C'est cette échelle qui donne la **définition légale de la température.**

D'après (5) on écrira :

$$\frac{\theta}{100} = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0}\,. \qquad (6)$$

Le degré légal est la variation de température qui produit, à volume constant, une variation de la pression d'une masse quelconque de gaz parfait égale à un centième de la variation obtenue quand la température passe de 0 à 100.

1.2.3. Échelle des températures absolues

D'après (5) on peut écrire

$$p = p_0\,\beta_0\left(\frac{1}{\beta_0} + \theta\right).$$

On peut définir alors : $T = \theta + \dfrac{1}{\beta_0}$

et donc
$$\boxed{p = p_0\,\beta_0\,T}\,. \qquad (7)$$

***T* est la température absolue,** elle est toujours positive. Son zéro : $T = 0$ correspond à la température Celsius de $\theta + \dfrac{1}{\beta_0} = 0$, soit $\theta = -\,273{,}15\ ^\circ\mathrm{C}$.
L'unité de température absolue est le kelvin (K).

2. NOTION DE QUANTITÉ DE CHALEUR

2.1. TEMPÉRATURE ET CHALEUR

Si on plonge un corps chaud dans un bac contenant de l'eau froide ($\theta \neq 0\ ^\circ\mathrm{C}$), on constate que la température de l'eau s'est élevée et que, par contre, la température du corps chaud a diminué. Le système a évolué vers un équilibre thermique et on dit que le corps chaud a cédé de la chaleur au corps froid (ici l'eau).
Si par contre, on plonge le même corps chaud dans un bac contenant un mélange d'eau et de glace à $\theta = 0\ ^\circ\mathrm{C}$, on constate que la température du mélange n'évolue pas ; la température de l'équilibre thermique reste $\theta = 0\ ^\circ\mathrm{C}$, on a seulement provoqué la fusion d'une partie de la glace.
Dans les deux cas, le corps chaud a cédé de la chaleur. Dans le premier cas, cet échange a provoqué une variation de température, mais pas dans le deuxième cas.

Température et chaleur sont deux grandeurs différentes.

2.2. QUANTITÉ DE CHALEUR

Tout comme le travail mécanique, la chaleur est une forme de l'énergie. Un système matériel peut recevoir ou céder de la chaleur comme il peut recevoir ou céder une énergie mécanique.
La chaleur est donc une forme d'énergie et comme telle, elle peut s'exprimer en joules (J).

2.3. CHALEUR MASSIQUE

Soit un système matériel S (par exemple un solide de masse m). On l'échauffe de θ_1 à θ_2 de telle façon qu'entre ces deux températures n'intervienne aucune réaction chimique. On appelle **chaleur massique moyenne** entre θ_1 et θ_2 la grandeur définie par :

$$C_{1,2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{Q}{\theta_2 - \theta_1}$$

(Q est la quantité de chaleur qu'il faut fournir à S pour élever sa température de θ_1 à θ_2).
Si θ_2 tend vers θ_1, $C_{1,2}$ tend vers une limite appelée **chaleur massique vraie** pour θ_1 :

$$C = \frac{1}{m} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta},$$

relation que l'on retient sous la forme :

$$\boxed{\mathbf{d}Q = Cm\,\mathbf{d}\theta}. \qquad \textbf{(1)}$$

Dans cette relation (1) :
- dQ est en joules (J) ;
- C est en joules par kilogrammes par degré Celsius ($\mathrm{J.kg^{-1}.{}^\circ C^{-1}}$) ;
- m est en kilogrammes (kg) ;
- dθ est en degrés Celsius (ou en kelvins).

2.4. UNITÉS DE QUANTITÉ DE CHALEUR

Dans le système international d'unités (MKSA) l'unité d'énergie est le joule, **l'unité de quantité de chaleur est donc le joule (J).**
D'autres unités employées depuis très longtemps sont également utilisées : la calorie et ses multiples, kilocalorie et thermie.
Equivalences :

$$1 \text{ cal} = 4{,}18 \text{ J}$$
$$1 \text{ kcal} = 10^3 \text{ cal}$$
$$1 \text{ thermie} = 10^6 \text{ cal}.$$

3. ÉCHANGES DE CHALEUR

3.1. CONVENTION DE SIGNE

La convention de signe utilisée en thermodynamique est la suivante :

L'énergie reçue par un système matériel (travail mécanique ou chaleur) est positive.
L'énergie fournie par un système au milieu extérieur est négative.

Prenons l'exemple d'un électro-frein : l'électro-frein est le système S.
Il reçoit de l'énergie mécanique du milieu extérieur (sous forme d'énergie cinétique), alors $E_{cin} > 0$.
Il cède une certaine quantité de chaleur au milieu extérieur : $Q < 0$.
Lorsqu'un système S évolue vers un équilibre thermique, il échange de la chaleur avec le milieu extérieur.
Le passage de la chaleur des corps chauds vers les corps froids se fait de trois façons :
- conduction,
- convection,
- rayonnement.

3.2. CONDUCTION

Dans un matériau, la chaleur peut se transmettre de proche en proche ; cette transmission s'effectue toujours du point dont la température est la plus élevée vers le point où la température est la plus basse. C'est un phénomène continu. Les matériaux sont plus ou moins propices à ce genre d'échange, on dit qu'ils ont une plus ou moins bonne **conductibilité thermique** $\boldsymbol{\lambda}$.
Considérons une paroi plane d'épaisseur l ; soit S la surface de paroi à travers laquelle on considère l'échange. Cette paroi divise le milieu extérieur en deux parties **1** et **2** dont les températures sont différentes $\theta_1 > \theta_2$ *(fig. 2.2)*.

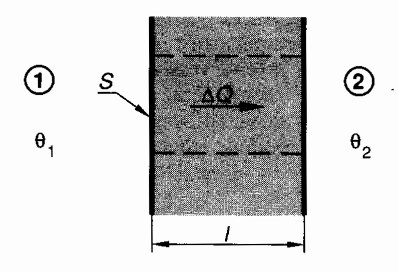


Fig. 2.2.

Notons $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$.
On pourrait écrire aussi en températures absolues :

$$\Delta T = T_1 - T_2$$

(avec $\theta_1 - \theta_2 = T_1 - T_2$).

Pendant un intervalle de temps donné Δt, la quantité de chaleur transmise de **1** à **2** s'exprime par :

$$\boxed{\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda S \frac{\Delta \theta}{l}}. \qquad (1)$$

Avec dans la relation (1) :

ΔQ = quantité de chaleur échangée en joules (J).
Δt = intervalle de temps ou « durée de l'échange » en secondes (s).
λ = coefficient de conductibilité thermique, il s'exprime en $J.m^{-1}.s^{-1}.°C^{-1}$.
S = surface de paroi concernée par l'échange en mètres carrés (m^2).
$\Delta \theta$ = différence de température entre les milieux extérieurs **1** et **2** en degrés Celsius (ou en kelvins).
l = épaisseur de la paroi à travers laquelle se fait l'échange en mètres (m).

Nota : On désigne souvent $\frac{\Delta \theta}{l}$ par *« gradient de température »* en degrés Celsius par mètre.

Donnons quelques valeurs de λ pour quelques matériaux caractéristiques classés par valeur décroissante de la conductibilité thermique.

Matériau	λ ($J.m^{-1}.s^{-1}.°C^{-1}$)	Observation
Cuivre	380	Bons conducteurs thermiques
Aluminium	210	
Fonte	60	Moyens conducteurs thermiques
Acier doux	55	
Caoutchouc	0,18	Isolants thermiques
Amiante	0,18	
Bois	0,10	
Liège	0,04	

3.3. CONVECTION

Lorsqu'un corps chaud est placé dans un fluide (liquide ou gaz), les particules de ce fluide situées à proximité du corps chaud s'échauffent. Dans un fluide dont la température n'est pas uniforme, la masse volumique est variable, il s'ensuit des mouvements internes au fluide appelés « **courants de convection** ».

La quantité de chaleur ΔQ échangée par convection pendant un intervalle de temps donné Δt est proportionnelle à la surface d'échange S et sensiblement proportionnelle à la différence des températures $\Delta \theta$ des deux corps :

$$\boxed{\frac{\Delta Q}{\Delta t} = K . S . \Delta \theta} \qquad (2)$$

avec dans la relation (2) :

ΔQ = quantité de chaleur échangée en joules (J).
Δt = intervalle de temps ou « durée de l'échange » en secondes (s).
K = coefficient de convection en $J.m^{-2}.s^{-1}.°C^{-1}$. Ce coefficient dépend de la nature et des propriétés du fluide (conductibilité thermique λ, viscosité, chaleur massique...).
S = surface d'échange en mètres carrés (m^2).
$\Delta \theta$ = différence de température entre le corps chaud et le fluide en degrés Celsius (°C) ou en kelvins (K).

Par exemple, dans l'air calme, à la pression atmosphérique normale (10^5 Pa), $\Delta \theta$ étant faible, on peut prendre pour coefficient de convection :

$$K \approx 4,2 \ J.m^{-2}.s^{-1}.°C^{-1}.$$

3.4. RAYONNEMENT

Le rayonnement est un échange de chaleur par émission de radiations. Soit S_1 la surface du corps **1** qui émet la chaleur et soit T_1 sa température absolue en K. Soit ΔQ_1 la quantité de chaleur émise par **1** pendant le temps Δt :

$$\boxed{\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = a_1 S_1 T_1^4} \qquad (3)$$

avec dans la relation (3) :

ΔQ_1 = quantité de chaleur émise par rayonnement du corps **1** en joules (J).
Δt = intervalle de temps pendant lequel le rayonnement est pris en compte en secondes (s).
a_1 = coefficient d'émission du corps **1**. Celui-ci dépend de la nature, de la couleur, de l'état de surface du corps **1**. En $J.m^{-2}.s^{-1}.T^{-4}$.
S_1 = surface rayonnante de **1** en mètres carrés (m^2).
T_1 = température absolue en kelvins (K).

4. PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

4.1. ÉCHANGES DE TRAVAIL ET DE CHALEUR ENTRE UN SYSTÈME ET LE MILIEU EXTÉRIEUR

Supposons parfaitement définie la limite (ou frontière) entre un système matériel et le milieu extérieur et convenons que ce système et le milieu extérieur ne peuvent échanger que du travail et de la chaleur. La masse d'un tel système est donc constante.

- **Suivant le signe du travail W,** le système matériel reçoit ou fournit un certain travail du (ou au) milieu extérieur :

$W > 0$: le système reçoit du travail ;
$W < 0$: le système fournit du travail .

Le travail à prendre en compte est la somme des travaux de toutes les actions mécaniques extérieures (à distance et de contact) qui s'exercent sur le système matériel.

- **Suivant le signe de la quantité de chaleur Q,** le système matériel reçoit ou fournit une certaine quantité de chaleur du (ou au) milieu extérieur :

$Q > 0$: le système reçoit de la chaleur ;
$Q < 0$: le système fournit de la chaleur.

Cet échange de chaleur suppose évidemment que la frontière entre le système et le milieu extérieur est une paroi conductrice de la chaleur.
Nous désignerons par l'indice A, l'état initial du système et par l'indice B son état final. Ces deux états peuvent être différents ou identiques (cas d'un cycle).
Nous désignerons par l'indice 1, 2, ... les transformations thermodynamiques qui permettent de passer de l'état A à l'état B *(fig. 2.3)*.

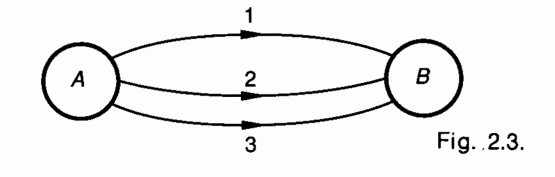


Fig. 2.3.

4.2. PRINCIPE DE L'ÉQUIVALENCE

Dans toute transformation thermodynamique, la somme algébrique des quantités de chaleur et de travail échangées par le système matériel ne dépend que de l'état initial et de l'état final du système *(fig. 2.3)*.

$$W_1 + Q_1 = W_2 + Q_2 = W_3 + Q_3 = \cdots$$

soit:
$$\boxed{[W + Q]_A^B = \text{Cte}} . \qquad (1)$$

Dans la relation (1), il est évident que le travail W et la quantité de chaleur Q échangés pour passer de l'état initial A à l'état final B du système matériel sont mesurés avec la même unité : le joule.

• Cas particulier d'un cycle

Lorsqu'un système décrit un cycle thermodynamique, c'est-à-dire lorsqu'après avoir suivi un certain « chemin », le système matériel revient à son état initial, le principe de l'équivalence prend la forme suivante :
Supposons que les transformations 1 et 2 soient réversibles et que le système matériel subisse les transformations suivantes *(fig. 2.4)* :

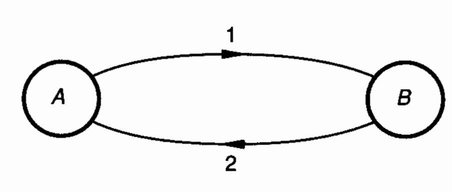


Fig. 2.4.

- $\boldsymbol{A \xrightarrow{1} B}$ (état initial A, état final B, « chemin 1 »).
D'après (1) :

$$[W + Q]_A^B = W_1 + Q_1 . \qquad (2)$$

- $\boldsymbol{A \xrightarrow{-2} B}$ (état initial A, état final B, « chemin inverse de 2 ») :

$$[W + Q]_A^B = -(W_2 + Q_2) . \qquad (3)$$

- $\boldsymbol{B \xrightarrow{2} A}$ (état initial B, état final A, « chemin 2 »)

$$[W + Q]_B^A = W_2 + Q_2 . \qquad (4)$$

- **Cycle** $\boldsymbol{A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} A}$ (état initial A, état final A)

$$[W + Q]_{\text{cycle}} = [W + Q]_A^B + [W + Q]_B^A .$$

D'après (2) et (4) :

$$[W + Q]_{\text{cycle}} = W_1 + Q_1 + W_2 + Q_2 .$$

En comparant (2) et (3) on voit que

$$W_1 + Q_1 = -(W_2 + Q_2) ,$$

il s'ensuit que :

$$\boxed{[W + Q]_{\text{cycle}} = 0} . \qquad (5)$$

• Principe de l'équivalence

Lorsqu'un système matériel décrit un cycle thermodynamique,
— s'il reçoit du travail ($W > 0$), il fournit de la chaleur ($Q < 0$) ;
— s'il fournit du travail ($W < 0$), il reçoit de la chaleur ($Q > 0$).

Les échanges de travail et de chaleur du système avec le milieu extérieur sont égaux et de signe contraire.

Lorsqu'un système décrit un cycle, le bilan thermodynamique de ses échanges avec le milieu extérieur est nul.

4.3. ÉNERGIE INTERNE

Reprenons l'expression du principe de l'équivalence (relation 1)

$$[W + Q]_A^B = \text{cte} .$$

Pour passer de l'état A à l'état B, la somme algébrique du travail mécanique W et de la quantité de chaleur Q échangés avec le milieu extérieur est indépendante du « chemin suivi ».
Cette constante est appelée variation de l'énergie interne du système pour passer de l'état A à l'état B et on note :

$$U_B - U_A = [W + Q]_A^B \qquad (6)$$

ou bien sous forme différentielle pour une variation infiniment petite :

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}W + \mathrm{d}Q . \qquad (7)$$

Unité : L'unité d'énergie interne est la même que l'unité de travail ou de quantité de chaleur : le joule (J).

• Cas d'un cycle

Lorsque l'état final B est confondu avec l'état initial A, la relation (6) permet d'écrire :

$$[W + Q]_{\text{cycle}} = 0 .$$

Lorsqu'un système parcourt un cycle, la variation d'énergie interne est nulle.

Pour un cycle 1-2-3-1 par exemple, on peut écrire la variation d'énergie interne totale :

$$(U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + (U_1 - U_3) = 0 .$$

5. NOTION DE TRANSFORMATION THERMODYNAMIQUE

5.1. TRANSFORMATIONS RÉVERSIBLES ET IRRÉVERSIBLES MÉCANIQUEMENT

Distinguer la réversibilité mécanique et la réversibilité thermique n'a pas beaucoup de sens, puisque nous venons de voir que travail mécanique et quantité de chaleur sont « équivalents » (voir *paragraphe 4.2*).
On définit habituellement une transformation comme **« mécaniquement réversible »** si on peut négliger tous les frottements, aussi bien solides que visqueux et si l'évolution du système peut être considérée comme une succession d'états d'équilibre, (ce qui revient à négliger les effets de l'inertie). Dans ce cours, nous supposerons que toutes les transformations étudiées sont mécaniquement réversibles.
Au chapitre suivant, tout en continuant à supposer que les transformations étudiées sont mécaniquement réversibles, nous verrons que la réversibilité thermodynamique ne peut que constituer la limite vers laquelle peut tendre une transformation réelle opérée avec beaucoup de soins. On se reportera avec profit au *paragraphe 3.4* du *chapitre 3* pour approfondir cette notion.

5.2. TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE ÉCHANGÉ ENTRE LE SYSTÈME ET LE MILIEU EXTÉRIEUR. DIAGRAMME DE CLAPEYRON

Considérons un système constitué par une certaine masse de gaz enfermée dans un cylindre. Supposons que le piston qui ferme le cylindre réalise une étanchéité parfaite et qu'il n'y ait pas de frottement entre le cylindre et le piston. On mesure bien ici la difficulté qu'il y a à réaliser une transformation mécaniquement réversible !
Evaluons le travail reçu par le système dans la transformation 1-2 *(fig. 2.5)*. On sait avec notre convention de signe que $W_{12} > 0$.

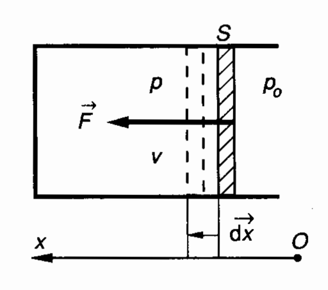


Fig. 2.5.

Le travail reçu par le système est le travail des forces extérieures appliquées au système. Pour un déplacement élémentaire dx du piston :

$$\mathrm{d}W = (\vec{F} + p_0 S\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} .$$

Algébriquement : $\mathrm{d}W = (\|\vec{F}\| + p_0 S)\,\mathrm{d}x .$ (1)

Etudions l'équilibre du piston :

$$\vec{F} + p_0 S\vec{x} - pS\vec{x} = \vec{0} .$$

Algébriquement : $\|\vec{F}\| + p_0 S - pS = 0 .$ (2)

La relation (1) peut donc s'écrire :

$$\mathrm{d}W = pS\,\mathrm{d}x . \quad (3)$$

Nous pouvons poser : $S\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}v$, où d$v$ est la variation de volume du système gazeux considéré.
Le signe moins s'explique par le fait que si d$x > 0$ le volume v décroît et si d$x < 0$ le volume v croît.
v peut donc être considéré comme un nombre algébrique si l'on prend la précaution d'introduire ce signe moins.
(3) s'écrit alors :

$$\boxed{\mathbf{d}W = -\,p\,\mathbf{d}v} \quad (4)$$

Si le système isolé est ramené (comme c'est l'usage) à un kilogramme de gaz, les unités utilisées pour la relation (4) sont :

dW en J/kg ; p en Pa ; dv en m ^{3}/kg .

Notons que pour le kilogramme de gaz enfermé dans le cylindre, les quantités :

p = pression ; v = volume massique ;

T = température absolue ;

ne sont pas indépendantes. Il est donc impossible d'exploiter la relation (4) pour faire un bilan de l'état 1 à l'état 2 par exemple si on ne connait pas la loi de variation de p, v ou T. Supposons connue la loi de variation $p = f(v)$ entre les états 1 et 2. Le diagramme représentatif de cette fonction est très utilisé en thermodynamique ; c'est le **diagramme de Clapeyron.** Dans le plan de ce diagramme, le sens positif est celui qui va de l'axe des volumes (v) à celui des pressions (p) *(fig. 2.6)*.

— Le travail élémentaire échangé entre le système (1 kg de gaz) et le milieu extérieur :

$$\mathrm{d}W = -\,p\,\mathrm{d}v$$

est représenté par la mesure algébrique de l'aire du rectangle hachuré.

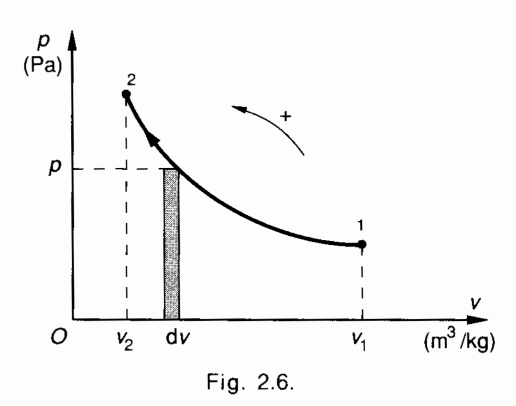


Fig. 2.6.

— Entre les états 1 et 2 :

$$\boxed{W_{12} = \int_{v_1}^{v_2} -\,p\,\mathrm{d}v} .$$

Graphiquement, le travail échangé W_{12} se mesurera donc par l'aire comprise entre l'arc 1-2 et l'axe des v.

5.3. EXPRESSION DU TRAVAIL ÉCHANGÉ AU COURS D'UN CYCLE

Un cycle, nous l'avons vu au *paragraphe 4.2* peut être considéré comme une suite de transformations telles que l'état final du système soit le même que l'état initial.

Considérons par exemple le diagramme de Clapeyron d'un cycle 1.2.3.1 *(fig. 2.7)*.

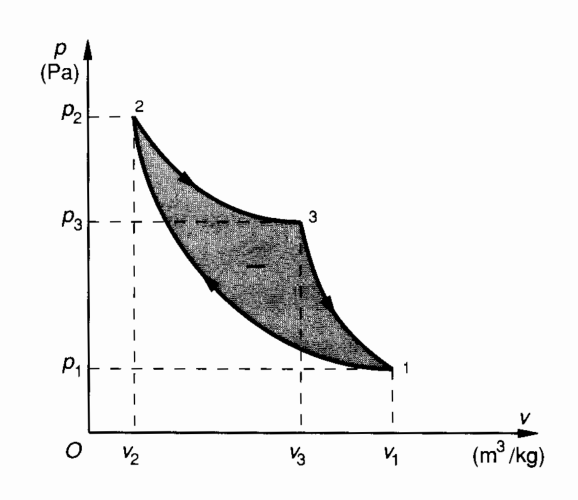


Fig. 2.7.

Le travail échangé au cours d'un cycle entre le système et le milieu extérieur est égal à la somme algébrique des travaux échangés au cours des transformations qui le composent :

$$W_{1\,231} = W_{12} + W_{23} + W_{31} .$$

On observe que ces travaux ont des signes différents :

$$W_{12} = \int_{v_1}^{v_2} - p\, dv \;; \quad dv < 0 \Rightarrow W_{12} > 0 \;;$$

$$W_{23} = \int_{v_2}^{v_3} - p\, dv \;; \quad dv > 0 \Rightarrow W_{23} < 0 \;;$$

$$W_{31} = \int_{v_3}^{v_1} - p\, dv \;; \quad dv > 0 \Rightarrow W_{31} < 0 .$$

Si nous faisons la somme algébrique des aires, $W_{1\,231}$ est mesuré par l'aire 1-2-3 affectée du signe moins. On peut convenir de désigner par « **Cycle moteur** » un tel cycle, puisque c'est le système qui fournit du travail mécanique au milieu extérieur.
On notera, et la règle est très simple à retenir que lorsqu'un cycle est parcouru dans le sens négatif, le travail échangé entre le système et le milieu extérieur est négatif et que lorsqu'un cycle est parcouru dans le sens positif, le travail échangé est positif *(fig. 2.8)*. Cette règle permet de reconnaitre rapidement un cycle moteur et un cycle récepteur.

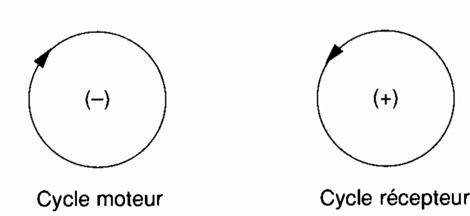


Fig.. 2.8.

5.4. APPLICATION

Une masse d'air de 1 kg subit la transformation ouverte $1 \rightarrow 2$ suivante :

Etat initial 1 : $\begin{cases} p_1 = 10^5 \text{ Pa (atmosphérique)}, \\ v_1 = 0{,}9 \text{ m}^3/\text{kg} \;; \end{cases}$

Etat final 2 : $\begin{cases} p_2 = 4{,}5 . 10^5 \text{ Pa} \;; \\ v_2 = \;? \end{cases}$

Cette transformation $1 \rightarrow 2$ est telle que le produit $pv = \text{Cte}$.

QUESTION 1

Calculer v_2 et tracer le diagramme de Clapeyron de cette transformation.

RÉPONSE

Comme $pv = \text{Cte}$:

$$p_2 v_2 = p_1 v_1 \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{p_1}{p_2} v_1 ,$$

soit : $\mathbf{v_2 = 0{,}2\ m^3/kg}$ **.**

La courbe $1 \rightarrow 2$ du diagramme de Clapeyron est une portion d'hyperbole *(fig. 2.9)*.

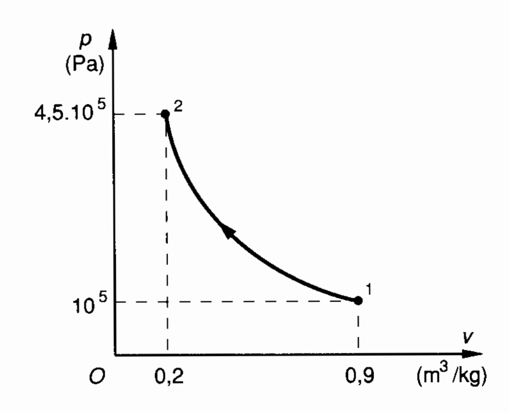


Fig. 2.9.

QUESTION 2

Calculer le travail échangé W_{12} au cours de cette transformation.

RÉPONSE

On sait que :

$$W_{12} = \int_{v_1}^{v_2} - p\, dv .$$

Comme $pv = \text{Cte}$, on peut écrire : $pv = p_1 v_1$, soit $p = \dfrac{p_1 v_1}{v}$.
Le travail W_{12} prend alors la forme :

$$W_{12} = \int_{v_1}^{v_2} - p_1 v_1 \frac{dv}{v} ,$$

soit

$$W_{12} = - p_1 v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = - p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} ,$$

soit encore $W_{12} = p_1 v_1 \ln \dfrac{v_1}{v_2}$.

Numériquement : $W_{12} = 135\,367$ J/kg ou plutôt :

$$\mathbf{W_{12} \approx 135{,}3\ kJ/kg} .$$

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 Une masse de gaz de 4 kg subit une transformation $1 \rightarrow 2$ suivant la loi pv = Cte :

Etat 1 : $\begin{cases} p_1 = 10^5 \text{ Pa}, \\ v_1 = 0{,}88 \text{ m}^3/\text{kg} ; \end{cases}$

Etat 2 : $\begin{cases} p_2 = ? \\ v_2 = 0{,}22 \text{ m}^3/\text{kg}. \end{cases}$

QUESTIONS

1° Calculer p_2 et tracer le diagramme de Clapeyron de cette transformation $1 \rightarrow 2$.
2° Quel travail W_{12} cette masse de gaz a-t-elle échangé avec le milieu extérieur au cours de cette transformation ?

RÉPONSES

1° $p_2 = 4.10^5$ Pa.

2° $W_{12} \approx 488$ kJ.

2 Un kilogramme de gaz est chauffé à volume constant et reçoit une quantité de chaleur de 8 000 calories (1 cal = 4,18 J).

QUESTIONS

1° Calculer le travail W_{12} échangé.
2° Exprimer la quantité de chaleur Q_{12} échangée.
3° Exprimer la variation d'énergie interne du gaz.

RÉPONSES

1° $W_{12} = 0$.

2° $Q_{12} = 33{,}44$ kJ/kg.

3° $U_2 - U_1 = 33{,}44$ kJ/kg.

3 Un fluide subit une transformation ouverte $1 \rightarrow 2$ à pression constante :

Etat 1 : $\begin{cases} p_1 = 2.10^5 \text{ Pa}, \\ v_1 = 0{,}4 \text{ m}^3/\text{kg} ; \end{cases}$

Etat 2 : $\begin{cases} p_2 = 2.10^5 \text{ Pa} ; \\ v_2 = 0{,}1 \text{ m}^3/\text{kg}. \end{cases}$

Pendant cette transformation, les pertes de chaleur sont évaluées à 2 000 calories par kilogramme de fluide (1 cal = 4,18 J).

QUESTIONS

1° Tracer le diagramme de Clapeyron de la transformation ouverte $1 \rightarrow 2$.
2° Calculer le travail W_{12} échangé.
3° Exprimer la quantité de chaleur Q_{12} échangée.
4° Exprimer la variation d'énergie interne du fluide.

RÉPONSES

2° $W_{12} = 60$ kJ/kg.

3° $Q_{12} = -8{,}36$ kJ/kg.

4° $U_2 - U_1 = 51{,}64$ kJ/kg.

4 Au cours du cycle $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ défini par le diagramme de Clapeyron *(fig. 2.10)*, une masse d'air de 1 kg a échangé du travail et une certaine quantité de chaleur avec le milieu extérieur.

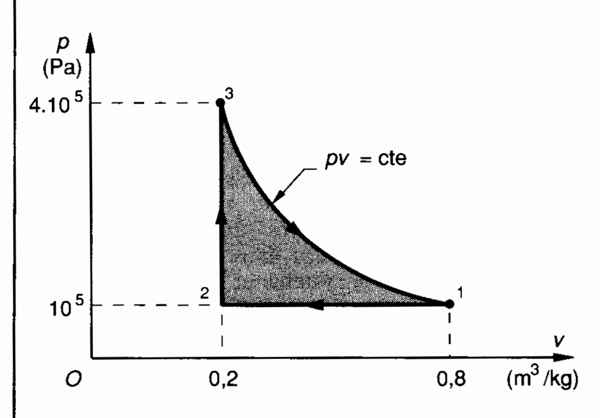


Fig. 2.10.

Etat 1 : $\begin{cases} p_1 = 10^5 \text{ Pa}, \\ v_1 = 0{,}8 \text{ m}^3/\text{kg} ; \end{cases}$

Etat 2 : $\begin{cases} p_2 = 10^5 \text{ Pa}, \\ v_2 = 0{,}2 \text{ m}^3/\text{kg}. \end{cases}$

Etat 3 : $\begin{cases} p_3 = 4.10^5 \text{ Pa}, \\ v_3 = 0{,}2 \text{ m}^3/\text{kg}. \end{cases}$

Dans la transformation $1 \rightarrow 2$ les pertes de chaleur se sont chiffrées à 210 kJ/kg.
Dans la transformation $2 \rightarrow 3$ on a fourni au système une quantité de chaleur de 150 kJ/kg.

QUESTIONS

1° Caractériser la transformation $1 \rightarrow 2$, exprimer pour celle-ci : W_{12}, Q_{12}, $U_2 - U_1$.
2° Caractériser la transformation $2 \rightarrow 3$, exprimer pour celle-ci : W_{23}, Q_{23}, $U_3 - U_2$.
3° Calculer le travail échangé W_{31} au cours de la transformation $3 \rightarrow 1$.
Calculer $U_1 - U_3$, puis Q_{31}.
4° Effectuer le bilan mécanique et thermique de ce cycle. Ce cycle est-il moteur ou récepteur ?

RÉPONSES

1° 1 → 2 : à pression constante (isobare) ;

$$W_{12} = 60 \text{ kJ/kg} ;$$
$$Q_{12} = -210 \text{ kJ/kg} ;$$
$$U_2 - U_1 = -150 \text{ kJ/kg} .$$

2° 2 → 3 : à volume constant (isochore) ;

$$W_{23} = 0 ;$$
$$Q_{23} = 150 \text{ kJ/kg} ;$$
$$U_3 - U_2 = 150 \text{ kJ/kg} .$$

3°
$$W_{31} \approx -110{,}9 \text{ kJ/kg} ;$$
$$U_1 - U_3 = 0 ;$$
$$Q_{31} \approx 110{,}9 \text{ kJ/kg} .$$

4°
$$W_{1231} \approx -50{,}9 \text{ kJ/kg} ;$$
$$Q_{1231} \approx 50{,}9 \text{ kJ/kg} ;$$
$W_{1231} < 0$, ce cycle est moteur.

5 Une masse d'air de 1 kg décrit une suite de transformations constituant le cycle 1 → 2 → 3 → 4 → 1 représenté par le diagramme de Clapeyron de la *figure 2.11*.

On donne :

Etat 1 : $\begin{cases} p_1 = 10^5 \text{ Pa} , \\ v_1 = 0{,}8 \text{ m}^3/\text{kg} ; \end{cases}$

Etat 2 : $\begin{cases} p_2 = 10^5 \text{ Pa}, \\ v_2 = 0{,}1 \text{ m}^3/\text{kg}. \end{cases}$

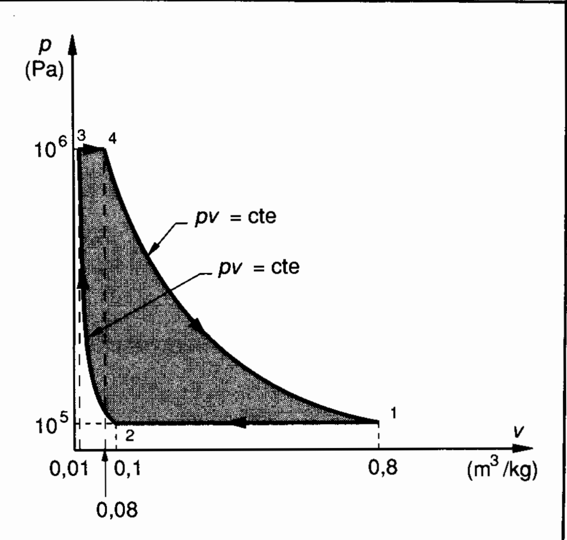


Fig. 2.11.

Etat 3 : $\begin{cases} p_3 = 10^6 \text{ Pa}, \\ v_3 = 0{,}01 \text{ m}^3/\text{kg} ; \end{cases}$

Etat 4 : $\begin{cases} p_4 = 10^6 \text{ Pa}, \\ v_4 = 0{,}08 \text{ m}^3/\text{kg}. \end{cases}$

QUESTION

Etablir le bilan mécanique et thermique de ce cycle.

RÉPONSE

$$W_{\text{cycle}} = -Q_{\text{cycle}} = -161{,}2 \text{ kJ/kg} .$$



Transformations thermodynamiques Principe de Carnot Applications

1. RAPPEL DES LOIS RELATIVES AUX GAZ PARFAITS

1.1. GAZ PARFAITS ET GAZ RÉELS

Les gaz parfaits (purement théoriques) suivent les lois de Mariotte, de Gay-Lussac et de Charles, ou plus exactement, ces lois ont été établies comme lois limites avec des gaz réels mais dans des conditions assez particulières : température très éloignée de leur température de liquéfaction et faible pression.
On constate expérimentalement que ces lois appliquées aux gaz réels dans les domaines d'emploi courants sont très suffisantes (erreur de 2 % environ). Cette erreur est du même ordre de grandeur que celle que l'on fait en évaluant les pertes de chaleur par les parois par exemple.

1.2. LOI DE MARIOTTE

A température constante, les volumes d'une masse gazeuse sont en raison inverse de sa pression.

Considérons une certaine masse de gaz évoluant à température constante entre les états 1 et 2.
D'après la loi de Mariotte :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{p_2}{p_1}, \quad \text{ou} \quad p_1 v_1 = p_2 v_2 .$$

Ou encore plus généralement :

$$\boxed{p \cdot v = \text{Cte}}\,.$$

Pour un volume v correspondant à une masse de 1 kg de gaz la constante a pour unité : p en pascals (Pa) ; v en mètres cubes par kilogramme (m^3/kg) (ou volume massique) donc pv en joules par kilogramme (J/kg).

1.3. LOI DE GAY-LUSSAC

A pression constante, un gaz parfait et, approximativement, les gaz réels qui s'en approchent, ont un coefficient de dilatation indépendant de la nature du gaz, de sa température et de sa pression.

Soit α ce coefficient de dilatation : $\alpha = \dfrac{1}{273}$, donc :

$$\boxed{v = v_0(1 + \alpha t)} \quad \text{(à pression constante)}$$

avec v_0 : volume du gaz à $t_0 = 0\,°C$.
On rappelle que $T = t + 273$. T est la température absolue. Elle est exprimée en kelvins.
Considérons une certaine masse de gaz évoluant entre l'état 0 ($t_0 = 0\,°C$) et l'état 1 (quelconque) à pression constante.
On peut écrire :

$$\frac{v_1}{v_0} = 1 + \frac{t_1}{273} \quad \text{ou} \quad \frac{v_1}{v_0} = \frac{t_1 + 273}{273},$$

or on sait que :

$$T_0 = 273 \quad \text{et} \quad T_1 = t_1 + 273 ,$$

donc :

$$\boxed{\frac{v_1}{v_0} = \frac{T_1}{T_0}} \quad \text{(à pression constante)} .$$

1.4. LOI DE CHARLES

A volume constant, un gaz parfait et approximativement les gaz réels qui s'en rapprochent, ont un coefficient de variation de pression indépendant de la nature du gaz, de sa température et de sa pression.

Soit β ce coefficient : $\beta = \dfrac{1}{273}$, donc

$$\boxed{p = p_0(1 + \beta t)} \quad \text{(à volume constant)},$$

avec p_0 pression du gaz à $t_0 = 0\ °\text{C}$.
Considérons une certaine masse de gaz évoluant entre l'état 0 ($t_0 = 0\ °\text{C}$) et l'état 1 (quelconque) à volume constant.
On peut écrire :

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + \frac{t_1}{273}$$

soit :

$$\boxed{\frac{p_1}{p_0} = \frac{T_1}{T_0}} \quad \text{(à volume constant)}.$$

1.5. EQUATION CARACTÉRISTIQUE DES GAZ PARFAITS

Cette équation permet de résumer les trois lois précédentes en une seule expression :

$$\boxed{p \,.\, v = rT}.$$

avec :
p : pression en pascals ;
v : volume massique en kilogrammes par mètre cube ;
T : température absolue en kelvins ;
r : constante du gaz en joules par kilogramme par kelvin.
On peut vérifier que l'équation caractéristique des gaz parfaits permet de retrouver les relations caractéristiques des trois lois de Mariotte, Gay-Lussac et Charles.

Transformation isotherme : T = Cte

$$\left.\begin{aligned} p_1 v_1 &= rT \\ p_2 v_2 &= rT \end{aligned}\right\} \Rightarrow pv = \text{C}^{\text{te}} \quad \text{(Mariotte)}.$$

Transformation isobare : p = Cte

$$\left.\begin{aligned} pv_1 &= rT_1 \\ pv_2 &= rT_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{(Gay-Lussac)}.$$

Transformation isochore : v = Cte

$$\left.\begin{aligned} p_1 v &= rT_1 \\ p_2 v &= rT_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{(Charles)}.$$

APPLICATION

Soit à déterminer la constante r de l'oxygène. On sait que la mole d'oxygène a une masse de 32 g et occupe à 0 °C un volume de 22,4 l sous pression atmosphérique $p_0 = 101\,300$ Pa.
La masse volumique v_0 de l'oxygène est donc :

$$v_0 = \frac{22{,}4 \times 10^{-3}}{32 \times 10^{-3}} = 0{,}7\ \text{m}^3/\text{kg},$$

d'où la constante r :

$$r = \frac{p_0 v_0}{T_0}, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{101\,300 \times 0{,}7}{273}.$$

$$\mathbf{r = 260\ J.kg^{-1}.K^{-1}}$$

1.6. LOI DE JOULE

Cette loi a été établie expérimentalement. Décrivons très sommairement cette expérience *(fig. 3.1)*.

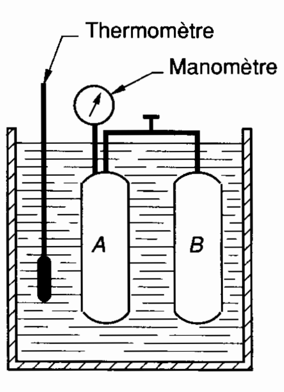


Fig. 3.1.

Considérons deux récipients repérés par exemple A et B.
Ces deux récipients sont plongés dans un calorimètre c'est-à-dire une enceinte isolée thermiquement du milieu extérieur et contenant de l'eau.

— Le récipient A contient un gaz et on fait un vide poussé dans le récipient B. Un robinet ferme la conduite qui relie A et B.
Au bout d'un certain temps, nécessaire à l'établissement de l'équilibre thermique entre les réservoirs et l'eau on mesure les caractéristiques du gaz contenu dans A : p_1, v_1 et t_1.
On ouvre alors le robinet, le gaz se détend et occupe le volume des deux réservoirs. Lorsque l'équilibre thermique est atteint on mesure les caractéristiques du gaz contenu dans A et B :

$$p_2, v_2, t_2,$$

et on constate que $t_2 = t_1$.
Exprimons la variation d'énergie interne $U_2 - U_1$ entre les états initial (1) et final (2).
Nous avons vu au *paragraphe 4.3* du *chapitre 2* (relation 6) que :

$$U_2 - U_1 = (W + Q)_{12},$$

avec W_{12} = travail mécanique échangé entre le système (gaz) et le milieu extérieur (eau).
Ici **$W_{12} = 0$.**
Q_{12} = Quantité de chaleur échangée entre le système (gaz) et le milieu extérieur (eau).
Ici, nous avons vu que $t_2 = t_1$; la température de l'eau (et de gaz) n'ayant pas changé il est nécessaire que les échanges de chaleur soient nuls donc **$Q_{12} = 0$,** et :

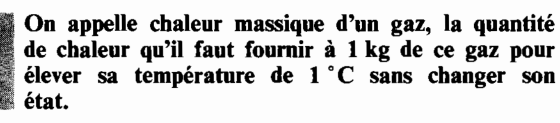
$$\boxed{U_2 - U_1 = 0}.$$

Le volume du gaz a changé : $v_2 > v_1$.
La pression du gaz a changé : $p_2 < p_1$.
La température du gaz n'a pas changé : $t_2 = t_1$.
Il résulte de cette expérience que l'énergie interne ne dépend que de la température.

Loi de Joule

L'énergie interne d'une masse donnée, constante, d'un gaz parfait ne dépend que de la température de ce gaz.

1.7. CHALEURS MASSIQUES


On appelle chaleur massique d'un gaz, la quantité de chaleur qu'il faut fournir à 1 kg de ce gaz pour élever sa température de 1 °C sans changer son état.

On distinguera :

C_v = chaleur massique à volume constant

et C_p = chaleur massique à pression constante.

1.7.1. Définition de C_v

Considérons un kilogramme de gaz contenu dans un cylindre fermé par un piston et évoluant à volume constant *(fig. 3.2)*.

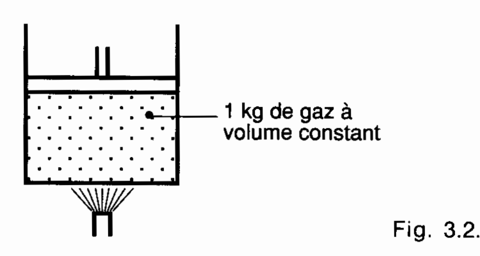


Fig. 3.2.

D'après la définition précédente :

$$\boxed{C_v = \frac{dQ}{dT} \quad (\text{à } v = \text{Cte})}.$$

Evaluons la variation d'énergie interne du gaz au cours de cette transformation.
Nous avons défini cette variation entre les états 1 et 2

$$U_2 - U_1 = W_{12} + Q_{12}$$

ou si nous considérons les états 1 et 2 comme infiniment voisins :

$$dU = dW + dQ.$$

Dans les conditions de l'expérience :

$$\begin{cases} dW = -p\,dv = 0 \quad (v = \text{Cte}) \\ dQ = C_v\,dT. \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{dU = C_v \, . \, dT}.$$

On remarque que la variation d'énergie interne ne dépend que de la variation de température.

1.7.2. Définition de C_p

Considérons un kilogramme de gaz dans un cylindre fermé par un piston et évoluant à pression constante *(fig. 3.3)* :

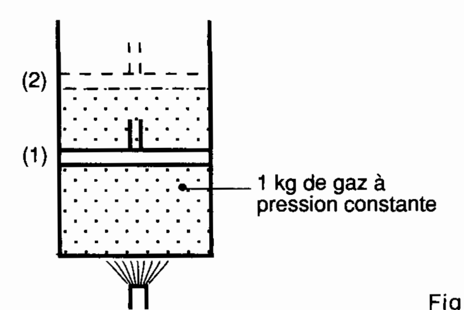


Fig. 3.3.

D'après la définition précédente :

$$\boxed{C_p = \frac{dQ}{dT} \quad (\text{à } p = \text{Cte})}.$$

Evaluons la variation d'énergie interne du gaz au cours de cette transformation :

$$dU = dW + dQ.$$

Dans les conditions de l'expérience :

$$\begin{cases} dW = -p\,dv \neq 0 \\ dQ = C_p\,dT. \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{dU = C_p\,dT - p\,dv}.$$

1.7.3. Unités

Dans les deux transformations précédentes nous avons rencontré :
dQ: variation de la quantité de chaleur échangée par la masse de 1 kg de gaz avec le milieu extérieur. Elle s'exprime en joules par kilogramme.
dT : variation de la température absolue du kilogramme de gaz. Elle s'exprime en kelvins.
C_v et C_p chaleurs massiques. Elles s'expriment en joules par kilogramme par kelvin.

1.7.4. Relation de Mayer

Considérons les deux relations précédentes définissant la variation de l'énergie interne :

$$dU = C_v\,.\,dT \qquad (1)$$

$$dU = C_p\,.\,dT - p\,dv \qquad (2)$$

et soit l'équation caractéristique des gaz parfaits :

$$pv = rT.$$

Différencions cette relation dans le cas où $p =$ Cte :

$$p\,dv = r\,dT. \qquad (3)$$

La variation d'énergie interne (relation 2) peut donc s'exprimer uniquement en fonction de la variation de la température :

$$dU = C_p\,.\,dT - r\,.\,dT$$

soit :

$$dU = (C_p - r)\,.\,dT. \qquad (4)$$

Pour une même variation de température, la variation d'énergie interne du système isolé est la même. Soit en comparant les relations (1) et (4)

$$C_v = C_p - r$$

ou :

$$\boxed{C_p - C_v = r} \text{ (relation de Mayer)}.$$

1.7.5. Variations de C_p et C_v en fonction de la température

Les chaleurs massiques C_p et C_v et par conséquent r varient en fonction de la température. Des mesures précises ont permis l'établissement de diagrammes de variation.
On remarque par exemple que dans l'expression de la variation de l'énergie interne :

$$dU = C_v\,.\,dT,$$

C_v est défini par la connaissance de la température T.
Entre les états 1 et 2.

$$U_2 - U_1 = C_v(T_2 - T_1),$$

C_v représente ici la valeur moyenne de C_v à la température T_1 et de C_v à la température T_2. On devrait écrire :

$$\boxed{U_2 - U_1 = \frac{Cv_1 + Cv_2}{2}(T_2 - T_1)}.$$

• *Exemple de variation de C_p et C_v. Cas de l'air* (fig. 3.4).

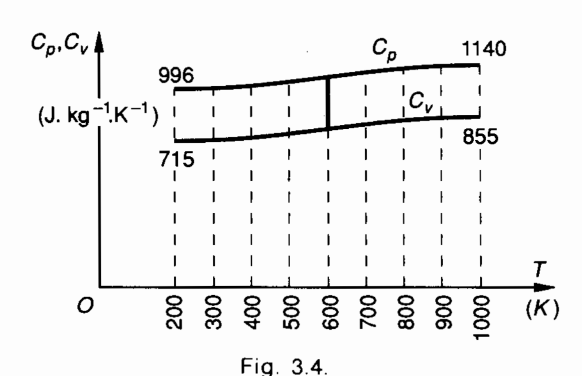


Fig. 3.4.

1.7.6. Application

Un volume d'air de 20 litres à la pression atmosphérique $p_0 = 101\,300$ Pa et à $t_0 = 0$ °C subit les deux transformations successives suivantes.

Transformation 1-2 : isochore. L'air est chauffé jusqu'à ce que sa pression soit égale à $3\,p_0$.

Transformation 2-3 : isobare. L'air est chauffé jusqu'à ce que sa température atteigne 600 °C.

QUESTION 1

Quelle est la température atteinte par l'air à la fin de la transformation 1-2 ?

RÉPONSE

Les 20 litres d'air concernés par les transformations étudiées ont une masse de :

$$m = 1{,}293 \times 20 \times 10^{-3}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{m = 0{,}026 \text{ kg}} .$$

La transformation 1.2 étant isochore :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

avec $p_1 = p_0$, $p_2 = 3\,p_0$, $T_1 = 273$ K

$$T_2 = T_1 \times \frac{p_2}{p_1}, \quad \text{ou} \quad T_2 = 819 \text{ K},$$

soit : $\boxed{t_2 = 546\ ^\circ\text{C}}$.

QUESTION 2

Calculer la variation de l'énergie interne de l'air dans la transformation 1-2.

RÉPONSE

Dans une transformation isochore :

$$\mathrm{d}U = C_v \,.\, \mathrm{d}T ;$$

soit entre 1 et 2 :

$$U_2 = U_1 = C_{v\,\text{moy}\,1\text{-}2} \,.\, (T_2 - T_1) .$$

La détermination de $C_{v\,\text{moy}\,1\text{-}2}$ peut se faire en utilisant la courbe de variation de C_v en fonction de T (voir *fig. 3.4*)

$$C_{v\,\text{moy}\,1\text{-}2} = \frac{C_{v_1} + C_{v_2}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} C_v \text{ à } 273 \text{ K} &\approx 720 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \\ C_v \text{ à } 819 \text{ K} &\approx 820 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \end{aligned}\right\} C_{v\,\text{moy}\,1\text{-}2} = 770 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1},$$

donc $U_2 - U_1 = 420{,}42$ kJ/kg,
(pour 1 kg)
soit pour la masse d'air de 0,026 kg :

$$\boxed{U_2 - U_1 \approx 11 \text{ kJ}} .$$

QUESTION 3

Quel est le volume occupé par l'air à la fin de la transformation 2-3 ?

RÉPONSE

La transformation 2.3 étant isobare :

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{T_2}{T_3}$$

avec :

$v_2 = 0{,}02 \text{ m}^3$, $T_2 = 819$ K, $T_3 = 873$ K,

donc :

$$v_3 = v_2 \times \frac{T_3}{T_2}, \quad v_3 \approx 0{,}0214 \text{ m}^3, \quad v_3 \approx 21{,}4 \text{ litres}$$

QUESTION 4

Calculer la variation de l'énergie interne de l'air dans la transformation 2-3.

Nota : on sait que la masse volumique de l'air à 0 °C et sous pression atmosphérique est $\rho = 1{,}293 \text{ kg/m}^3$.

RÉPONSE

Dans une transformation isobare :

$$\mathrm{d}U = C_p\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}v .$$

Soit entre les états 2 et 3 :

$$U_3 - U_2 = C_{p\,\text{moy}\,2\text{-}3}(T_3 - T_2) - p_{23}(v_3 - v_2),$$

avec $$C_{p\,\text{moy}\,2\text{-}3} = \frac{C_{p2} + C_{p3}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} C_p \text{ à } T_2 = 819 \text{ K} &\approx 1\,096 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \\ C_p \text{ à } T_3 = 873 \text{ K} &\approx 1\,104 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \end{aligned}\right\}$$

$$C_{p\,\text{moy}\,2\text{-}3} \approx 1\,100 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

avec :

$$p_{23} = 3\,p_0 \approx 303\,900 \text{ Pa} .$$

v_3 volume massique de l'air à l'état 3 :

$$v_3 = \frac{0{,}0214}{0{,}0260} = 0{,}82 \text{ m}^3/\text{kg} ;$$

v_2 volume massique de l'air à l'état 2 :

$$v_2 = \frac{0{,}020}{0{,}026} = 0{,}77 \text{ m}^3/\text{kg} .$$

Soit pour 1 kg d'air :

$$U_3 - U_2 \approx 44{,}2 \text{ kJ/kg} .$$

Et pour la masse d'air de 0,026 kg étudiée

$$\boxed{U_3 - U_2 = 1{,}15 \text{ kJ}} .$$

2. ÉTUDE DES TRANSFORMATIONS THERMODYNAMIQUES EN VASE CLOS (ou sans transvasement)

2.1. REMARQUE

Dans une première étude de la thermodynamique on peut se contenter d'envisager des transformations en vase clos, c'est-à-dire que l'on peut considérer les évolutions d'une masse de un kilogramme de fluide située toujours dans le même récipient. On conçoit cependant qu'une telle étude reste très insuffisante pour aborder les machines thermiques dans lesquelles le fluide s'écoule.
Nous étudierons successivement :
les transformations d'un kilogramme de gaz évoluant sans transvasement.

Transformations isothermes : $dT = 0$.
Transformations isochores : $dv = 0$.
Transformations isobares : $dp = 0$.
Transformations isentropiques : $dQ = 0$.
Transformations polytropiques.

2.2. ÉTUDE D'UNE TRANSFORMATION ISOTHERME

Pour $T = \text{Cte}$.
L'évolution du gaz suit la loi de Mariotte : $pv = \text{Cte}$.
La courbe représentative de cette fonction sur le diagramme de Clapeyron est donc une hyperbole *(fig. 3.5)*.

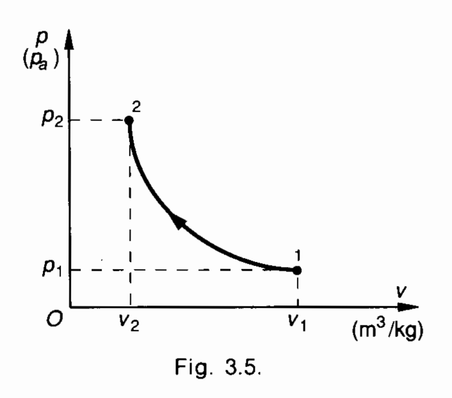


Fig. 3.5.

Travail échangé avec le milieu extérieur

Exprimons le travail élémentaire échangé.

$$dW = -p\,dv \quad (\text{avec } pv = \text{Cte}).$$

Donc, quel que soit le produit pv :
$pv = p_1 v_1$, d'où

$$p = p_1 v_1 \cdot \frac{1}{v}.$$

Soit en fonction de v seulement :

$$dW = -p_1 v_1 \cdot \frac{dv}{v}.$$

Pour toute la transformation 12 :

$$W_{12} = -p_1 v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v},$$

$$\boxed{W_{12} = -p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1}}.$$

Variation d'énergie interne du système isolé

Nous savons que la variation d'énergie interne est fonction de la variation de température du système. Une transformation isotherme se fait donc sans variation d'énergie interne :

$$\boxed{U_2 - U_1 = 0}.$$

2.3. ÉTUDE D'UNE TRANSFORMATION ISOCHORE

Dans une transformation isochore : $dv = 0$.
D'après l'équation des gaz parfaits :

$$p_1 v_1 = rT_1 \quad \text{et} \quad p_2 v_2 = rT_2.$$

En faisant le rapport membre à membre avec $v_1 = v_2$:

$$\boxed{\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}}.$$

Représentons cette fonction sur le diagramme de Clapeyron *(fig. 3.6)*.

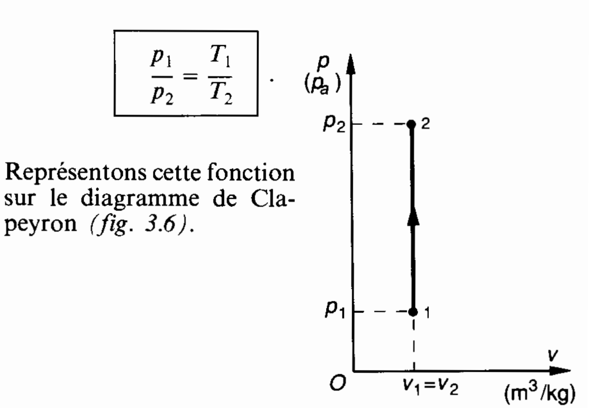


Fig. 3.6.

Travail échangé avec le milieu extérieur

Exprimons le travail élémentaire échangé :

$$dW = -p \cdot dv$$

Comme ici $dv = 0$:

$$\boxed{W_{12} = 0}$$

une transformation isochore se fait sans échange de travail.

Variation d'énergie interne du système isolé

A volume constant on sait que :

$$dU = C_v \cdot dT.$$

D'après l'équation caractéristique des gaz parfaits $pv = rT$ que nous différencions à volume constant :

$$v \cdot dp = r\, dT,$$

donc :

$$dU = \frac{C_v}{r} \cdot v \cdot dp.$$

Pour toute la transformation ouverte 1-2 :

$$U_2 - U_1 = C_v \cdot \frac{v}{r}(p_2 - p_1) \quad .$$

Quelquefois, on trouve cette expression sous une autre forme. On désigne par γ le rapport $\frac{C_p}{C_v}$:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad \text{et} \quad C_p - C_v = r$$

(voir *paragraphe 1.7.4*).
et on exprime C_p et C_v en fonction de γ et r. (Pour les gaz se rapprochant de la définition des gaz parfaits et à la température normale $0 < t < 200$ °C environ : $\gamma \approx 1{,}4$.)

$$C_v = \frac{r}{\gamma - 1}; \quad C_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}.$$

L'expression de la variation d'énergie interne devient alors :

$$\boxed{U_2 - U_1 = \frac{v}{\gamma - 1}(p_2 - p_1) = \frac{r}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)}.$$

2.4. ÉTUDE D'UNE TRANSFORMATION ISOBARE

Dans une transformation isobare : $dp = 0$.
D'après l'équation des gaz parfaits :

$$p_1 v_1 = rT_1 \quad \text{et} \quad p_2 v_2 = rT_2.$$

En faisant le rapport membre à membre avec $p_1 = p_2$:

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}}.$$

Représentons cette fonction sur le diagramme de Clapeyron *(fig. 3.7)*.

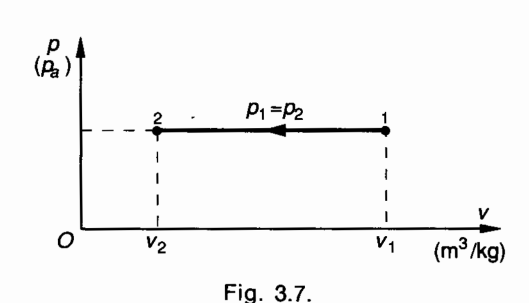


Fig. 3.7.

Travail échangé avec le milieu extérieur

Exprimons le travail élémentaire échangé, avec ici $p = \text{Cte}$:

$$dW = -p\, dv.$$

Pour toute la transformation ouverte 1-2

$$W_{12} = -p \int_{v_1}^{v_2} dv; \quad \text{ou} \quad \boxed{W_{12} = -p(v_2 - v_1)}.$$

Variation d'énergie interne du système isolé

A pression constante on sait que :

$$dQ = C_p \cdot dT.$$

Comme d'autre part $dW = -p\, dv$:
La variation d'énergie interne

$$dU = dQ + dW$$

pourra s'écrire :

$$dU = C_p\, dT - p\, dv.$$

En différenciant (à pression constante) l'équation caractéristique des gaz parfaits :

$$p \,.\, \mathrm{d}v = r \,.\, \mathrm{d}T$$

on obtient $\mathrm{d}U = C_v \,.\, \mathrm{d}T$ et, en fonction de la variation de volume,

$$\mathrm{d}U = C_v \cdot \frac{p}{r}\,\mathrm{d}v\,,$$

Soit pour toute la transformation ouverte 1.2 :

$$U_2 - U_1 = C_v \frac{p}{r}\,(v_2 - v_1) \quad .$$

Et en tenant compte de la remarque faite précédemment :

$$\boxed{U_2 - U_1 = \frac{p}{\gamma - 1}\,(v_2 - v_1) = \frac{r}{\gamma - 1}\,(T_2 - T_1)} \quad .$$

2.5. ÉTUDE D'UNE TRANSFORMATION ISENTROPIQUE (ADIABATIQUE)

Une transformation isentropique se fait sans échange de chaleur avec le milieu extérieur :

$$\mathrm{d}Q = 0\,.$$

La loi de variation $p = f(v)$ est établie expérimentalement :

$$\boxed{pv^{\gamma} = \mathrm{Cte}} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}\,.$$

Représentons cette fonction sur le diagramme de Clapeyron *(fig. 3.8)*.

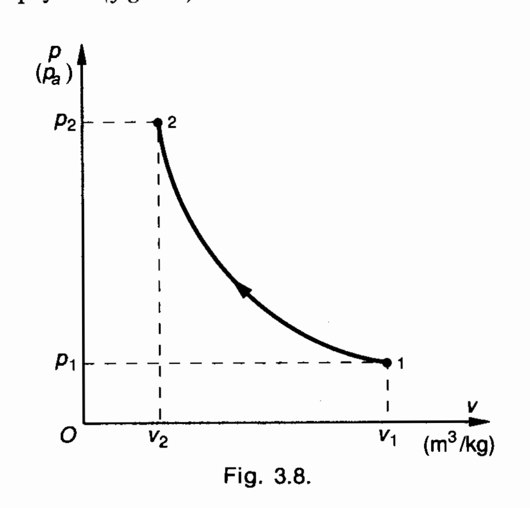


Fig. 3.8.

Travail échangé avec le milieu extérieur et variation d'énergie interne du système isolé

Exprimons la variation d'énergie interne :

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}W + \mathrm{d}Q$$

avec ici $\mathrm{d}Q = 0$, donc $\mathrm{d}U = \mathrm{d}W = -p\,\mathrm{d}v$.
Déterminons p fonction de v :

$$p_1\, v_1^{\gamma} = pv^{\gamma} = \mathrm{Cte},$$

$$p = p_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\gamma}.$$

Soit dans l'expression du travail élémentaire :

$$\mathrm{d}W = -\,p_1\, v_1^{\gamma} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{v^{\gamma}}\,.$$

Pour toute la transformation ouverte 1-2 :

$$W_{12} = -\,p_1 \,.\, v_1^{\gamma} \int_{v_1}^{v_2} v^{-\gamma} \,.\, \mathrm{d}v\,,$$

$$W_{12} = -\,p_1\, v_1^{\gamma} \cdot \frac{1}{-\gamma + 1}\,(v_2^{-\gamma + 1} - v_1^{-\gamma + 1})\,,$$

Soit :

$$\boxed{\begin{aligned} W_{12} = U_2 - U_1 &= \frac{1}{\gamma - 1}\,(p_2\, v_2 - P_1\, v_1) \\ &= \frac{r}{\gamma - 1}\,(T_2 - T_1)\,. \end{aligned}}$$

2.6. TRANSFORMATION POLYTROPIQUE

Lorsque la température du système isolé varie et que de plus celui-ci échange de la chaleur avec le milieu extérieur, la transformation n'est ni isotherme ni isentropique, elle est polytropique. Les transformations réelles sont polytropiques.
La loi de variation se présente sous la forme :

$$pv^k = \mathrm{Cte}\,,$$

k est un coefficient expérimental. k dépend des conditions physiques de l'expérience.

Travail échangé avec le milieu extérieur

Exprimons le travail élémentaire échangé :

$$\mathrm{d}W = -\,p\,\mathrm{d}v\,,$$

avec ici $pv^k = \mathrm{Cte}$.

Pour la transformation ouverte 1-2 :

$$W_{12} = \int_{v_1}^{v_2} - p \, \mathrm{d}v ,$$

soit :

$$W_{12} = - p_1 v_1^k \int_{v_1}^{v_2} v^{-k} \, \mathrm{d}v ,$$

$$W_{12} = - p_1 v_1^k \frac{1}{-k+1} (v_2^{-k+1} - v_1^{-k+1})$$

et :

$$\boxed{W_{12} = \frac{1}{k-1} (p_2 v_2 - p_1 v_1) = \frac{r}{k-1} (T_2 - T_1)}$$

Variation d'énergie interne du système isolé

Nous avons vu au *paragraphe 1.7* que $\mathrm{d}U = C_v \, \mathrm{d}T$, donc entre 1 et 2 :

$$U_2 - U_1 = C_v (T_2 - T_1) .$$

Avec $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$ et $C_p - C_v = r$, on obtient :

$$\boxed{U_2 - U_1 = \frac{r}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = \frac{1}{\gamma - 1} (p_2 v_2 - p_1 v_1)}$$

Quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur

D'après la définition de l'énergie interne :

$$U_2 - U_1 = W_{12} + Q_{12} ,$$

$$Q_{12} = (U_2 - U_1) - W_{12} ,$$

$$Q_{12} = \frac{1}{\gamma - 1} (p_2 v_2 - p_1 v_1) - \frac{1}{k-1} (p_2 v_2 - p_1 v_1) ,$$

$$Q_{12} = (p_2 v_2 - p_1 v_1) \frac{k - \gamma}{(\gamma - 1)(k-1)} ,$$

$$Q_{12} = \frac{r(k - \gamma)}{(\gamma - 1)(k-1)} (T_2 - T_1) .$$

Soit en fonction de W_{12} :

$$\boxed{Q_{12} = W_{12} \frac{k - \gamma}{\gamma - 1} .}$$

2.7. BILAN D'UN CYCLE

Au *chapitre 2, paragraphe 4.2* nous avons donné la définition d'un cycle.
Au *chapitre 2, paragraphe 5.2* nous avons exprimé le travail échangé au cours d'un cycle.
Considérons un cycle 1.2.3.1 par exemple.
Faire **le bilan mécanique** d'un tel cycle consiste à calculer la somme algébrique des travaux échangés au cours des transformations qui le composent :

$$W_{1231} = W_{12} + W_{23} + W_{31} .$$

Faire **le bilan thermique** d'un tel cycle consiste à calculer la somme algébrique des quantités de chaleur échangées au cours des transformations qui le composent

$$Q_{1231} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} .$$

D'après le principe de l'équivalence (voir *chapitre 2, paragraphe 4.2*)

$$[W + Q]_{\text{cycle}} = 0 .$$

On peut donc écrire :

$$Q_{1231} = - W_{1231} .$$

Ces deux bilans ne diffèrent donc que par leur signe.
Rappelons que si

$W_{1231} < 0$ le cycle est moteur,
$W_{1231} > 0$ le cycle est récepteur.

2.8. APPLICATION

Une masse d'air de 1 kg décrit un cycle 1, 2, 3, 4, 1 dont les caractéristiques (incomplètes) sont les suivantes :

Etat 1 : $p_1 = 10^5$ Pa	, $v_1 = 0{,}8$ m^3	, $T_1 =$
Etat 2 : $p_2 = 6.10^5$ Pa	, $v_2 =$	, $T_2 = T_1$
Etat 3 : $p_3 = p_2$	, $v_3 = 0{,}4$ m^3	, $T_3 =$
Etat 4 : $p_4 =$	, $v_4 = v_1$	, $T_4 =$

Pour simplifier les calculs on admettra que quelle que soit la température :

$$\begin{cases} C_p = 1 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} , \\ C_v = 0{,}714 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} . \end{cases}$$

Les transformations successives constituant le cycle sont telles que :

1-2 Isotherme ; 2-3 Isobare ; 3-4 Isentropique ; 4-1 Isochore.

QUESTIONS

1° Déterminer les éléments inconnus des caractéristiques du cycle défini dans l'énoncé.

2° Représenter le diagramme de Clapeyron relatif à ce cycle.

3° Faire le bilan mécanique et thermique de ce cycle.

RÉPONSES

1° *a) Calcul de la constante r de l'air*
D'après la relation de Mayer :

$$r = C_p - C_v, \quad \text{d'où} \quad \boxed{r = 286\ \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}}\ .$$

b) Calcul des caractéristiques de l'état 1 :
D'après l'équation des gaz parfaits : $pv = rT$

$$T_1 = \frac{p_1 v_1}{r}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{T_1 = 280\ \text{K}}\ .$$

c) Calcul des caractéristiques de l'état 2 :
La transformation 1-2 isotherme est telle que $p_1 v_1 = p_2 v_2$,

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{p_1}{p_2}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_2 = 0{,}133\ \text{m}^3}\ .$$

d) Calcul des caractéristiques de l'état 3 :
La transformation 2-3 étant isobare : $\dfrac{v_2}{v_3} = \dfrac{T_2}{T_3}$,

$$T_3 = T_2 \cdot \frac{V_3}{V_2}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{T_3 = 840\ \text{K}}\ .$$

e) Calcul des caractéristiques de l'état 4 :
La transformation 3-4 étant isentropique : $p_3 v_3^\gamma = p_4 v_4^\gamma$
avec $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} = 1{,}4$,

$$p_4 = p_3 \cdot \left(\frac{v_3}{v_4}\right)^\gamma, \quad \text{d'où} \quad \boxed{p_4 = 2{,}27.10^5\ \text{Pa}}\ .$$

Et d'après l'équation des gaz parfaits : $pv = rT$:

$$T_4 = \frac{p_4 v_4}{r}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{T_4 = 635\ \text{K}}\ .$$

2° *(fig. 3.9).*

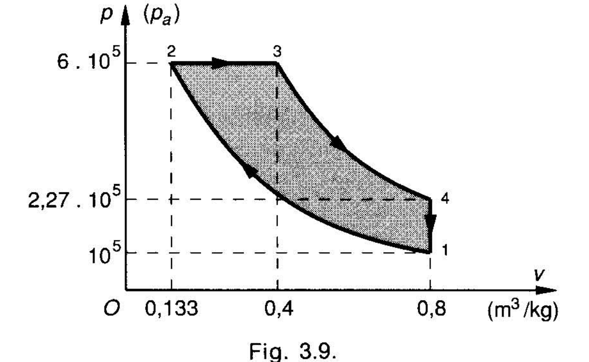


Fig. 3.9.

3° Faire le bilan mécanique d'un cycle revient à déterminer la somme algébrique des travaux échangés entre le système isolé et le milieu extérieur :

$$W_{\text{cycle}} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}\,.$$

a) Dans la transformation 1-2 :

$$W_{12} = \int_{v_1}^{v_2} -p\,.\,\mathrm{d}v\,, \quad \text{avec} \quad pv = p_1 v_1$$

$$W_{12} = -p_1 v_1 \ln\frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 \ln\frac{v_1}{v_2}\,,$$

$$\boxed{W_{12} = 144\ \text{kJ/kg}}\ .$$

b) Dans la transformation 2-3 :

$$W_{23} = \int_{v_2}^{v_3} -p\,.\,\mathrm{d}v\,, \quad \text{avec} \quad p = \text{Cte}$$

$$W_{23} = -p(v_3 - v_2)\,,$$

$$\boxed{W_{23} = -\ 160\ \text{kJ/kg}}\ .$$

c) Dans la transformation 3-4 :

$$W_{34} = \int_{v_3}^{v_4} -p\ \mathrm{d}v\,, \quad \text{avec} \quad pv^\gamma = p_3 v_3^\gamma\,,$$

$$W_{34} = \frac{1}{\gamma - 1}(p_4 v_4 - p_3 v_3)\,,$$

$$\boxed{W_{34} = -\ 150\ \text{kJ/kg}}\ .$$

d) Dans la transformation 4-1 :

$$W_{41} = \int_{v_4}^{v_1} -p\,.\,\mathrm{d}v \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}v = 0 \quad (v_1 = v_4)$$

$$\boxed{W_{41} = 0}\ .$$

e) Soit pour tout le cycle :

$$W_{\text{cycle}} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$$

$$\boxed{W_{\text{cycle}} = -\ 166\ \text{kJ/kg}}\ .$$

f) Bilan thermique du cycle :

D'après le principe de l'équivalence :

$$(W + Q)_{\text{cycle}} = 0\,.$$

on voit que la somme algébrique des quantités de chaleur échangées entre le système isolé et le milieu extérieur est :

$$Q_{\text{cycle}} = -W_{\text{cycle}} \qquad \boxed{Q_{\text{cycle}} = 166 \text{ kJ/kg}}\,.$$

On note qu'au cours de ce cycle l'air a reçu une certaine quantité de chaleur et fourni un certain travail. C'est un cycle moteur.

3. PRINCIPE DE CARNOT

3.1. ÉNONCÉ DU PRINCIPE DE CARNOT

Au cours d'un cycle, le système qui le parcourt doit échanger de la chaleur, d'une part, avec un milieu extérieur chaud, d'autre part, avec un milieu extérieur froid.

3.2. ANALYSE DU PRINCIPE

D'après le principe de l'équivalence nous savons que :

$$(W + Q)_{\text{cycle}} = 0\,.$$

Considérons une masse de 1 kg de fluide qui évolue de façon mécaniquement réversible de 1 à 2 puis de 2 à 3 et de 3 à 1. (1, 2 et 3 représentent des états successifs de la masse fluide isolée *(fig. 3.10)*.

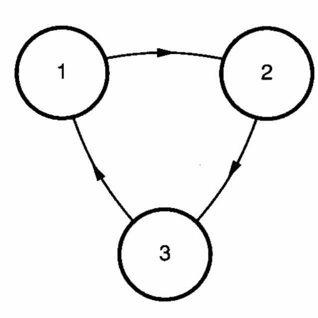


Fig. 3.10.

Evaluons la variation d'énergie interne du système

Entre 1 et 2 : $U_2 - U_1 = W_{12} + Q_{12}$;
Entre 2 et 3 : $U_3 - U_2 = W_{23} + Q_{23}$;
Entre 3 et 1 : $U_1 - U_3 = W_{31} + Q_{31}$.

Sauf lorsque $dQ = 0$ (transformation isentropique) il y a pour chaque transformation ouverte échange de chaleur avec le milieu extérieur.

Vérifions sur un exemple l'existence de la source chaude et celle de la source froide.

3.3. VÉRIFICATION DU PRINCIPE DE CARNOT

Considérons le cycle représenté par le diagramme de Clapeyron *(fig. 3.11)*.

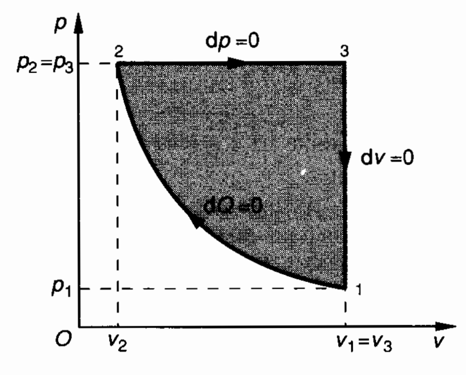


Fig. 3.11.

Transformation 1.2 Isentropique

$dQ = 0$. Au cours de cette transformation il n'y a pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur.
L'expression de la variation d'énergie interne est :

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{\gamma - 1}\,(p_2 v_2 - p_1 v_1)\,.$$

(Résultat obtenu au *paragraphe 2.5.*)
D'après l'équation des gaz parfaits

$$\begin{cases} p_2 v_2 = rT_2 \\ p_1 v_1 = rT_1 \end{cases}$$

d'où $$U_2 - U_1 = \frac{r}{\gamma - 1}\,(T_2 - T_1)\,. \qquad (1)$$

Dans la transformation 1-2 : $U_2 - U_1 = W_{12}$; puisque $Q_{12} = 0$.
Nous avons vu au *chapitre 2, paragraphe 5.2* que

$$W_{12} = \int_{v_1}^{v_2} -p\,dv\,;$$

ici $dv < 0$ donc $W_{12} > 0$.
Nous pouvons donc en déduire, d'après (1) que :

$$\boxed{T_2 > T_1}\,.$$

Dans une transformation isentropique 1-2 (telle que $dv < 0$) la température atteinte en fin de transformation T_2 est supérieure à la température initiale T_1.

Transformation 2.3 Isobare

D'après l'équation des gaz parfaits :

$$p_2 v_2 = rT_2 \quad \text{et} \quad p_3 v_3 = rT_3 .$$

Avec $p_2 = p_3$ et si nous faisons le rapport membre à membre :

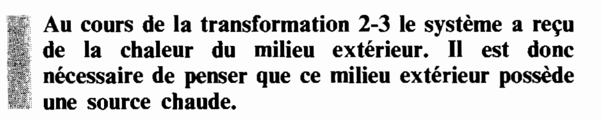
$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{T_2}{T_3} .$$

Les températures absolues sont dans le rapport des volumes, donc ici :

$$\boxed{T_3 > T_2} .$$

Evaluons les quantités de chaleur échangées entre le système et le milieu extérieur :

$$\mathrm{d}Q = C_p \,.\, \mathrm{d}T , \quad \text{d'où} \quad Q_{23} = C_p(T_3 - T_2) > 0 .$$



Au cours de la transformation 2-3 le système a reçu de la chaleur du milieu extérieur. Il est donc nécessaire de penser que ce milieu extérieur possède une source chaude.

Transformation 3.1 Isochore

D'après l'équation des gaz parfaits :

$$p_3 v_3 = rT_3 \quad \text{et} \quad p_1 v_1 = rT_1 .$$

Avec $v_1 = v_3$ et en faisant le rapport membre à membre :

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{T_3}{T_1} .$$

Les températures absolues sont dans le rapport des pressions, donc :

$$\boxed{T_1 < T_3} .$$

Evaluons les quantités de chaleur échangées entre le système et le milieu extérieur au cours de la transformation 3-1 :

$$\mathrm{d}Q = C_v \,\mathrm{d}T , \quad \text{donc} \quad Q_{31} = C_v(T_1 - T_3) < 0 .$$

Le système a donc fourni de la chaleur au milieu extérieur. Il est donc nécessaire de penser que ce milieu extérieur possède une source froide.

3.4. ÉTUDE DE LA RÉVERSIBILITÉ THERMIQUE DES TRANSFORMATIONS

On peut rappeler qu'une transformation est **mécanique réversible** lorsqu'elle est infiniment lente et que les frottements sont négligeables. Autrement dit lorsqu'on la considère comme une suite d'états d'équilibre.

Une transformation est **thermiquement réversible** lorsqu'à tout instant il y a équilibre thermique entre le système et le milieu extérieur. Ceci suppose que dans une transformation 1-2 par exemple et dans la transformation 2-1 c'est la même source (chaude ou froide) qui est utilisée.

On remarque que les sources froides ou chaudes sont telles que quelle que soit la quantité de chaleur échangée avec le système, leur température reste constante.

Pour mieux comprendre cela, étudions successivement les cinq transformations que nous connaissons : Isotherme, Isobare, Isochore, Isentropique et Polytropique.

3.4.1. Transformation isotherme 1.2

Isolons une masse de 1 kg de fluide et considérons son évolution sans transvasement entre les états 1 et 2 telle que $\mathrm{d}T = 0$ *(fig. 3.12)*.

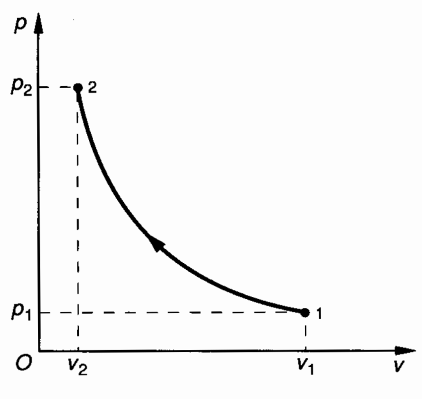


Fig. 3.12.

Dans la transformation 1-2 :

$$\mathrm{d}W_{12} = -p\,\mathrm{d}v > 0 .$$

Le milieu extérieur a fourni au système un certain travail, mais l'énergie interne du système n'a pas changé puisque la transformation s'effectue à température constante : $\mathrm{d}U = 0$.

Sachant que : $\mathrm{d}U = \mathrm{d}W + \mathrm{d}Q$

et $$\left.\begin{matrix} \mathrm{d}U = 0 \\ \mathrm{d}W > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{d}Q < 0 .$$

Le système a donc fourni au milieu extérieur une certaine quantité de chaleur mais sans pour cela que sa température varie. Ceci suppose que la transformation est très lente et que la paroi du réservoir est parfaitement perméable.
La transformation inverse 2-1 se ferait de la même façon dans une succession d'états d'équilibre :

et $$\left.\begin{matrix} dU = 0 \\ dW < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow dQ > 0 .$$

Le système recevrait alors du milieu extérieur une certaine quantité de chaleur, mais sans que sa température varie.
Les transformations 1-2 et 2-1 n'utilisent qu'une seule source de chaleur.


Une transformation isotherme est thermiquement réversible.

3.4.2. Transformation isobare 1.2

Isolons la même masse de fluide et considérons son évolution sans transvasement entre les états 1 et 2 telle que $dp = 0$ *(fig. 3.13)*.

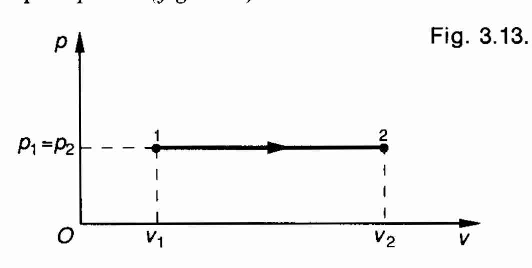


Fig. 3.13.

Dans la transformation 1-2 : $dW_{12} = -p\,dv < 0$.
Le système a fourni au milieu extérieur un certain travail.
Dans une transformation isobare 1-2 on sait que :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad \text{donc ici} \quad T_2 > T_1 .$$

La variation d'énergie interne $dU = C_p \, . \, dT$ est donc positive.
Sachant que $dU = dW + dQ$

et $$\left.\begin{matrix} dU > 0 \\ dW < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow dQ > 0 .$$

Le système a donc reçu du milieu extérieur une certaine quantité de chaleur de telle façon que sa température s'est élevée. Ceci n'est possible que si ce milieu extérieur est une source chaude.
Par contre dans la transformation inverse 2-1, $dU < 0$ (la température a baissé)

et $$\left.\begin{matrix} dU < 0 \\ dW > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow dQ < 0 .$$

Il faudrait donc que le système fournisse au milieu extérieur une certaine quantité de chaleur. Ceci n'est possible que si ce milieu extérieur est une source froide.

Une transformation isobare est thermiquement irréversible.

3.4.3. Transformation isochore 1.2

Isolons la même masse fluide et considérons son évolution sans transvasement entre les états 1 et 2 telle que $dv = 0$ *(fig. 3.14)*.

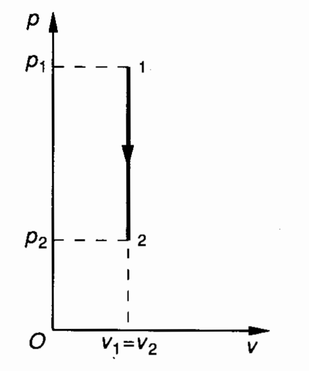


Fig. 3.14.

Dans la transformation 1-2 : $dW_{12} = -p\,dv = 0$.
Le volume du système étant constant il n'y a eu aucun échange de travail avec le milieu extérieur. Dans une transformation isochore 1-2 on sait que :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{donc ici} \quad T_2 < T_1 .$$

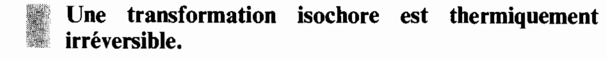
La variation d'énergie interne : $dU = C_v \, . \, dT$ est donc négative.
Sachant que $dU = dW + dQ$

et $$\left.\begin{matrix} dU < 0 \\ dW = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow dQ < 0 .$$

Le système a donc fourni de la chaleur au milieu extérieur et sa température s'est abaissée.
Ceci n'est possible que si ce milieu extérieur est une source froide.
Par contre dans la transformation inverse 2-1 :

et $$\left.\begin{matrix} dU > 0 \\ dW = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow dQ > 0 .$$

Il faut donc que le système reçoive du milieu extérieur une certaine quantité de chaleur.
Ceci n'est possible que si ce milieu extérieur est une source chaude.
Les transformations 1-2 et 2-1 ne s'effectuent pas de la même façon puisqu'elles utilisent deux sources différentes.


Une transformation isochore est thermiquement irréversible.

3.4.4. Transformation isentropique 1.2

Isolons la même masse fluide et considérons son évolution sans transvasement entre les états 1 et 2 telle que $dQ = 0$ *(fig. 3.15)*.

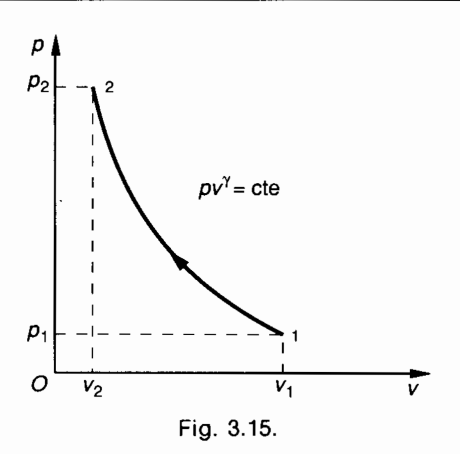
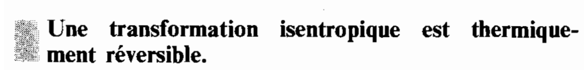


Fig. 3.15.

Dans la transformation 1-2 : $dW_{12} = -p\,dv > 0$.
Le système a donc reçu un certain travail du milieu extérieur.
Sachant que $dU = dW + dQ$

et $$\left.\begin{matrix} dW > 0 \\ dQ = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow dU > 0\,.$$

La température de la masse fluide croît : $T_2 > T_1$.
Si la transformation est lente et si le réservoir est parfaitement calorifugé, cette élévation de température a lieu sans qu'il y ait échange de chaleur avec le milieu extérieur.
On comprend que la transformation inverse 2-1 puisse s'effectuer de la même façon et sans échange de chaleur avec le milieu extérieur.



Une transformation isentropique est thermiquement réversible.

3.4.5. Transformation polytropique 1-2

Isolons une masse de fluide de 1 kg et considérons son évolution sans transvasement entre les états 1 et 2 *(fig. 3.16)*.

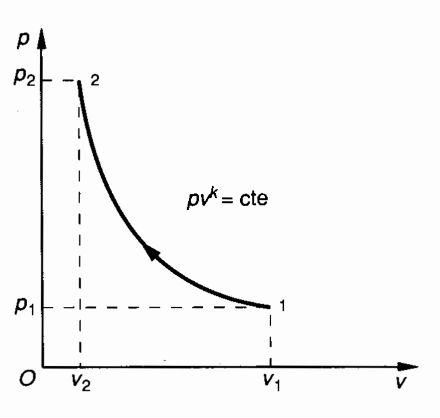


Fig. 3.16.

Dans la transformation 1-2 : $dW_{12} = -p\,dv > 0$.

Nous avons vu au *paragraphe 2.6* que le travail W_{12} s'exprimait par :

$$W_{12} = \frac{1}{k-1}(p_2 v_2 - p_1 v_1) = \frac{r}{k-1}(T_2 - T_1)\,.(2)$$

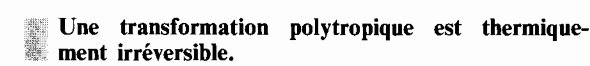
La quantité de chaleur échangée s'exprime par *(paragraphe 2.6) :*

$$Q_{12} = W_{12}\frac{k-\gamma}{\gamma-1}\,, \quad \text{avec} \quad \gamma > 1 \quad (\gamma \approx 1{,}4)\,.$$

Le signe de Q_{12} dépend donc du signe de $k - \gamma$.
Si $k > \gamma$, $Q_{12} > 0$: le système reçoit de la chaleur.
Si $k < \gamma$, $Q_{12} < 0$: le système fournit de la chaleur.
Plaçons-nous dans le cas $W_{12} > 0$, $Q_{12} < 0$.
Ceci implique l'existence d'une source froide.
Considérons la transformation inverse 2-1 :

$$\left\{\begin{matrix} W_{21} < 0\,, \\ Q_{21} > 0\,. \end{matrix}\right.$$

Ceci implique l'existence d'une source chaude.
Les transformations 1-2 et 2-1 ne s'effectuent pas de la même façon, puisqu'elles utilisent deux sources différentes.



Une transformation polytropique est thermiquement irréversible.

3.5. CYCLE DE CARNOT. RENDEMENT

Par définition, le cycle de Carnot est réversible c'est-à-dire qu'il peut être parcouru dans un sens ou dans l'autre en conservant les mêmes sources. Il ne peut donc être constitué que par deux isentropes et deux isothermes *(fig. 3.17)*.

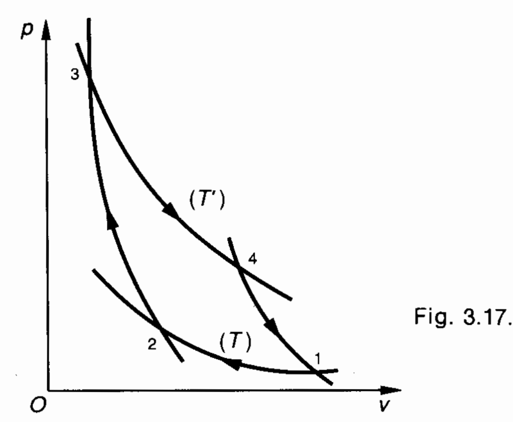


Fig. 3.17.

Le cycle fonctionne entre deux sources :

Source froide : température T définie par l'isotherme 1-2.

Source chaude : température T' définie par l'isotherme 3-4.

Considérons le cycle comme moteur, c'est-à-dire, que le système le parcourt dans le sens 1-2-3-4-1 et faisons le bilan mécanique et thermique de ce cycle.

Transformation 1.2 isotherme à la température T

$dT = 0$ entraîne $dU = 0$,
d'autre part $dW = -p\,dv > 0$.
Sachant que $dU = dW + dQ$

et $$\left.\begin{matrix} dU = 0 \\ dW > 0 \end{matrix}\right\} dQ < 0 .$$

Le système fournit donc de la chaleur au milieu extérieur (source froide). Pour un moteur c'est de l'énergie perdue. (C'est par exemple la chaleur fournie par les gaz d'échappement d'un moteur.)
Travail échangé dans la transformation 1-2

$$W_{12} = \int_{v_1}^{v_2} -p\,dv ,$$

$$\boxed{W_{12} = rT \ln \frac{v_1}{v_2}} .$$

Quantité de chaleur échangée dans la transformation 1-2 :

$$U_2 - U_1 = 0 \Rightarrow Q_{12} = -W_{12} ,$$

$$\boxed{Q_{12} = -rT \ln \frac{v_1}{v_2}} .$$

Transformation 2.3 isentropique

Au cours de cette transformation la température du système isolé va passer de T (source froide) à T' (source chaude)

$$T' > T \Rightarrow dU > 0 ,$$

d'autre part $dQ = 0$.
Sachant que $dU = dW + dQ$

et $$\left.\begin{matrix} dU > 0 \\ dQ = 0 \end{matrix}\right\} dW > 0 .$$

Le système reçoit du travail du milieu extérieur :

$$W_{23} = U_3 - U_2 = \frac{1}{\gamma - 1}(p_3 v_3 - p_2 v_2)$$

d'après l'équation des gaz parfaits :

$$p_3 v_3 = rT' \quad \text{et} \quad p_2 v_2 = rT ,$$

donc :

$$\boxed{W_{23} = \frac{r}{\gamma - 1}(T' - T)} .$$

Transformation 3.4 isotherme à la température T'

$$dT = 0 \Rightarrow dU = 0$$

d'autre part :

$$dW = -p\,dv < 0 .$$

Sachant que $dU = dW + dQ$

et $$\left.\begin{matrix} dU = 0 \\ dW < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow dQ > 0 .$$

Le système reçoit donc de la chaleur du milieu extérieur (source chaude). Pour un moteur c'est l'énergie consommée.
Travail échangé au cours de cette transformation

$$W_{34} = \int_{v_3}^{v_4} -p\,dv$$

$$\boxed{W_{34} = -rT' \ln \frac{v_4}{v_3}} .$$

Quantité de chaleur échangée au cours de cette transformation :

$$U_4 - U_3 = 0 , \quad \text{d'où} \quad Q_{34} = -W_{34}$$

$$\boxed{Q_{34} = rT' \ln \frac{v_4}{v_3}} .$$

Transformation 4.1 isentropique

Au cours de cette transformation la température du système isolé va passer de T' (source chaude) à T (source froide)

$$T < T' \Rightarrow dU < 0$$

d'autre part : $dQ = 0$.
Sachant que $dU = dW + dQ$

et $$\left.\begin{matrix} dU < 0 \\ dQ = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow dW < 0 ,$$

le système fournit du travail au milieu extérieur

$$W_{41} = U_1 - U_4 = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1 v_1 - p_4 v_4) .$$

D'àprès l'équation des gaz parfaits :

$$p_1 v_1 = rT \quad \text{et} \quad p_4 v_4 = rT'$$

$$\boxed{W_{41} = \frac{r}{\gamma - 1}(T - T')} .$$

• **Rendement thermodynamique**

On peut écrire pour l'expression du rendement thermodynamique η_{th} :

$$\boxed{\eta_{th} = \frac{\text{Energie mécanique disponible}}{\text{Energie thermique utilisée}}}\ .$$

(Le cycle choisi est moteur.)
L'énergie mécanique disponible à la sortie est la valeur absolue de la somme algébrique des travaux échangés entre le système et le milieu extérieur.
Energie mécanique disponible $= |W_{cycle}|$

$$W_{cycle} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}\ .$$

D'après le principe de l'équivalence :

$$(W + Q)_{cycle} = 0 \quad \text{et} \quad |W_{cycle}| = |Q_{cycle}|\ .$$

Energie mécanique disponible :

$$\left| rT \ln \frac{v_1}{v_2} - rT' \ln \frac{v_4}{v_3} \right|\ .$$

L'énergie thermique utilisée est égale (en valeur absolue) à la quantité de chaleur absorbée par le système.
Energie thermique utilisée :

$$|Q_{34}| = \left| rT' \ln \frac{v_4}{v_3} \right|\ .$$

Le rendement thermodynamique a donc comme expression en changeant les signes dans la valeur absolue :

$$\eta_{th} = \frac{\left| T' \ln \frac{v_4}{v_3} - T \ln \frac{v_1}{v_2} \right|}{\left| T' \ln \frac{v_4}{v_3} \right|}\ ,$$

soit, avec $T' > T$,

$$\eta_{th} = 1 - \frac{T}{T'} \cdot \left| \frac{\ln \frac{v_1}{v_2}}{\ln \frac{v_4}{v_3}} \right|\ .$$

Nous allons simplifier cette expression :
Considérons les deux isothermes 1-2 et 3-4. Nous savons que :

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 \quad \text{et} \quad p_3 v_3 = p_4 v_4 \qquad (1)$$

Considérons les deux isentropes 2-3 et 4-1. Nous savons que :

$$p_2 v_2^{\gamma} = p_3 v_3^{\gamma} \quad \text{et} \quad p_4 v_4^{\gamma} = p_1 v_1^{\gamma}\ . \qquad (2)$$

Si nous faisons le rapport membre à membre des deux équations définies en (2)

$$\frac{p_1 v_1^{\gamma}}{p_2 v_2^{\gamma}} = \frac{p_4 v_4^{\gamma}}{p_3 v_3^{\gamma}}\ ,$$

$$\text{soit} \quad \frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} \cdot \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma - 1} = \frac{p_4 v_4}{p_3 v_3} \cdot \left(\frac{v_4}{v_3} \right)^{\gamma - 1}\ .$$

D'après le système d'équations (1) :

$$\left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma - 1} = \left(\frac{v_4}{v_3} \right)^{\gamma - 1}\ ,$$

ce qui entraîne : $\quad \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{v_4}{v_3}\ .$

Donc, dans l'expression du rendement :

$$\boxed{\boldsymbol{\eta_{th} = 1 - \frac{T}{T'}}}\ .$$

On démontre que, fonctionnant entre deux sources de chaleur à la température T et T', le cycle de Carnot est le cycle à plus haut rendement possible. Pratiquement un tel cycle est irréalisable mais dans les installations thermiques on cherche à s'en rapprocher le plus possible.

4. APPLICATIONS. MACHINES RÉELLES

4.1. ÉTUDE DU TRANSVASEMENT

Jusqu'ici nous avons étudié les transformations thermodynamiques sans transvasement, c'est-à-dire que l'on n'a considéré que les évolutions d'une masse de 1 kg de fluide enfermée dans un cylindre plus ou moins calorifugé. Industriellement de telles évolutions offrent peu d'intérêt.
Si nous considérons par contre une certaine masse d'air qui pénètre dans le cylindre, à basse pression par exemple, puis qui évolue pour être ensuite éjectée vers un réservoir à une pression plus élevée, on étudie un compresseur. Le transvasement de l'air du milieu extérieur vers le cylindre, puis du cylindre vers le réservoir doit être étudié ; nous ferons cette étude en choisissant justement un compresseur d'air « théorique ».

Un transvasement n'est pas une transformation thermodynamique

4.2. ÉTUDE DU TRAVAIL MÉCANIQUE ÉCHANGÉ

Décrivons succinctement les évolutions du gaz (air). Considérons un cylindre possédant un clapet d'aspiration et un clapet de refoulement. Ce cylindre est fermé par un piston *(fig. 3.18)*.

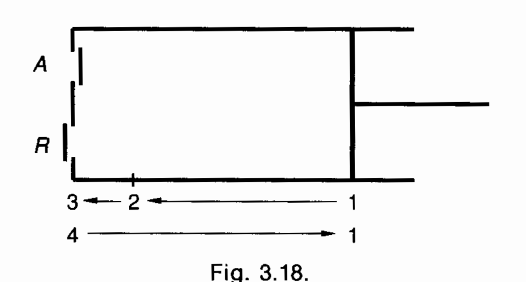


Fig. 3.18.

A = clapet d'aspiration ;
R = clapet de refoulement.
1, 2, 3, 4 correspondent à la succession des positions du piston.

Position 1 : A et R sont fermés, le cylindre contient 1 kg d'air à la pression p_1 (généralement p_1 = pression atmosphérique). En position 1, on définit (p_1, v_1, T_1).
Position 2 : Fin de la compression (p_2, v_2, T_2), ouverture de R et début du transvasement dans le réservoir où règne la pression p_2.
Position 3 : Fin du transvasement ; fermeture de R.
Position 4 : Ouverture de A, début de l'aspiration.
Position 1 : Fin de l'aspiration ; fermeture de A.

Le diagramme de la *figure 3.19* permet de suivre les évolutions de la masse d'air.

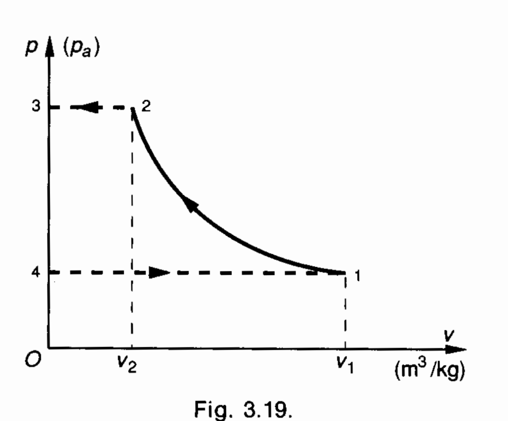


Fig. 3.19.

1-2-3-4-1 représente le **cycle de fonctionnement du compresseur.** Le sens du mot *cycle* est différent de celui qui a été utilisé jusqu'à présent, puisqu'entre 2 et 3 par exemple, c'est une masse d'air de 1 kg qui est refoulée alors qu'entre 4 et 1 c'est *une autre masse d'air* de 1 kg qui est aspirée. On continuera à employer par extension le mot cycle, tout en sachant que dans les machines réelles usuelles il y a transvasement.

Pour le travail échangé :

$$\boxed{W_{\text{cycle}} = W_{12} + W_{23} + W_{41}} \qquad (1)$$

(3-4 n'est pas une transformation).

Calcul de W_{12}

Ce calcul dépend de la nature de la transformation. Nous avons rencontré dans ce chapitre les transformations 1-2 suivantes :

Isotherme :

$$W_{12} = -p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (\textit{paragraphe } 2.2).$$

Cette transformation est théorique.

Isentropique :

$$W_{12} = \frac{1}{\gamma - 1}(p_2 v_2 - p_1 v_1) \quad (\textit{paragraphe } 2.5).$$

Cette transformation est théorique.

Polytropique :

$$W_{12} = \frac{1}{k - 1}(p_2 v_2 - p_1 v_1) \quad (\textit{paragraphe } 2.6).$$

Cette transformation est réelle.

Quel que soit le modèle choisi, on sait calculer W_{12}.

Calcul de W_{23}

Ce transvasement se fait à la pression constante du réservoir : $p_3 = p_2$

$$W_{23} = \int_{v_2}^{v_3} -p\,dv\,.$$

Si l'on admet qu'en position 3, $v_3 = 0$ (pas de volume résiduel en fond de cylindre) :

$$W_{23} = -p_2 \int_{v_2}^{0} dv = p_2 v_2\,.$$

Calcul de W_{41}

L'aspiration se fait à la pression constante du milieu extérieur (en général la pression atmosphérique) : $p_4 = p_1$

$$W_{41} = \int_{v_4}^{v_1} -p\,dv\,.$$

Si l'on admet qu'en position 4, $v_4 = 0$:

$$W_{41} = -p_1 \int_{0}^{v_1} dv = -p_1 v_1\,.$$

Calcul de W_{cycle} avec transvasement

$$W_{cycle} = W_{12} + p_2 v_2 - p_1 v_1 \qquad (2)$$

W_{cycle} est mesuré par l'aire du cycle 1.2.3.4.1.

4.3. ÉTUDE DE LA QUANTITÉ DE CHALEUR ÉCHANGÉE

Reprenons le cycle avec transvasement décrit ci-dessus et calculons Q_{cycle} pour la suite des opérations 1-2-3-4-1 décrites par les *figures 3.18 et 3.19.*
Les transvasements : **refoulement 2-3 ; aspiration 4-1,** sont des opérations purement mécaniques qui sont tributaires seulement de l'état (ouvert ou fermé) des clapets A et R. On peut donc dire que pendant les transvasements il n'y a (théoriquement) aucun échange de chaleur. Donc :

$$Q_{cycle} = Q_{12} \qquad (3)$$

que la transformation 1-2 soit isotherme, isentropique ou polytropique, nous savons calculer Q_{12}.
Isotherme :

$$U_2 - U_1 = W_{12} + Q_{12},$$

comme $U_2 - U_1 = 0, \quad Q_{12} = -W_{12}$,
d'où

$$Q_{12} = p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

Isentropique :

par définition $\qquad Q_{12} = 0$.

Polytropique :

$$Q_{12} = W_{12} \frac{k - \gamma}{\gamma - 1} \quad (\textit{paragraphe } 3.4.5).$$

4.4. PUISSANCE D'UNE MACHINE. RENDEMENT

Au *chapitre 1, paragraphe 2.6* nous avons défini la puissance nette d'une machine.

La puissance nette d'une machine est le travail par unité de temps qu'elle échange avec le fluide qui la traverse

$$P_n = \frac{dW}{dt}.$$

Si q_m est le débit massique entre l'entrée et la sortie de la machine et W le travail échangé par 1 kg de fluide

$$P_n = W . q_m.$$

Unités : P_n en watts ; W en joules par kilogramme ; q_m en kilogrammes par seconde.

Rendement

Le rendement global d'une machine est le rapport entre la puissance qu'elle fournit et la puissance qu'elle utilise.

Si la machine utilise l'énergie mécanique de son arbre d'entrée. (Notons P_a = puissance absorbée.)

$$\eta = \frac{P_n}{P_a}.$$

Si la machine utilise l'énergie du fluide. (Notons P_u = puissance utile sur son arbre de sortie.)

$$\eta = \frac{P_u}{P_n}.$$

4.5. ÉTUDE D'UN COMPRESSEUR ALTERNATIF

Cette étude a été menée *aux paragraphes 4.1 ; 4.2 ; 4.3* ci-dessus. Nous nous contenterons d'en faire une application numérique.
Le compresseur d'air à étudier comprime l'air atmosphérique ($p_1 = 10^5$ Pa) à une pression $p_2 = 5.10^5$ Pa. Le taux de compression est donc : $\tau = \frac{p_2}{p_1} = 5$.
Ce compresseur est un compresseur rapide à refroidissement par air ; la compression 1-2 est polytropique : $k = 1{,}35$.
Le débit volumique à l'entrée est :

$$q_v = 3 \text{ m}^3/\text{min, à } t_1 = 20\ ^\circ\text{C et } p_1 = 10^5 \text{ Pa}.$$

On donne les chaleurs massiques de l'air et on néglige leur variation en fonction de la température

$$C_p = 997 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} ; \quad C_v = 710 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

QUESTION 1

Calculer les caractéristiques de l'air au début (indice 1) et à la fin (indice 2) de la compression polytropique.

RÉPONSE

• **Calcul de la constante r de l'air :**
D'après la relation de Mayer *(paragraphe 1.7.4)*

$$r = C_p - C_v, \quad \text{d'où} \quad \mathbf{r = 287\ J.kg^{-1}.K^{-1}}.$$

• **Calcul de v_1 :**
D'après la loi des gaz parfaits : $pv = rT$:

$$v_1 = \frac{rT_1}{p_1},$$

avec $r = 287\ \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $T_1 = 293$ K ; $p_1 = 10^5$ Pa.
Numériquement : $\mathbf{v_1 = 0{,}84\ m^3/kg}$.

• **Calcul de v_2 :**
La loi d'évolution de la compression polytropique est :

$$pv^k = \text{Cte},$$

donc $p_2 v_2^k = p_1 v_1^k$, soit

$$v_2 = v_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Numériquement :

$$v_2 = 0{,}84 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{1{,}35}}, \quad \text{d'où} \quad \mathbf{v_2 = 0{,}255\ m^3/kg}.$$

• **Calcul de T_2 :**
D'après la loi des gaz parfaits : $pv = rT$, soit

$$T_2 = \frac{p_2 v_2}{r}.$$

Numériquement :

$$T_2 = \frac{5 \times 10^5 \times 0{,}255}{287}, \quad \text{d'où} \quad \mathbf{T_2 = 444\ K}.$$

QUESTION 2

Quel est le débit massique du compresseur ?

RÉPONSE

A l'état initial 1 on sait que : $p_1 = 10^5$ Pa et $v_1 = 0{,}84$ m^3/kg, avec $q_v = 3$ m^3/min, soit $q_v = 0{,}05$ m^3/s.
v_1 exprime le volume massique à l'état 1, donc $\rho_1 = \frac{1}{v_1}$ exprime la masse volumique à l'état 1.
Par ailleurs $q_m = \rho q_v$, donc :

$$q_m = \frac{q_v}{v} = \frac{0{,}05}{0{,}84}, \quad \text{soit} \quad \mathbf{q_m = 59{,}5.10^{-3}\ kg/s}.$$

QUESTION 3

Calculer le travail W_{12} ainsi que la quantité de chaleur Q_{12} échangée par 1 kg d'air pendant la compression polytropique.

RÉPONSE

• **Calcul de W_{12} :**

$$W_{12} = \frac{1}{k-1}(p_2 v_2 - p_1 v_1) = \frac{r}{k-1}(T_2 - T_1).$$

Numériquement :

$$W_{12} = \frac{287}{0{,}35}(444 - 293), \quad \text{soit} \quad \mathbf{W_{12} \approx 123{,}8\ kJ/kg}.$$

• **Calcul de Q_{12} :**

$$Q_{12} = W_{12}\frac{k-\gamma}{\gamma - 1}.$$

Numériquement :

$$Q_{12} = 123{,}8 \times \frac{-0{,}05}{0{,}4}, \quad \text{soit} \quad \mathbf{Q_{12} \approx -15{,}5\ kJ/kg}.$$

Le signe moins exprime que le kilogramme d'air cède de la chaleur au milieu extérieur.

QUESTION 4

Calculer le travail échangé par 1 kg d'air au cours d'un cycle de fonctionnement du compresseur.

RÉPONSE

$$W_{\text{cycle}} = W_{12} + p_2 v_2 - p_1 v_1,$$

ou

$$W_{\text{cycle}} = W_{12} + r(T_2 - T_1).$$

Numériquement :

$$W_{\text{cycle}} = 123{,}8.10^3 + 287(444 - 293),$$

soit

$$\mathbf{W_{cycle} \approx 167{,}1\ kJ/kg}.$$

QUESTION 5

Calculer la puissance nette théorique du compresseur.

RÉPONSE

$$P_n = W_{\text{cycle}} \times q_m.$$

Numériquement :

$$P_n = 167{,}1 \times 59{,}5.10^{-3}, \quad \text{d'où} \quad \mathbf{P_n \approx 10\ kW}.$$

4.6. ÉTUDE SIMPLIFIÉE DU MOTEUR À EXPLOSION

4.6.1. Principe

La *figure 3.20* permet de comprendre le fonctionnement du cycle **de Beau de Rochas.** Ce cycle s'étend sur deux tours de moteur et concerne une masse de 1 kg d'air. On donne :

A = soupape d'admission,
E = soupape d'échappement,
B = bougie.

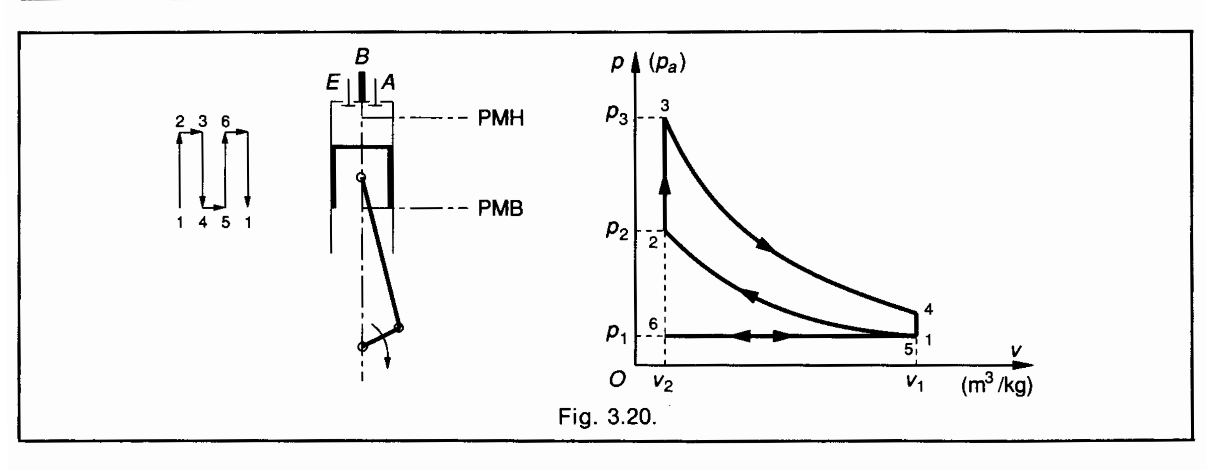


Fig. 3.20.

1 : Le piston est au point mort bas (PMB).
Les soupapes A et E sont fermées. Le mélange contenu dans le cylindre est assimilé à de l'air à l'état 1.
$1 \to 2$: Compression supposée isentropique ($pv^{\gamma} = \text{Cte}$).

2 : Le piston est au point mort haut (PMH).
Les soupapes A et E sont fermées. Le mélange assimilé à de l'air est à l'état 2.
$2 \to 3$: Combustion du mélange à volume constant sous l'effet de l'étincelle de la bougie ($v = \text{Cte}$).

3 : Le piston est au point mort haut.
Les soupapes A et E sont fermées. Le mélange a brûlé et sa température s'est considérablement élevée. Les gaz de combustion encore assimilés à de l'air sont à l'état 3.
$3 \to 4$: Temps moteur : détente supposée isentropique ($pv^{\gamma} = \text{Cte}$).

4 : Le piston est au point mort bas.
Les gaz de combustion, toujours assimilés à de l'air, ont une température encore élevée et une pression nettement supérieure à la pression atmosphérique. Etat 4.
La soupape A reste fermée.
La soupape E s'ouvre.
$4 \to 5$: Détente des gaz brûlés.
La soupape E étant ouverte, la pression revient à l'état initial $p_5 = p_1$ (pression atmosphérique).

5 : Début d'échappement. Piston au PMB.
$5 \to 6$: La soupape E restant ouverte, la remontée du piston provoque l'échappement des gaz brûlés vers l'extérieur. Echappement à la pression constante p_1.
6 : Fin de l'échappement, E se ferme.
Début de l'admission, A s'ouvre.
Le piston est au PMH.
$6 \to 1$: Course d'admission à pression constante.
E est fermée
A est ouverte.
Retour à l'état 1.

Hypothèses de calcul

Les gaz sont assimilés à de l'air. On supposera que les chaleurs massiques sont constantes :

$$C_p = 1\,000 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} ; \quad C_v = 710 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} .$$

Par conséquent,

$$r = C_p - C_v = 290 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1{,}4 .$$

A l'état 1 :

$$\begin{cases} p_1 = 10^5 \text{ Pa} \\ v_1 = ? \\ T_1 = 300 \text{ K} \end{cases}$$

(température ambiante $t = 27\ ^\circ\text{C}$).

A l'état 2 :

$$\begin{cases} p_2 = ? \\ v_2 = \dfrac{v_1}{7} \\ T_2 = ? \end{cases}$$

($\varepsilon = 7$ est le rapport volumétrique de compression).

A l'état 3 :

$$\begin{cases} p_3 = ? \\ v_3 = v_2 \\ T_3 = T_2 + 2\,000 \end{cases}$$

(2 000 K correspond à l'élévation de température due à la combustion du mélange).

A l'état 4 :

$$\begin{cases} p_4 = ? \\ v_4 = 7\, v_3 \\ T_4 = ? \end{cases}$$

L'état 5 est le même que l'état 1.

A l'état 6 :

$$\begin{cases} p_6 = p_1 = 10^5 \text{ Pa} \\ v_6 = \dfrac{v_1}{7} \\ T_6 = 300 \text{ K} \end{cases}$$

(température ambiante $t = 27\ ^\circ\text{C}$).

4.6.2. Bilan mécanique

1 → 2 : Compression isentropique

• **Calculons v_1 :**
D'après la loi des gaz parfaits $pv = rT$:

$$v_1 = \frac{rT_1}{p_1}, \quad \text{soit} \quad \mathbf{v_1 \approx 0{,}87\ m^3/kg}.$$

• **Calculons T_2 :**
Pour une transformation isentropique :

$$p_2 v_2^\gamma = p_1 v_1^\gamma \quad \text{et} \quad p_2 = p_1 \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^\gamma,$$

avec $\frac{v_1}{v_2} = 7$; $\gamma = 1{,}4$; $p_1 = 10^5$ Pa

$$\mathbf{p_2 \approx 15{,}25.10^5\ Pa}$$

et $T_2 = \frac{p_2 v_2}{r}$ soit $\mathbf{T_2 \approx 654\ K}$.

• **Exprimons le travail échangé :**
Pour une compression isentropique 1-2 : $Q_{12} = 0$, alors :

$$W_{12} = U_2 - U_1 = C_v(T_2 - T_1).$$

Numériquement : $\mathbf{W_{12} \approx 251\ kJ/kg}$.

2 → 3 : Combustion à volume constant

$$v_3 = v_2 = \frac{v_1}{7}, \quad \text{d'où} \quad \mathbf{v_3 = 0{,}124\ m^3/kg}$$
$$T_3 = T_2 + 2\,000, \quad \text{d'où} \quad \mathbf{T_3 = 2\,654\ K}.$$

• **Calculons p_3 :**
D'après la loi des gaz parfaits $pv = rT$:

$$p_3 = \frac{rT_3}{v_3}, \quad \text{soit} \quad \mathbf{p_3 = 62.10^5\ Pa}.$$

• **Exprimons le travail échangé :**
Dans une transformation isochore 2-3 ($dv = 0$) on sait que

$$W_{23} = 0, \quad \text{soit} \quad \mathbf{W_{23} = 0}.$$

3 → 4 : Détente isentropique

• **Calculons p_4 :**
Pour une transformation isentropique :

$$p_4 v_4^\gamma = p_3 v_3^\gamma, \quad \text{soit} \quad p_4 = p_3 \left(\frac{v_3}{v_4}\right)^\gamma,$$

avec $\frac{v_3}{v_4} = \frac{1}{7}$; $\gamma = 1{,}4$; $p_3 = 62.10^5$ Pa,

$$\mathbf{p_4 \approx 4.10^5\ Pa}.$$

• **Calculons T_4 :**
D'après la loi des gaz parfaits $pv = rT$:

$$T_4 = \frac{p_4 v_4}{r}, \quad \text{soit} \quad \mathbf{T_4 \approx 1\,200\ K}.$$

On constate qu'en fin de détente isentropique, la pression et la température du gaz sont encore assez élevées. On pourrait encore recueillir un certain travail de détente mais cela conduirait à adopter des dimensions trop importantes pour le cylindre ; on pourrait également entraîner un compresseur de suralimentation.

• **Exprimons le travail échangé.**
Pour une détente isentropique 3-4 : $Q_{34} = 0$, alors :

$$W_{34} = U_4 - U_3 = C_v(T_4 - T_3).$$

Numériquement : $\mathbf{W_{34} \approx -1\,032\ kJ/kg}$.

4 → 5 Détente des gaz brûlés

L'état 5 est le même que l'état 1.
La détente 4-5 étant isochore ($dv = 0$) on sait que :

$$W_{45} = 0, \quad \text{soit} \quad \mathbf{W_{45} = 0}.$$

5 → 6 → 1 Opérations mécaniques d'échappement et d'admission

Ces deux opérations n'intéressent pas le bilan du cycle

$$\mathbf{W_{561} = 0}.$$

Résultat du bilan mécanique du cycle :

$$W_{cycle} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{45} + W_{561}$$
$$W_{cycle} = 251 - 1\,032,$$

d'où

$$\mathbf{W_{cycle} = -781\ kJ/kg}.$$

4.6.3. Bilan thermique

1 → 2 Compression isentropique

Par définition il n'y a aucun échange de chaleur avec le milieu extérieur :

$$\mathbf{Q_{12} = 0}.$$

2 → 3 Combustion à volume constant

A volume constant on sait que $W_{23} = 0$ et donc que la quantité de chaleur échangée est égale à la variation d'énergie interne :

$$U_3 - U_2 = Q_{23} = C_v(T_3 - T_2)\,,$$

avec $T_3 = 2\,654$ K ; $T_2 = 654$ K,
d'où

$$\mathbf{Q_{23} = 1\,420\ kJ/kg}\,.$$

3 → 4 Détente isentropique

Par définition il n'y a aucun échange de chaleur avec le milieu extérieur :

$$\mathbf{Q_{34} = 0}\,.$$

4 → 5 Détente des gaz brûlés

Cette transformation ramène les gaz à l'état initial 1. Cette transformation étant isochore $W_{45} = 0$ et donc la quantité de chaleur échangée est égale à la variation d'énergie interne :

$$U_5 - U_4 = Q_{45} = C_v(T_5 - T_4)\,,$$

avec $T_5 = T_1 = 300$ K ; $T_4 = 1\,200$ K,
d'où

$$\mathbf{Q_{45} = -\,639\ kJ/kg}\,.$$

5 → 6 → 1 Opérations mécaniques d'échappement et d'admission

Ces deux opérations n'intéressent pas le bilan du cycle :

$$\mathbf{Q_{561} = 0}\,.$$

Résultat du bilan thermique du cycle :

$$Q_{cycle} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{45} + Q_{561}$$
$$Q_{cycle} = 1\,420 - 639\,,$$

d'où

$$\mathbf{Q_{cycle} = 781\ kJ/kg}\,.$$

Notons que nous avons raisonné sur un cycle en faisant de nombreuses hypothèses. Il est donc normal d'après le principe de l'équivalence que :

$$(W + Q)_{cycle} = 0\,,$$

ce que l'on vérifie aisément.

4.6.4. Rendement thermodynamique du cycle de Beau de Rochas

Par définition :

$$\eta_{th} = \frac{\text{Energie mécanique disponible}}{\text{Energie thermique dépensée}}\,.$$

• L'énergie mécanique disponible est évidemment $|W_{cycle}|$. L'énergie thermique dépensée est l'énergie obtenue par combustion de l'essence à partir du moment où l'étincelle de bougie provoque l'explosion du mélange. L'énergie thermique dépensée est donc Q_{23}.
Exprimons le rendement thermodynamique en fonction du rapport volumétrique $\varepsilon = \frac{v_1}{v_2}$:

$$W_{cycle} = C_v(T_2 - T_1) + C_v(T_4 - T_3)\,,$$

on a vu que $W_{cycle} < 0$ donc

$$|W_{cycle}| = C_v(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)\,.$$

• L'énergie thermique dépensée est Q_{23} :

$$Q_{23} = C_v(T_3 - T_2)$$

d'où $\eta_{th} = \dfrac{T_1 - T_2 + T_3 - T_4}{T_3 - T_2}$.

Exprimons T_2, T_3, T_4 en fonction de T_1 et de ε.
Dans 1 → 2 isentropique :

$$\left.\begin{aligned} p_2 v_2^{\gamma} &= p_1 v_1^{\gamma} \\ p_2 v_2 &= rT_2 \\ p_1 v_1 &= rT_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_2 = T_1 \,.\, \varepsilon^{\gamma - 1}\,.$$

Dans 3 → 4 isentropique :

$$\left.\begin{aligned} p_4 v_4^{\gamma} &= p_3 v_3^{\gamma} \\ p_4 v_4 &= rT_4 \\ p_3 v_3 &= rT_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_3 = T_4 \,.\, \varepsilon^{\gamma - 1}$$

et donc :

$$\boxed{\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma - 1}}}\,.$$

Application numérique : pour $\varepsilon = 7$ et $\gamma = 1{,}4$:

$$\boldsymbol{\eta_{th} = 0{,}54}\,.$$

PRINCIPALES RELATIONS CONCERNANT LES TRANSFORMATIONS THERMODYNAMIQUES

Transformation $1 \rightarrow 2$	**Isotherme** $dT = 0$	**Isochore** $dv = 0$	**Isobare** $dp = 0$	**Isentropique** $dQ = 0$	**Polytropique**
Loi d'évolution	$pv = \text{Cte}$ $p_2 v_2 = p_1 v_1$	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$	$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}$	$pv^{\gamma} = \text{Cte}$ $p_2 v_2^{\gamma} = p_1 v_1^{\gamma}$	$pv^{k} = \text{Cte}$ $p_2 v_2^{k} = p_1 v_1^{k}$
W_{12}	$W_{12} = -p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1}$	$W_{12} = 0$	$W_{12} = -p(v_2 - v_1)$ $W_{12} = -r(T_2 - T_1)$	$W_{12} = \frac{r}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$	$W_{12} = \frac{r}{k - 1}(T_2 - T_1)$
Q_{12}	$Q_{12} = p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1}$	$Q_{12} = \frac{r}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$	$Q_{12} = \frac{r\gamma}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$	$Q_{12} = 0$	$Q_{12} = \frac{r(k-\gamma)}{(\gamma - 1)(k-1)}(T_2 - T_1)$
$U_2 - U_1$	$U_2 - U_1 = 0$	$U_2 - U_1 = \frac{r}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$	$U_2 - U_1 = \frac{r}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$	$U_2 - U_1 = \frac{r}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$	$U_2 - U_1 = \frac{r}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$

4.6.5. Cycle réel

On peut relever directement le diagramme pv pour un moteur donné. La *figure 3.21* permet de comparer le cycle théorique en pointillé et le cycle réel enregistré en trait fort.

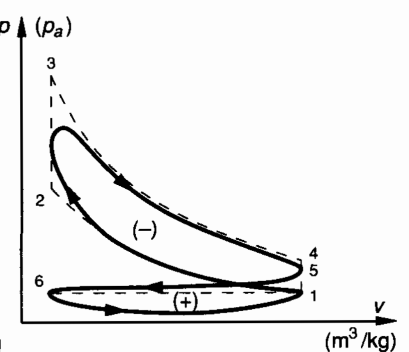


Fig. 3.21.

Les différences portent essentiellement sur :

- Lors de l'ouverture des soupapes, l'écoulement n'est pas instantané. Il y a laminage du mélange ou des gaz brûlés et perte d'énergie.
- Lors de l'admission, le déplacement du piston crée une dépression. ($p <$ pression atmosphérique p_1). Courbe 6.1.
- Lors de l'échappement, la pression des gaz brûlés reste toujours un peu supérieure à la pression atmosphérique. Courbe 5-6.

Au niveau du bilan mécanique, on voit que le cycle comporte deux « boucles » de signe contraire. L'énergie mécanique disponible est donc égale à la valeur absolue de la somme algébrique des deux aires. Cette valeur est notablement inférieure à l'aire de $W_{1234561}$ calculée au *paragraphe 4.6.2*.

Nous noterons : $|W_{cycle}|$ le travail théorique et $|W_{ind}|$ le travail indiqué par l'enregistreur. On distinguera alors les rendements :

Rendement thermodynamique : η_{th} *(paragraphe 4.6.4)*

$$\eta_{th} = \frac{|W_{cycle}|}{Q_{23}}, \quad \text{d'où} \quad \eta_{th} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma - 1}}.$$

Rendement indiqué : η_{ind}:

$$\eta_{ind} = \frac{|W_{ind}|}{Q_{23}}.$$

Rendement mécanique

Pour tenir compte des frottements, de l'énergie perdue pour faire tourner l'arbre à came et entraîner les soupapes etc. Il est évident que le travail disponible réel $|W_{réel}|$ est inférieur à $|W_{ind}|$.

$$\eta_{méca} = \frac{|W_{réel}|}{|W_{ind}|}.$$

Ce rendement mécanique peut dépasser 0,9 sur les moteurs modernes.

Rendement vrai : η

alors

$$\boxed{\eta = \eta_{ind} \times \eta_{méca}}$$

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 A $t_0 = 0\,°C$ et sous pression atmosphérique $p_0 = 10^5$ Pa, la masse volumique de l'air est $\rho = 1{,}293$ kg/m³.

QUESTIONS

1° Quel est le volume occupé par une masse d'air de 1 kg à $t_0 = 0\,°C$ et sous pression $p = 4\,p_0$?

2° Quelle est la masse volumique de l'air à $t_1 = 50\,°C$ et sous pression atmosphérique p_0 ?

3° Quelle est la masse volumique de l'air à $t_1 = 50\,°C$ et sous une pression $p = 3\,p_0$?

RÉPONSES

1° $v = 0{,}193$ m³.
2° $\rho = 1{,}093$ kg/m³.
3° $\rho = 3{,}279$ kg/m³.

2 Une masse d'air de 1 kg subit une détente isothermique 1-2 à la température $t_1 = t_2 = 20\,°C$:

$$p_1 = 6.10^5 \text{ Pa} \quad \text{et} \quad p_2 = 10^5 \text{ Pa},$$

à 20° la constante r de l'air est 287 J.kg⁻¹.K⁻¹.

QUESTIONS

1° Déterminer les volumes v_1 et v_2 occupés par l'air aux états 1 et 2.

2° Faire le bilan mécanique et thermique de la transformation ouverte 1-2.

RÉPONSES

1° $v_1 = 0{,}14$ m³/kg ; $v_2 = 0{,}84$ m³/kg.
2° $W_{12} = -\,150{,}5$ kJ/kg ; $Q_{12} = 150{,}5$ kJ/kg.

3 Une masse d'air de 1 kg subit une détente à volume constant :
Etat 1 : $p_1 = 8.10^5$ Pa, $v_1 = 0{,}2$ m³/kg.
Etat 2 : $p_2 = 2.10^5$ Pa, $v_2 = 0{,}2$ m³/kg.
On donne : $r = 287$ J.kg⁻¹.K⁻¹

QUESTION

Déterminer les températures de l'air à chacun de ces deux états.

RÉPONSE

$$t_1 = 284{,}5\ ^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad t_2 = -133{,}6\ ^\circ\text{C}.$$

4 Une bouteille contient 12,7 litres d'oxygène comprimé à la température de 20 °C. Le manomètre indique une pression de 60.10^5 Pa.

QUESTION

Quelle est la masse d'oxygène contenue dans la bouteille ? (On donne pour l'oxygène $r = 260$ J.kg^{-1}.K^{-1}.

RÉPONSE

$$m = 1 \text{ kg}.$$

5 On considère un kilogramme d'air à la température absolue $T_1 = 273$ K, à la pression atmosphérique $p_1 \approx 10^5$ Pa et occupant le volume v_1.
On comprime cet air à température constante jusqu'à ce que son volume devienne 6 fois plus faible.
On continue de comprimer cet air mais de façon isentropique jusqu'à ce que sa température atteigne $T_3 = 400$ K.
On lui fait subir ensuite deux détentes successives : d'abord une détente isotherme puis une détente isentropique de telle façon qu'il retrouve son état initial.
On donne $\gamma = 1{,}4$ et la valeur moyenne $r = 286$ J.kg^{-1}.K^{-1} sera utilisée quelle que soit la température.

QUESTIONS

1° *Déterminer* les caractéristiques (p, v, T) incomplètement données et correspondant aux quatre états successifs de l'air.
2° Pour chacune des quatre transformations calculer les quantités de travail et de chaleur échangées entre le système isolé et le milieu extérieur.
3° Calculer le rendement de ce cycle.

RÉPONSES

1° $p_1 = 10^5$ Pa ; $v_1 = 0{,}78$ m³/kg ; $T_1 = 273$ K.
$p_2 = 6.10^5$ Pa ; $v_2 = 0{,}13$ m³/kg ; $T_2 = 273$ K.
$p_3 = 22{,}88.10^5$ Pa ; $v_3 = 0{,}05$ m³/kg ; $T_3 = 400$ K.
$p_4 = 3{,}81.10^5$ Pa ; $v_4 = 0{,}3$ m³/kg ; $T_4 = 400$ K.

2° $W_{12} = 139{,}75$ kJ/kg ; $Q_{12} = -139{,}75$ kJ/kg.
$W_{23} = 91$ kJ/kg ; $Q_{23} = 0$.
$W_{34} = -204{,}98$ kJ/kg ; $Q_{34} = 204{,}98$ kJ/kg.
$W_{41} = -90{,}75$ kJ/kg ; $Q_{41} = 0$.

3° $$\eta_{th} = \frac{\text{Energie mécanique disponible}}{\text{Energie thermique utilisée}} = \frac{T_3 - T_1}{T_3}.$$

$\eta_{th} = 0{,}317$ (cycle de carnot).

6 Un compresseur alternatif monocylindrique doit avoir un débit volumique $q_v = 135$ l/min, mesuré dans les conditions de température et de pression de l'aspiration *(fig. 3.22)*.

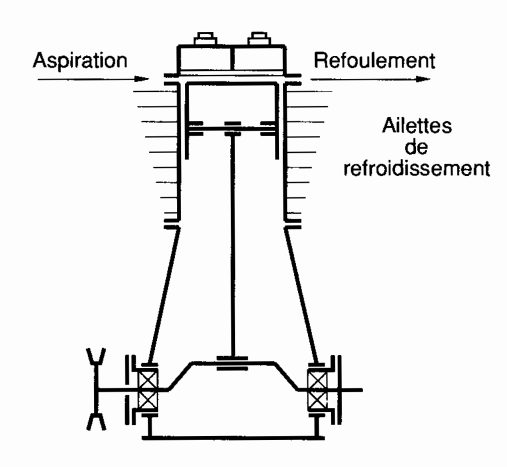


Fig. 3.22.

En fin d'aspiration : Etat 1 :

$$\begin{cases} p_1 = 10^5 \text{ Pa (atmosphérique)} \\ v_1 = ? \\ t_1 = 15\ ^\circ\text{C}. \end{cases}$$

Le refoulement se fera à la pression $p_2 = 4.10^5$ Pa.

- *On connait certaines caractéristiques mécaniques du compresseur.*

— Fréquence de rotation de l'arbre moteur : $N = 1\,500$ tr/min.
— Vitesse moyenne du piston : $v_{moy} = 1{,}5$ m/s.
— Volume de l'espace mort en fond de cylindre, entre le point mort haut (PMH) et la boîte à clapets :

$$v_0 = 0{,}05\ V.$$

— V est la cylindrée, c'est-à-dire le volume engendré par le déplacement du piston.
— Le refroidissement du compresseur se fait par l'intermédiaire des ailettes réparties autour du cylindre.

- *Description du cycle de fonctionnement (fig. 3.23)*

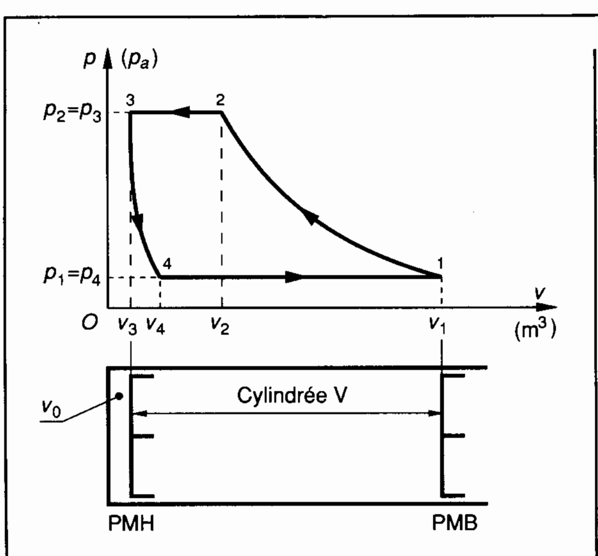


Fig. 3.23.

1→2 : Compression polytropique ($k = 1{,}3$) jusqu'à la pression $p_2 = 4.10^5$ Pa.
2 → 3 : Transvasement (refoulement) à la pression $p_2 = p_3$.
Au point 3 : Le piston est au point mort haut (PMH) et le cylindre contient le volume résiduel $v_3 = v_0$ à la pression p_3.
3 → 4 : Le piston commence à descendre.
Détente polytropique ($k = 1{,}3$) jusqu'à la pression $p_4 = p_1 = 10^5$ Pa.
Au point 4 : Le clapet d'aspiration s'ouvre.
4 → 1 : Transvasement (Aspiration) à la pression atmosphérique p_1.
Au point 1 : Le piston est au point mort bas (PMB) et le cylindre contient le volume $v_1 = V + v_0$ à la pression p_1.
Dès le début de la course montante, $p > p_1$ et le clapet d'aspiration se referme.

• *Hypothèse*
Les transvasements 2 → 3 et 4 → 1 se font sans échange de chaleur. On donne $\gamma = 1{,}4$.

QUESTIONS

1° Calculer la course c du piston.

2° Calculer la cylindrée V, le volume mort v_0.

3° Calculer le diamètre d du piston.

4° Etude de la compression polytropique 1 → 2 :
Calculer v_1, T_1 ; v_2, T_2 ; W_{12}, Q_{12}.

5° Etude du refoulement 2 → 3.
Exprimer p_3, v_3, T_3 ; Calculer W_{23}, Q_{23}.

6° Etude de la détente polytropique 3 → 4 :
Calculer v_4, T_4 ; W_{34}, Q_{34}.

7° Etude de l'aspiration 4 → 1.
Calculer W_{41}, Q_{41}.

8° Bilan mécanique et thermique du cycle :
Calculer W_{cycle}, Q_{cycle}, conclusion.

RÉPONSES

1° $c = 30$ mm .

2° $V = 9.10^{-5}$ m^3 ; $v_0 = 0{,}45.10^{-5}$ m^3 .

3° $d = 61{,}80$ mm .

4° $v_1 = 9{,}45.10^{-5}$ m^3 ; $T_1 = 288$ K .
$v_2 = 3{,}25.10^{-5}$ m^3 ; $T_2 = 396$ K .
$W_{12} = 11{,}83$ J ; $Q_{12} = -2{,}95$ J .

5° $p_3 = 4.10^5$ Pa ; $v_3 = 0{,}45.10^{-5}$ m^3 ; $T_3 = 396$ K .
$W_{23} = 11{,}2$ J ; $Q_{23} = 0$.

6° $v_4 = 1{,}3.10^{-5}$ m^3 ; $T_4 = 286$ K .
$W_{34} = -1{,}66$ J ; $Q_{34} = 0{,}415$ J .

7° $W_{41} = -8{,}15$ J ; $Q_{41} = 0$.

8° $W_{cycle} = 13{,}22$ J ; $Q_{cycle} = -2{,}535$ J .

$Q < 0$: l'air doit pouvoir céder de la chaleur au milieu extérieur, ceci justifie l'existence des ailettes de refroidissement.

Table des matières

MODÉLISATION. RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX. NOTIONS D'ÉLASTICITÉ

HYDRAULIQUE ET THERMODYNAMIQUE APPLIQUÉES

Aubin Imprimeur
LIGUGÉ, POITIERS

Dépôt légal : septembre 1996
Dépôt légal de la 1re édition : 2e trimestre 1990
N° d'impression L 52285
Imprimé en France

P. Agati - N. Mattera

Mécanique appliquée

Résistance des matériaux - Mécanique des fluides Thermodynamique

Cet ouvrage de mécanique appliquée complète le cours de **mécanique du solide** paru dans la même collection.

Destiné aux étudiants de l'enseignement technique supérieur (DEUG de technologie industrielle, sections de techniciens supérieurs, instituts universitaires de technologie, classes préparatoires) et aux auditeurs de la formation continue, il est centré sur les applications de la **résistance des matériaux**, de la **mécanique des fluides** et de la **thermodynamique**.

Tout comme dans le volume de mécanique générale, les exemples, choisis dans le monde industriel, font de cet ouvrage une excellente préparation aux examens, aux concours et à la vie professionnelle.



Code 043217
ISBN 2 10 003217 8

